



UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET



MILOŠ M. KOCIĆ

**ISTRAŽIVANJA MAGNETNO
HIDRODINAMIČKIH STRUJANJA I
PRENOSA TOPLOTE MIKROPOLARNIH
FLUIDA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2019.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING



MILOŠ M. KOCIĆ

RESEARCH OF

MAGENTOHYDRODYNAMIC FLOW AND

HEAT TRANSFER OF MICROPOLAR

FLUIDS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2019.

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Mentor: dr Živojin M. Stamneković, docent, Univerzitet u Nišu, Mašinski Fakultet

Naziv: Istraživanja magnetno hidrodinamičkih strujanja i prenosa toplote mikropolarnih fluida

Rezime: Predmet istraživanja doktorske disertacije je analiza strujanja i prenosa toplote jednog ili dva elektroprovodna mikroploarna fluida u prisustvu magnetnog i električnog polja. Prvi deo disertacije bavi se razvijanjem matematičkih modela za opisane probleme MHD strujanja i prenosa toplote mikropolarnog fluida, gde je istraživanje sprovedeno u bezindukcijskoj aproksimaciji za slučaj spregnutih jednačina. U narednim poglavljima, razmatran je problem provodnosti zidova kanala, uticaj indukovano magnetnog polja i granični uslovi pri strujanju dva mikropolarna fluida. Posebna pažnja posvećena je strujanju dva fluida između nagnutih ploča, od kojih je jedan obavezno mikropolarni, dok je drugi Njutnovskih karakteristika. Data su analitička rešenja impulsne jednačine, jednačine mikrorotacije, energijske jednačine i jednačine magnetne indukcije za probleme MHD strujanja jednog i dva fluida. Zatim, sledeći deo disertacije daje detaljnu analizu fizičkih fenomena koji se javljaju pri MHD i EMHD strujanju mikropolarnih fluida, kao i poređenje analitički dobijenih rezultata sa rezultatima dobijenim numeričkim simulacijama. Numeričkim simulacijama rešen je slučaj strujanja mikropolarnog fluida u horizontalnom i vertikalnom kanalu pod uticajem magnetnog i električnog polja. Na kraju, treba reći da disertacija sadrži detaljnu analizu rezultat strujanja mikropolarnih fluida koji su od značaja u tehničkoj praksi za različite vrednosti karakterističnih bezdimenzionih veličina koje opisuju MHD i EMHD probleme strujanja i prenosa toplote mikropolarnih fluida. Posebno je obraćena pažnja na primenjivost istraživanja doktorske disertacije na razvoj novih tehnologija.

Naučna Teorijska i primenjena mehanika fluida

oblast:

Naučna Magnetno hidrodinamička strujanja fluida
disciplina:

Ključne reči: mikropolarni fluidi, MHD, EMHD, strujanje fluida, prenos toplote, CFD, ANSYS

UDK:

CERIF P 240, T 210
klasifikacija:

Tip odabrane CC BY-NC-ND
licence:

DATA ON DOCTORAL DISSERTATION

Doctoral Supervisor: dr Živojin M. Stamneković, assistant professor, Univerzity of Niš, Faculty of Mechanical Engineering

Title: Research of magnetohydrodynamic flow and heat transfer of micropolar fluids

Abstract: The basis of the doctoral thesis is the analysis of flow and heat transfer of one or two electrically conducting micropolar fluids in the presence of magnetic and electric fields. The first part of the dissertation is the development of mathematical models for described problems of MHD flow and heat transfer of micropolar fluid, where the research is conducted in inductionless approximation and for the case of coupled equations. After that, in the next chapters, the problem of walls conductivity of the channel is considered, also the effects of induced magnetic field and interface boundary conditions for the flow of two fluids. Special attention is paid to the flow of two fluids between inclined plates where one fluid is micropolar and the other one is Newtonian. Analytical solutions are given for momentum, microrotation, energy and magnetic induction equations for the problems of MHD flow of one and two fluids. Next part of the dissertation has a detailed analysis of physical phenomena that occur in MHD and EMHD flow of micropolar fluids, and comparison of analytical solutions obtained in closed form with the results obtained by numerical simulations. Using the numerical simulations the case of the flow of micropolar fluid in the horizontal and vertical channels under the influence of magnetic and electric fields are solved. At the end, within the dissertation detailed analysis of results are given for micropolar fluids, which is significant in the technical practices, for different values characteristic dimensionless numbers that describes MHD and EMHD problems of flow and heat transfer of micropolar fluids. Special attention is also given to the applicability of the research in the development of new technologies.

Scientific Field: Mechanical Engineering - Theoretical and applied fluid mechanics

Scientific Discipline: Magnetohydrodynamic fluid flow

Key Words: micropolar fluids, MHD, EMHD, fluid flow, heat transfer, CFD, ANSYS

UDC:

CERIF P 240, T 210
Classification:

Creative
Commons CC BY-NC-ND
License Type:

Sadržaj:

I Poglavlje	1
1. Uvod	1
1.1. Magnetna hidrodinamika (MHD) - mikropolarni fluidi	1
1.2. Istorijat istraživanja mikropolarnih fluida	6
1.3. Predmet istraživanja u disertaciji	11
II Poglavlje	15
2. Matematički model	15
2.1. Osnovne jednačine strujanja viskoznog fluida	15
2.1.1. Jednačina kontinuiteta	15
2.1.2. Jednačina konzervacije impulsa	18
2.1.3. Jednačina konzervacije energije	20
2.2. Osnovne jednačine MHD strujanja	24
2.2.1. Maksvelove jednačine	24
2.2.2. Pricip konzervacije električnog polja	26
2.2.3. Ohm-ov zakon	26
2.2.4. Jednačina magnetne indukcije	27
2.2.5. Navier-Stokes-ove jednačine MHD strujanja	29
2.2.6. Sprezanje MHD jednačina	30
2.3. Jednačine MHD strujanja mikropolarnih fluida	31
2.3.1. Jednačina konzervacije ugaonog impulsa	31
2.3.2. Sistem jednačina MHD strujanja mikropolarnih fluida	34

III Poglavlje	37
3. MHD strujanje mikropolarnog fluida	37
3.1. MHD strujanja - mikropolarni fluidi	37
3.2. Fizički i matematički model razmatranog problema	38
3.3. Analiza rezultata razmatranog problema	50
3.4. Dodatak - konstante kod razmatranog problem	57
IV Poglavlje	63
4. MHD strujanje mikropolarnog fluida sa indukovanim poljem	63
4.1. MHD strujanje mikropolarnog fluida za $Rm \ll 0$	63
4.2. Fizički i matematički model razmatranog problema	66
4.3. Analiza rezultata razmatranog problema	73
4.4. Dodatak - konstante kod razmatranog problem	82
V Poglavlje	88
5. Promenljiva elektroprovodnost ploča	88
5.1. Fizički i matematički model razmatranog problema	88
5.2. Analiza rezultata razmatranog problema	94
5.3. Dodatak - konstante kod razmatranog problem	100
VI Poglavlje	106
6. EMHD strujanje mikropolarnog fluida	106
6.1. EMHD strujanja fluida	106
6.2. Fizički i matematički model razmatranog problema	107
6.3. Analiza rezultata razmatranog problema	113
6.4. Dodatak - konstante kod razmatranog problem	119

VII Poglavlje	125
7. MHD strujanje dva mikropolarna fluida	125
7.1. Dva mikropolarna fluida koja se ne mešaju	125
7.2. Fizički i matematički model razmatranog problema	126
7.3. Analiza rezultata razmatranog problema	134
7.4. Dodatak - konstante kod razmatranog problem	141
VIII Poglavlje	155
8. MHD strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida između nagnutih ploča	155
8.1. Fizički i matematički model razmatranog problema	155
8.2. Analiza rezultata razmatranog problema	161
8.3. Dodatak - konstante kod razmatranog problem	168
IX Poglavlje	177
9. MHD i softveri za numeričke simulacije	177
9.1. Softveri za numeričke simulacije	177
9.2. ANSYS softverski paket	179
9.3. ANSYS CFX - razmatranje problema strujanja mikropolarnog fluida u kanalu	182
9.4. ANSYS CFX - model strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu	190
X Poglavlje	199
10. Zaključak i dalji pravci istraživanja	199
10.1. Zaključak	199
10.2. Dalji pravci istraživanja	203

Literatura	205
Biografija autora	214

- I poglavlje -

1. Uvod

1.1.

Magnetna hidrodinamika (MHD) - mikropolarni fluidi

Magnetno polje utiče na mnoga prirodna strujanja, kao i na strujanja stvorena od strane čoveka. Delovanje magnetnog polja se u industriji uveliko koristi za grejanje, transport, mešanje i levitiranje tečnih metala. Imamo Zemljino magnetno polje koje postoji usled strujanja tečnih metala unutar Zemljinog jezgra, zatim Sunčevo magnetno polje koje generiše Sunčeve pege i Sunčev blesak, kao i galaktičko polje koje utiče na stvaranje zvezda. Oblast koja se bavi izučavanjem ovih strujanja, naziva se *magnetna hidrodinamika (MHD)*. Formalno, MHD se bavi međusobnom interakcijom magnetnog polja i strujanja fluida, pri tome fluidi moraju biti elektroprovodni.

Primena magnetne hidrodinamike na tehnološki razvoj uzela je maha krajem prošlog veka, da bi se taj trend nastavio i u ovom veku. Značaj koji ima izučavanje uticaja magnetnog i električnog polja na strujanje elektroprovodnog fluida primetan je u velikom broju industrijskih procesa i tehnoloških postupaka. I pored toga što je izučavanje magnetne hidrodinamike započeto još davne 1832. godine, eksperimentom koji je izveo Michael Faraday [1] na reci Temzi u Londonu, mogućnosti za nova otkrića i zaključke u ovoj oblasti su još uvek jako velika. Opet taj početni eksperiment primenjen je 150 godina kasnije pri razvoju elektromagnetnih merača protoka.

Interesovanje u naučnoj sferi za magnetnu hidrodinamiku postoji još od kraja devetnaestog veka, posebno u oblasti astrofizike. Međutim, kao i kod mnogih drugih primenjenih nauka, posleratna "eksplozija" u tehnološkom razvoju četrdesetih i pedesetih godina dvadesetog veka, imala je pozitivan uticaj na razvoj magnetne hidrodinamike.



Slika 1.1 Michael Faraday



Slika 1.2 Eksperiment M. Faradaya na reci Temzi

Svoj puni procvat magnetna hidrodinamika doživela je zahvaljujući radovima Hartmanna [2] i Alfvena [3], čiji su doprinosi povezani sa dva karakteristična MHD strujanja: Hartmannovim strujanjem i Alfvenovim talasima. Otprilike u isto vreme su geofizičari počeli da sumnjaju da je zemljino magnetno polje generisano usled strujanja tečnih metala unutar jezgra zemlje. Fizičari plazme, s druge strane, stekli su interesovanje za MHD tokom 1950-ih godina kada je počelo da raste interesovanje za kontrolisanom termonuklearnom fuzijom. Njih je pre svega interesovala stabilnost plazme ograničene (okružene) magnetnim poljem.



Slika 1.3 Julius Hartmann



Slika 1.4 Hannes Alfven

Razvoj MHD u industriji je išao nešto sporije i tek tokom 1960-ih napravljeni su prvi ozbiljni koraci. Ipak, ne treba zaboraviti rani pionirski rad J. Hartmanna, koji je 1918. izumeo elektromagnetnu pumpu. Hartmann je teorijski i eksperimentalno izučavao strujanje žive u

prisustvu homogenog magnetnog polja. Ta razmatranja donela su mu titulu "oca" magnetne hidrodinamike tečnih metala, pa se izraz "Hartmannovo strujanje" sada koristi za opisivanje strujanja u kanalima u prisustvu magnetnog polja. Sam razvoj MHD u industriji, došao je kao posledica tri tehnološke inovacije. Prvo se kod brzih reaktora javlja potreba za strujanje tečnosti natrijuma, koja počinje da se koristi kao tečnost za hlađenje. Zatim, kontrolisana termonuklearna fuzija zahteva da se vruća plazma ograniči od površine materijala magnetnim silama. Na kraju, razvoj MHD generatora, kod kojih se jonizovan gas kreće kroz magnetno polje, trebao je da ponudi povećanje efikasnosti elektrenergetskih sistema, međutim ova istraživanja nisu dala željene rezultate, te se njihov neuspeh brzo proširio u naučnoj zajednici. Ovo je izazvalo trenutno smanjenje interesovanja za istraživanje i primenu MHD u industriji.

Dve decenije kasnije, magnetna polja se rutinski koriste za zagrevanje, potiskivanje, mešanje i levitiranje tečnih metala u metalurškoj industriji. Ključna stvar je da Lorentzova sila omogućuje beskontaktno kontrolisanje strujanja metala. Sa stalnim komercijalnim pritiskom za proizvodnju jeftinijih, boljih i konzistentnijih materijala, MHD pruža jedinstveno rešenje za veću kontrolu nad procesima livenja i prerade metala.

Velike mogućnosti u primeni i razvoju magnetne hidrodinamike daje raznolikost elektroprovodnih fluida. Jedna grupa elektroprovodnih fluida koja je privukla pažnju naučnika u drugoj polovini dvadesetog veka jesu *mikropolarni fluidi*.

Fizički, mikropolarni fluidi predstavljaju fluide koji sadrže čvrste, nasumično orjentisane (uglavnom sfernične) deliće rastvorene u viskoznoj tečnosti, pri čemu se ignoriše deformacija tih delića. Navier-Stokesov model klasične hidrodinamike ima veliku ograničenost - on ne može opisati fluide koji sadrže mikrostrukture. Da bi precizno opisali ponašanje ovih fluida potrebna je teorija koja uzima u obzir unutrašnje kretanje individualnih materijalnih delića. U mikropolarnoj teoriji, svaki delić ima konačnu veličinu i predstavlja mikrostrukturu koja može da rotira. Ovaj tip kontinua sadrži kontinualni zbir takvih delića konačne dimenzije. Tri dodatna stepena slobode rotacije definišu se vektorom mikrorotacije.

U okviru mehanike kontinua pojavilo se nekoliko teorija, npr. teorija običnih (Njutnovskih) fluida, mikropolarnih fluida, dipolarnih fluida, itd. Neke od ovih teorija su jako opšte, dok se druge bave specijalnim tipovima materijalne strukture i/ili deformacije, a

potencijalna primenljivost raznih teorija je različita. Jedna od najbolje utvrđenih teorija fluida sa mikrostrukturom je teorija mikropolarnog fluida od strane A. C. Eringen [4].



Slika 1.5 Ahmed Cemal Eringen

Model mikropolarnog fluida uveden od strane A. C. Eringen a vredi izučavati jer je vrlo dobro uravnotežen model. Najpre, dobro je postavljen i značajno generalizovan model u odnosu na klasičan model Navier-Stokesovih jednačina, pokrivajući i u teoriji i u praksi mnogo više fenomena nego klasični model. Pored toga, jako je elegantan i ne toliko komplikovan model, tj. drugim rečima, primenjiv i matematičarima koji izučavaju njegovu teoriju i inženjerima i fizičarima koji ga primenjuju.

Hajde da istaknemo neke osnovne karakteristike koje čine ovaj model prihvatljivim i u teorijskim i u primenjenim istraživanjima. Atraktivnost i snaga ovog modela mikropolarnih fluida dolazi iz činjenice da predstavlja istovremeno značajnu i jednostavnu generalizaciju klasičnog Navier-Stokesovog modela. Uvedeno je samo jedno novo vektorsko polje, polje ugaone brzine fluidnih delića. U skladu sa tim, samo jedna (vektorska) jednačina je dodata - ona predstavlja konzervaciju ugaonog impulsa. Iako se uvode četiri nove viskoznosti, koje karakterišu mikropolarni fluid, ako jedna od njih, konkretno viskoznost mikrorotacije, postane nula, zakon o održanju linearnog impulsa postaje nezavisan od prisustva mikrostrukture. Prema tome, veličina koeficijenta viskoznosti mikrorotacije dozvoljava nam da merimo, na izvestan način, poremećaj strujanja mikropolarnog fluida u odnosu na njutnovski fluid.

Zahvaljujući veoma dobrom i jednostavnom opisu složenih fenomena strujanja mikropolarnih fluida, u mnogim klasičnim primenama (npr. strujanje u kanalu ili između dve ploče) i pod uobičajim geometrijskim i dinamičkim pretpostavkama koje su napravljene u tom slučaju (npr. simetričnost, linearizacija jednačina), jednačine za mikropolarni fluid redukuju se na oblik koji se može analitički rešiti. Prema tome rešenja koja dobijemo, a koja zavise od par dopunskih parametara koji potiču od koeficijenata viskoznosti, mogu jednostavno biti uporediva sa rešenjima odgovarajućih problema za Navier-Stokesove jednačine. Pored toga, kako nekoliko eksperimenata pokazuje, prethodna rešenja Eringenovog modela bolje predstavljaju ponašanje velikog broja realnih fluida (npr. ljudske i životinjske krvi) nego odgovarajuća rešenja klasičnog modela, naročito kada poprečne dimenzije kanala postanu jako male.

Mikropolarni fluidi pripadaju klasi fluida sa nesimetričnim tenzorom napona koje zovemo opštim imenom *polarni fluidi*, a koji pripadaju klasi fluida koja je opštija od onih izučavanih klasičnom teorijom hidrodinamike. Za fluide koji imaju sposobnost da prenesu spregnute napone i koji su izloženi uticaju obrtnog momenta elementarnih delića, kaže se da pripadaju grupi polarnih fluida. Zakon o održanju mase kao i Cauchyev zakon o održanju impulsa, kako je dat za opšte neprekidno strujanje ima isti oblik i za polarne. Razlika se javlja kada pretpostavimo različite teorije zakona o održanju ugaonog impulsa i održanju energije za klasične njutnovske fluide i polarne fluide. Opštiji oblici ovih zakona za polarne fluide dolaze iz razmatranja fizičkog modela kod kog moramo uzeti u obzir dodatne veličine kao što su momenti, (spregnuti) naponi i unutrašnji moment impulsa. Formlno, kada pomenute dodatne veličine zanemarimo, integralne forme zakona o održanju momenta mikrorotacije i energije za obične njutnovske fluide i polarne fluide se podudaraju.

Univerzalnost modela za mikropolarni fluid očigledno ne znači da je matematički trivijalan. Sam klasičan Navier-Stokesov model, specijalni slučaj modela za mikropolarni fluid, je daleko od trivijalnog. U ovom slučaju univerzalnost podrazumeva eleganciju i lepotu matematičke teorije. Međutim, kod složenijih problema elegancija i lepota matematičke teorije gube svoj sjaj, između ostalog kao i kod klasičnog Navier-Stokesovog modela. Shodno tome, javila se potreba za razvoj modela i numeričko rešavanje problema MHD strujanja. Ovde treba istaći da je potvrda analitičkih rešenja kroz eksperimentalna istraživanja, jako zahtevan i skup poduhvat, a u nekim slučajevima i nemoguć, pa je razvoj numeričkih simulacija u eri

kompjuterske tehnike verovatno najispravniji put za dalju i detaljnu analizu MHD strujanja mikropolarnih fluida.

Poslednjih godina posebno se razvijaju numerički modeli visoke tačnosti za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju strujanje fluida. Skraćeno CFD (computational fluid dynamics) ili numerička dinamika fluida ima sve predispozicije da doživi veliku ekspanziju u primeni rešavanja problema strujanja fluida. Prednosti ove metode su velike, poput tačne i detaljne informacije o parametrima strujanja, uzimajući u obzir nelinearnost jednačina. Ne treba smetnuti s uma ni finansijuki znatno povoljniju situaciju u poređenju sa laboratorijskim eksperimentima a i trend sve bržeg razvoja računara koji omogućuju preciznije i brže simulacije. Naravno, određena ograničenja u CFD tehnici, pre svega prilikom formiranja odgovarajućih modela i numeričkih mreža, još uvek ograničavaju primenu na znatno složenije probleme. Ipak, pozitivna slika koju CFD simulacije imaju u naučnoj zajednici, ali i kod inženjera, garantuje da će ova tehnika u budućnosti imati značajno mesto u oblasti analize strujanja fluida.

I pored činjenice da su napravljeni veliki koraci u analizi strujanja mikropolarnih fluida, sa posebnim osvrtom na MHD strujanja, još uvek je nedovoljno objašnjenja fizika problema ovih strujanja, a takođe je prisutan i nedostatak efikasnih modela strujanja, tj. CFD modela za analizu ovih strujanja. Shodno tome, u daljem tekstu se daje osvrt na već urađena istraživanja o mikropolarnim fluidima, a u nastavku modeli i analiza istraživanja strujanja mikropolarnih fluida u okviru ove disertacije.

1.2.

Istorijat istraživanja mikropolarnih fluida

Koncept mikropolarnih fluida bavi se klasom fluida koje pokazuju određene mikroskopske efekte koji proizilaze iz lokalne strukture i mikrokretanja delića fluida (rotacija i translacija strukturnih delića u mikropolarnom fluidu). Teorija mikropolarnih fluida i njeno proširenje na termomikropolarne fluide može dati odgovarajući ne-njutnovski model koji može biti korišćen za analiziranje ponašanja različitih fluida. Izučavanje ovih fluida je privuklo razumljivo veliku pažnju, s obzirom na njihovu primenu u raznim procesima koji se javljaju u industriji. Neki od primera primene su: istiskivanje polimernih fluida, očvršćavanje tečnih

kristala, zatim kod izučavanja ljudske i životinjske krvi, kod raznih vrsta maziva, kao i kod analize koloidnih rastvora i fluida sa lebdećim česticama, gde klasična Navier-Stokesova teorija nije primenjiva.

Teoriju mikropolarnih fluida koja uključuje uticaj prisustva mikrostrukture i njihovog kretanja (translacije i rotacije) na samo strujanje fluida prvi je definisao Eringen [5]. Prvi rezultati njegovih istraživanja objavljeni su 1964. i 1965. u okviru naučnih časopisa i konferencija, da bi konačno teorija o mikropolarnim fluidima ugledala svetlost dana 1966. godine u knjizi "Teorija mikropolarnih fluida" [4]. Nešto kasnije, Eringen [6] (1972) je generalizovao teoriju mikropolarnih fluida uključujući i prenos toplote. Pre Eringena, bilo je još dosta teorija koje su pokušale da opišu strujanje fluida sa mikrostrukturom, ali nijedna nije bila toliko uspešna. Willson [7] (1970) je prvi uveo problem graničnog sloja kod strujanja mikropolarnih fluida. Iste godine Peddiseon i McNitt [8] (1970) su izveli jednačine graničnog sloja za mikropolarni fluid, koje su značajne u velikom broju tehničkih procesa, i primenili su ove jednačine kod stacionarnog strujanja oko prednje zaustavne tačke, stacionarnog opstrujavanja beskonačne ploče i strujanja započetog u graničnom sloju na beskonačnoj ploči.

Ariman [9, 10] (1973, 1974) je istraživao mehaniku fluida mikrokontinuma, kao i specijalni slučaj strujanja mikropolarnih fluida. S druge strane, nešto kasnije Nath [11] (1975, 1976) je razvio slična (automodelna) i aproksimativna rešenja, respektivno, za nestacionaran laminaran granični sloj mikropolarnih fluida, kao i Ahmadi [12] (1976) koji je takođe razmatrao samo slična rešenja za nestišljiv granični sloj mikropolarnog fluida oko polu-beskonačne ploče, korišćenjem metode Runge-Kutta sa njutnovskom iteracijom. Strujanje u graničnom sloju na kontinualnoj površi je često sretan problem strujanja u brojnim tehničkim procesima. Strujanje u graničnom sloju na neprekidnoj polu-beskonačnoj ploči koja se ustaljeno kreće u mirnom fluidu, među prvima je teorijski proučavao Sakiadis [13] (1961), a prvi put je ovakav problem opstrujavanja ploče fluidom konstantne brzine rešen od strane Blasiusa [14] još davne 1908. godine. Saundalgekar i Takher [15] (1983) su proučavali strujanje i prenos toplote oko neprekidne ploče u mikropolarnom fluidu. Brzina, raspodela mikrorotacije i profili temperature su predstavljeni na graficima, a vrednosti faktora trenja i koeficijenta prenosa toplote dati su u tablicama. Gupta P. i Gupta A. [16] (1972) su dali rešenje za stacionarno strujanje mikropolarnog fluida oko neprekidne ploče podvrgnuto uniformnom usisavanju. Oni su ispitivali

efekte bezdimenzionih fizičkih parametara, koji karakterišu strujanje, na profil brzine u graničnom sloju i vektor mikrorotacije.

Dvodimeziono stacionarno strujanje nestišljivog mikropolarnog fluida u laminarnom graničnom sloju oko polu-beskonačne ploče razmatran je od strane Korgova i Luctrova [17] (1979). Pokazano je da se za dva mikrorotacijska granična uslova mogu naći slična rešenja. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja svedene su na obične diferencijalne jednačine, zatim na granični problem u dve tačke, a onda na Košijev problem. Metod Runge-Kutta se koristi za integraciju Cauchyevog problema. Numerička rešenja su dobijena za različite vrednosti bezdimenzionih parametara. Gorla [18] (1983) je razmatrao dvodimezioni stacionarni granični sloj mikropolarnog fluida kod prednje zaustavne tačke na pokretnoj ploči. Gorla [18] (1983) je i takođe analizirao karakteristike prenosa toplote mikropolarnog fluida oko tanke ploče. Numerički rezultati prezentovani su za širok opseg bezdimenzionih parametara i Prandtlvog broja. Gorla i Hassanian [19] (1990) su razmatrali prenos toplote sa rastežućeg zida na mikropolarni fluid koji je formulisao Eringen. Osnovna impulsna jednačina, jednačina o održanju ugaonog impulsa i energijska jednačina su rešene numerički. Rees i Pop [20] (1998) su razmatrali strujanje mikropolarnog fluida oko vertikalne ploče. Jednačine su rešili numerički korišćenjem Keller-box metode. Raptis [21] (1998) izučava strujanje mikropolarnog fluida oko ploče koja se kreće u prisustvu toplotnog zračenja, a Ezzat, Othman i Helmy [22] (1999), primenjuju matrični eksponencijalni metod na bezdimenzione jednačine nestacionarnog graničnog sloja elektroporovodnog mikropolarnog fluida pored beskonačne ploče. Pri rešavanju opisanog problema korišćene su Laplaceove transformacije.

Pored velikog broja istraživanja, koja su uglavnom bila vezana za granični sloj mikropolarnog fluida, veliki broj naučnika bavio se istraživanjem strujanja mikropolarnog fluida oko zida koji se rasteže, zatim u poroznoj sredini, kao i u vertikalnom kanalu. U mnogim istraživanjima korišćen je model mikropolarnih fluida za opis ponašanja biloških fluida (ljudska i životnjska krv).

Tozeren [23] (1977) je teoriju mikropolarnih fluida iskoristio za opisivanje ponašanja suspenzija, dok je sa druge strane teorija mikropolarnih fluida poslužila Allenu [24] (1971) da definiše teoriju podmazivanja mikropolarnim fluidima. Teorija podmazivanja mikropolarnih

fluida uzima u obzir samo povećanje efektivne viskoznosti u tankom sloju. Novija istraživanja, pokazuju da se efektivni viskozitet povećava ili smanjuje i približava određenoj granici/vrednosti (granična viskoznost) u zavisnosti od vrste tečnosti i prirode čvrste površine. Teorije podmazivanja mikropolarnim fluidima dali su i Prakash i Sinha [25] (1975), Shukla i Isa [26] (1975), Tipie [27] (1979), Singh i Sinha [28] (1982), Que i Lu [29] (1987), Khasori i Brewe [30] (1988).

Takhar i Soundalgekar [31] (1985) su istraživali problem strujanja i prenosa toplote mikropolarnog fluida preko porozne ploče. Kamal, Ashraf i Syed [32] (2006) su izučavali dvodimenziono strujanje mikropolarnog fluida prouzrokovano uduvavanjem između dve porozne ploče. Chamkha [33] (2002) je izučavao potpuno razvijeno slobodno konvektivno strujanje mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu. Potpuno razvijeni prirodno konvektivni prenos mase i toplote mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu sa asimetričnim temperaturama zidova je izučavano i od strane Ching-Yang Chenga [34] (2006). Problem strujanja mikropolarnih fluida kroz poroznu sredinu ima mnoge praktične primene, kao što je strujanje kroz porozne stene, kroz penu i penasta/sunderasta tela, zatim legure, polimerne mešavine i mikroemulzije. Iz tog razloga poslednjih godina mnogi naučnici su proučavali nestacionarno slobodno konvektivno strujanje mikropolarnog fluida u prisustvu ili bez magnetnog polja. Na primer, Srinivasacharya [35] (2001) razmatrao je efekte mikrorotacije na nestacionarno strujanje mikropolarnog fluida između dve paralelne porozne ploče, sa periodičnim isisavanjem. Bhargava [36] (2003) je dobio numerička rešenja za slobodno konvektivno MHD strujanje mikropolarnog fluida između dve vertikalne paralelne porozne ploče, korišćenjem metode kvazi-linearizacije (quasi-linearization method). Konačno, Zueco [37] (2009) je sa svojim saradnicima radio na analizi nestacionarnog hidromagnenog strujanja mikropolarne tečnosti između dva vertikalna i porozna zida, uz pomoć metode mrežne simulacije (Network Simulation Method). Zaključak sve trojice je bio da magnetno polje treba da bude važan parametar za kontrolu brzine prenosa toplote pri mnogim primenama magnetne hidrodinamike.

Još od ranih istraživanja Baylissa [38] (1952), urađeno je par teorijskih i eksperimentalnih istraživanja kako bi se razumele karakteristike strujanja krvi [39-41]. Sva ta istraživanja vršena su sa pretpostavkom da se krv ponaša kao njutnovski fluid. Međutim, sada je već prihvaćeno da se krv ponaša kao ne-njutnovski fluid pod određenim uslovima, posebno pri

malom smicajnom naponu. Teorija mikropolarnih fluida je prvi put primenjena kao model za ljudsku krv od strane Turka [42, 43] (1973, 1974), a zatim i od strane Hogena i njegovih saradnika [44] (1989). Ranija eksperimentalna istraživanja [45-47] strujanja krvi pokazala su da pod određenim uslovima strujanja, strujanje krvi ima izvesna odstupanja od strujanja njutnovskih fluida. U poslednje vreme, problem strujanja kroz kanale privukao je značajnu pažnju s obzirom na njegovu primenu kod kardiovaskularnog sistema [48] tretirajući krv kao mikropolarni fluid. Ariman [49] je razmatrao strujanje krvi u kružnoj krutoj cevi i ustanovio da je mikropolarni fluid bolji model za strujanje krvi jer uzima u obzir i mikrorotaciju čestica suspendovanih u krvi što je kasnije potvrđeno eksperimentalnim rezultatima od strane Bugliarelloa i Sevilla [45].

Analiza uticaja dejstva magnetnog polja na strujanje mikropolarnog fluida, razmatrano je od strane Kasiviswanathana i Gandhia [50] (1992) koji su izučavali klasu tačnih rešenja za magnetno hidrodinamička strujanja mikropolarnog fluida između dva paralelna, ne koaksijalna, izolovana i beskonačna rotirajuća diska. Mohammeadein i Gorla [51] (1966) razmatrali su uticaj poprečnog magnetnog polja na kombinovano konvektivno strujanje mikropolarnog fluida oko horizontalne ploče. Kaniye su Gorla i Takhar [52] (1998) razmatrali istovremeni uticaj sile potiska i Lorentzove sile prilikom strujanja elektroprovodnog mikropolarnog fluida oko zagrejjane vertikalne ploče u prisistvu poprečnog magnetnog polja visokog intenziteta. Rezultati istraživanja ukazivali su na to da mikropolarni fluidi smanjuju zaustavni trag (odlažu odvajanje graničnog sloja) i brzinu prenosa toplote sa površine. Magnetno hidrodinamička strujanja izučavana su takođe i od strane: Ortege i Rojas [53] (1996), zatim Rojas [54] (1997), Rojas i Beltrana [55] (1995), Rojas i Boldrina [56] (1998) i Langa [57] (1977). Novija istraživanja, Mansour i Gorla [58] (1999), bavila su se razmatranjem problema MHD kombinovano konvektivnog strujanja mikroploarnog fluida oko zadnje zaustavne tačke horizontalnog cilindra potopljenog u mikropolarni fluid. El-Haikem [59] (1999) proučavao je uticaj Jouleove toplote na magnetno hidrodinamička slobodno konvektivna strujanja mikropolarnih fluida. El-Amin [60] (2001) je proučavao magnetno hidrodinamičko slobodno konvektivno strujanje i prenos mase mikropolarnog fluida sa konstantim isisavanjem. Nedavno su Rahman i Sattar [61] (2006) izučavali magnetno hidrodinamičko konvektivno strujanje mikropolarnog fluida preko beskonačne pokretne ploče uz apsorbiciju toplote. Oni su zapravo proširili rad El-Arabawya [62] (2003) na magnetno hidrodinamičko strujanje uzimajući u obzir uticaj slobodne konvekcije i inercije mikrorotacije koji su zanemareni u radu El-Arabawya. Međutim, napred pomenuto istraživanje rađeno je sa pretpostavkom da ploča miruje. Sa druge strane, Kim [63]

(2001) je razmatrao nestacionarno magnetno hidrodinamičko slobodno konvektivno strujanje mikropolarnog fluida preko vertikalne porozne ploče u poroznoj sredini.

1.3.

Predmet istraživanja u disertaciji

Predmet istraživanja ove disertacije je uticaj magnetnog i električnog polja na strujanje i prenos toplote mikropolarnih fluida. Ova oblast je do danas veoma malo izučena te je osnovni cilj definisanje fizičkih i matematičkih modela koji adekvatno opisuju ove probleme strujanja i prenosa toplote, kao i analiza uticaja karakterističnih fizičkih parametara na strujno-temperaturske osobine sistema ili procesa.

Primarni cilj naučnog istraživanja je prevashodno definisanje odgovarajućih matematičkih modela kojima se opisuje strujanje, prenos toplote i mikrorotacija strukturnih elemenata mikropolarnih fluida uopštenjem klasičnog Navier-Stokesovog modela i uzimanjem u obzir jednačine konzervacije ugaonog impulsa. Zatim definisanje opštih jednačina magnetne hidrodinamike za mikropolarne fluide pri čemu se razmatra uticaj magnetnog i električnog polja na strujanje fluida, te proširenje razmatranih problema strujanja i prenosa toplote mikropolarnih fluida uvođenjem u razmatranje indukovano magnetnog polja ($Rm \approx 1$).

Shodno postavljenom cilju, prvi deo istraživanja vezan je za potpuno razvijeno laminarno MHD strujanje mikropolarnih fluida u kanalima pod dejstvom uniformnog magnetnog polja. Za ovu klasu Hartmann-Poiseuilleovih strujanja ili Hartmann-Couetteovih strujanja razvijaju se matematički modeli, analiziraju dobijena rešenja i utvrđuju uticaji karakterističnih bezdimenzionih veličina na strujanja i prenos toplote. Ova se strujanja karakterišu time da se sve fizičke veličine, izuzev pritiska, ne menjaju duž pravca strujanja, dok je pad pritiska u pravcu strujanja konstantan. Matematički opis postavljenog problema definisan je jednačinom kontinuiteta, impulsnom jednačinom, opštom jednačinom magnetne indukcije, energijskom jednačinom, kao i novo uvedenom jednačinom koja predstavlja konzervaciju ugaonog impulsa. Analiza dobijenih rezultata biće grafički predstavljena uz izvedene zaključke o uticaju karakterističnih parametara na strujanja mikropolaranih fluida.

Drugi analitički problem disertacije ima za cilj analizu klase problema MHD strujanja i prenosa toplote mikropolarnih fluida za slučaj Reynoldsovog magnetnog broja reda jedinice, $Rm \ll 0$. Usled strujanja elektroprovodnog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, dolazi

do pojave indukcije magnetnog polja. Ako Reynoldsov magnetni broj uzima vrednosti oko jednice, onda uticaj ovog indukovanog polja na strujanje i karakteristike strujanja, ne sme biti zanemaren. Stoga će se u ovom delu disertacije dati uticaj karakteristika mikropolarnog fluida na indukovano magnetno polje, kao i na ostale strujne veličine.

Treći razmatrani model u doktorskoj disertaciji, predstavlja proširenje drugog modela gde se uvodi proizvoljna provodnost zidova kanala. U cilju kompletnosti razmatranja opisanog problema definiše se i problem provodnosti zidova kanala, pri čemu se razlikuju neprovodni zidovi, zidovi konačne provodnosti i idealno provodni zidovi. Moguća kombinacija provodnosti zidova pruža analizu uticaja provodnosti zidova na samo strujanje mikropolarnog fluida, a posebno uticaj na profil brzina u graničnim slojevima na zidovima paralelnim magnetnom polju, kao i na zapreminski protok u ovim slojevima.

Značaj razvoja EMHD pumpi, pre svega zbog njihove pouzdanosti, odsustva pokretnih delova male potrebne snage, reverzibilnosti protoka, mogućnosti upravljanja strujanjem sa dva ili više fluida, izazvao je sve veće interesovanje za izučavanje EMHD strujanja. Iz tog razloga kod narednog razmatranog problema u disertaciji, vršiće se analiza EMHD strujanja mikropolarnog fluida. Nezavisno od namene EMHD strujanja mikropolarnog fluida, značajno je razumeti dinamiku ovakvog strujno-termičkog problema i efekat električnog i magnetnog polja na transportne karakteristike sistema, odnosno analizu međusobnog dejstva između magnetnog polja i električnog polja normalnog na njega.

U drugom delu disertacije posebna pažnja biće posvećena istraživanju magnetno hidrodinamičkog strujanja dva fluida koji se ne mešaju. Tako će peto poglavlje u disertaciji kao osnovni cilj imati razmatranje uticaja magnetnog polja na strujanje i prenos toplote dva mikropolarna fluida. Za ovako definisane probleme, nakon razvoja matematičkih modela i definisanja graničnih uslova na površi razdvajanja fluida, analiziraju se dobijena rešenja i utvrđuju uticaji karakterističnih bezdimenzionih veličina na strujanja i prenos toplote. Posebno se razmatra međusobni uticaj fluida i promene koje nastaju na razdelnoj površi fluida.

Šesti razmatrani model se odnosi na istraživanja i analizu klase problema MHD strujanja i prenosa toplote mikropolarnog i viskoznog fluida u nagnutom kanalu. Osnovni cilj je razvoj modela, analiza dobijenih rešenja i utvrđivanje uticaja karakterističnih bezdimenzionih veličina na strujanja i prenos toplote. Uticaj magnetnog polja na strujanje fluida u nagnutom kanalu biće analiziran preko

Hartmannovog broja, dok će uticaji fizičkih karakteristika mikropolarnih fluida na samo strujanje fluida biti analizirani preko dopunskih viskoznosti, odnosno karakterističnih parametara koji su definisani preko pomenutih viskoznosti. Pored uticaja magnetnog polja i fizičkih karakteristika mikropolarnog fluida, razmatraće se i uticaj ugla pod kojim je nagnut kanal. Cilj ovog dela istraživanja je određivanje polja brzine, temperature i mikrorotacije i to u bezindukcionoj aproksimaciji.

Analiza MHD strujanja u kanalima obično se vrši pretpostavljajući da je elektroprovodnost fluida konstantna i da se strujanje obavlja duž jednog pravca a karakteristične veličine zavise od poprečne koordinate. Ove dve pretpostavke značajno pojednostavljaju opšte jednačine koje opisuju strujanje fluida i prenos toplote i ovako dobijene jednačine je moguće rešiti analitički ne čineći grešku u slučaju jednostavne geometrije kanala. Poseban značaj ovih tačnih rešenja pojednostavljenih fizičkih modela je u tome što ona omogućavaju dobijanje aproksimativnih rešenja složenijih problema. Pored ove veoma poznate primene tačnih rešenja u mehanici fluida, postoji još jedan važan razlog za njihovu analizu u magnetnoj hidrodinamici. Kod magnetno hidrodinamičkih problema strujanja, uvođenjem elektromagnetnih fenomena u analizu dinamike strujanja fluida ne javljaju se samo problemi u rešavanju jednačina, već se javljaju i novi fizički fenomeni. Dobijena analitička rešenja diferencijalnih jednačina koja opisuju MHD strujanje mikropolarnih fluida omogućavaju sticanje uvida u ove nove fizičke fenomene.

U okviru disertacije biće učinjen pokušaj da se pomenuta pojednostavljena analiza proširi uzimajući u obzir indukovano magnetno polje sa ciljem utvrđivanja magneto hidrodinamičke interakcije fluida i polja, dok se u energijskoj jednačini, pored viskoznog zagrevanja, uzima u obzir i Jouleova toplota. Opisani problemi biće razmatrani kako za strujanje jednog, tako i za strujanje dva fluida koji se ne mešaju. Ovako proširene jednačine svodiće se na bezdimenzioni oblik korišćenjem bezdimenzionih veličina koje karakterišu MHD strujanja i zatim će se dati njihova analitička rešenja. Dobijena rešenja biće analizirana za fluide čija je primena značajna u tehničkoj praksi i za različite vrednosti karakterističnih bezdimenzionih veličina.

Razvoj softvera za numeričko rešavanje problema dinamike fluida (computational fluid dynamics-CFD), kao i mogućnost njihovog proširenja , tj. dokodiranja, omogućava opisivanje složenijih problema strujanja fluida. Cilj istraživanja u poslednjem poglavlju disertacije biće razvoj modela u softveru ANSYS -CFX pri čemu će se definisati dopunski članovi koji će opisivati fizičke

karakteristike mikropolarnog elektroprovodnog fluida, kao i uticaj magnetnog, električnog polja i mikrorotacije.

Za sve prethodno definisane probleme strujanja mikropolarnih fluida ključni ciljevi su matematičko modeliranje opisanih problema strujanja, zatim njihovo rešavanje i analiza fizičkih fenomena koji se javljaju kod MHD i EMHD strujanja.

U okviru disertacije, sledeći problemi MHD i EMHD strujanja mikropolarnih fluida biće matematički definisani i analizirani preko uticaja karakterističnih bezdimenzonih veličina na polja brzine, mikrorotacije, temperature i magnetne indukcije:

- Strujanje i prenos toplote elektroprovodnog mikropolarnog fluida u prisustvu magnetnog polja između paralelnih ploča;
- Strujanje i prenos toplote elektroprovodnog mikropolarnog fluida za slučaj Reynoldsovog magnetnog broja reda jedinice;
- Strujanje i prenos toplote elektroprovodnog mikropolarnog fluida za slučaj Reynoldsovog magnetnog broja reda jedinice i proizvoljnu provodnost zidova kanala;
- Analiza EMHD strujanja i prenosa toplote mikropolarnog fluida između paralelnih ploča u prisustvu električnog i spolajšnjeg magnetnog polja;
- Analiza uticaja magnetnog polja na strujanje i prenos toplote strujanje dva mikropolarna fluida koji se ne mešaju;
- Strujanje i prenos toplote elektroprovodnog mikropolarnog fluida i viskoznog fluida u prisustvu magnetnog polja u nagnutom kanalu;
- Razvoj modela fluida sa mikrostrukturom u softveru ANSYS-CFX.

- II poglavlje -

2. Matematički model

2.1.

Osnovne jednačine strujanja viskoznog fluida

Fluid je materija koja se kontinualno deformiše pod dejstvom tangencijalnog napona ma kako mali on bio.

Postoje u osnovi dve metode proučavanja kretanja fluida. Prva tretira fluid kao skup molekula. Alternativna metoda koristi koncept kontinuuma koji zanemaruje diskretnu strukturu materije i pretpostavlja da fluid kontinualno ispunjava prostor. Materija na koju se može primeniti koncept kontinuuma naziva se neprekidna sredina ili kontinuum. Deo fizike koji proučava kretanje neprekidne sredine naziva se mehanika neprekidne sredine ili mehanika kontinuuma. Prema tome mehanika fluida je deo mehanike kontinuuma.

Stanje fluida je potpuno definisano rasporedom brzine $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, pritiska $p(\mathbf{r}, t)$ i gustine $\rho(\mathbf{r}, t)$. Sve ove veličine su funkcije prostornih koordinata $\mathbf{r}(x, y, z)$ i vremena t .

2.1.1.

Jednačina kontinuiteta

Jednačina kontinuiteta ili jednačina neprekidnosti predstavlja analitički oblik zakona o održanju mase [64]. Ovom jednačinom izražava se neprekidnost fluida, nezavisno od vrste i raspodele sila koje deluju na fluid. Zakon o održanju mase može da se primeni kako na elementarnu masu fluidnog delića dm , tako i na konačnu masu m , odnosno konačnu malu masu Δm .

Prema ovom zakonu, masa fluidnog delića ne menja se za vreme kretanja u neprekidnom strujnom polju, te važi jednačina:

$$dm = \rho dV = \text{const.} \quad (2.1)$$

Pri kretanju se mogu menjati i gustina i zapremina delića, ali njihov proizvod mora ostati nepromenjen. Prethodna konstatacija znači, u matematičkom smislu, da je totalni izvod elementarne mase po vremenu jednak nuli, odnosno da je:

$$\frac{d}{dt}(dm) = \frac{d}{dt}(\rho dV) = \frac{d\rho}{dt} dV + \rho \frac{d}{dt}(dV) = 0. \quad (2.2)$$

U jednačini (2.2) izraz $d\rho/dt$ predstavlja totalni izvod po vremenu gustine $\rho(\mathbf{r}, t)$. Kako je gustina skalarna veličina, onda se ovaj izvod može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho). \quad (2.3)$$

S druge strane, kako je divergencija brzine brojno jednaka višku zapremine fluida koji istekne u jedinici vremena iz jedinice zapremine fluidnog prostora, odnosno:

$$\frac{d(dV)}{dt} = \text{div } \mathbf{v} dV, \quad (2.4)$$

jednačina (2.2) svodi se na jednačinu:

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho) + \rho \text{div } \mathbf{v} \right] dV = 0,$$

odakle je:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho) + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (2.5)$$

Odnosno, ova jednačina može da se napiše u konciznijem obliku ako se spoje poslednja dva člana jednačine (2.5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.6)$$

Jednačine (2.5) i (2.6) predstavljaju različite oblike *jednačine kontinuiteta*, odnosno jednačine neprekidnosti. Jednačina (2.5) ustvari predstavlja jednačinu kontinuiteta u razvijenom obliku.

Najopštiji koncizni oblik jednačine kontinuiteta (2.6) u Dekardovom pravouglom koordinatnom sistemu glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (2.7)$$

Iz prethodnih jednačina (2.5) i (2.6), direktno sledi zaključak da su polja gustine $\rho(\mathbf{r}, t)$ i brzine $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ međusobno povezana, te u neprekidnom strujnom polju funkcije $\rho(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ u svakoj tački strujnog prostora zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta (2.6) i ne mogu da budu proizvoljno zadate.

Pri ustaljenom strujanju fizičke veličine ne zavise eksplicitno od vremena t , te se iz najopštijeg oblika (2.6) u slučaju stacionarnog polja gustine ($d\rho/dt = 0$), dobija jednačina kontinuiteta u specijalnom obliku:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.8)$$

Za slučaj nestišljivog fluida, jednačina kontinuiteta se svodi na odgovarajući specijalni oblik:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.9)$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

gde su sa u, v, w označene komponente vektora brzine u x, y i z pravcu respektivno.

2.1.2.

Jednačina konzervacije impulsa

U tehničkoj praksi se često za rešavanje raznih problema strujanja fluida koristi zakon o promeni količine kretanja, koji se naziva i zakon impulsa [65]. Kako zakon o promeni količine kretanja glasi: *Totalni izvod vektora količine kretanja jednak je zbiru vektora zapreminskih i površinskih sila*, to ovom zakonu odgovara jednačina:

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_A \mathbf{p}_n dA + \int_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (2.11)$$

gde članovi na desnoj strani jednačine (2.11) predstavljaju redom glavni vektor površinskih sila i glavni vektor zapreminskih sila kojima okolni fluid deluje na ukupnu zapreminu V , odnosno na površinu A .

Član na levoj strani jednačine (2.11), predstavlja silu na posmatrani fluidni delić mase ρdV . Zbog jednačine kontinuiteta (2.2), može se totalni izvod vektora količine kretanja za nestišljivi fluid po vremenu transformisati na oblik:

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_V \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \rho dV) = \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV + \int_V \mathbf{v} \frac{D}{Dt} (\rho dV) = \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV. \quad (2.12)$$

Totalni izvod $D\mathbf{v}/Dt$ predstavlja promenu brzine fluidnog delića tokom njegovog kretanja kroz prostor, a ne promenu brzine u fiksiranoj tački. Izraz $D(\cdot)/Dt$ za neku promenljivu f definiše se za male promene x, y, z i t i može se zapisati u obliku:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z. \quad (2.13)$$

Kako se prati promena veličine f prateći fluidni delić, može se napisati:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w, \quad (2.14)$$

tj.

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f, \quad (2.15)$$

gde $\partial f / \partial t$ predstavlja promenu veličine f tokom vremena u određenoj tački u prostoru.

Prvi član na desnoj strani jednačine (2.11) predstavlja vektor površinskih sila koji se primenom Gaussove teoreme prevodi sa površinskog na zapreminski integral:

$$\int_A \mathbf{p}_n dA = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) dV. \quad (2.16)$$

Zamenom prvog člana na desnoj strani jednačine (2.11) izrazom (2.16) i prebacivanjem svih članova ove jednačine na jednu stranu, dobija se jednačina:

$$\int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) dV = 0. \quad (2.17)$$

Budući da je zapremina V potpuno proizvoljna, to prethodni integral predstavlja neodređeni integral. Zato podintegralna funkcija mora da bude jednaka nuli, što dovodi do jednačine:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}, \quad (2.18)$$

koja predstavlja opštu dinamičku jednačinu neprekidne sredine. Ova jednačina izvedena je na osnovu zakona o promeni količine kretanja, pa prema tome važi kako za "njutnovske" tako i za "ne-njutnovske" fluide. Kako za većinu tečnosti i gasova, važi uopšteni Njutnov zakon, to će za dalju transformaciju jednačine (2.18) da se koriste sledeći izrazi za napone, čime definišemo njutnovski fluid:

$$p_{ij} = \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) & \text{pri } j \neq i, \\ -p + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} & \text{pri } j = i. \end{cases} \quad (2.19)$$

U prethodnim izrazima (2.19), μ predstavlja dinamičku viskoznost. Smatrajući da je $\mu = \text{const}$, vršimo transformaciju desne strane jednačine (2.18), koja nakon deljenja sa ρ , dobija sledeći oblik:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}), \quad (2.20)$$

gde je: $\nu = \mu/\rho$ kinematska viskoznost.

Za strujanje nestišljivog fluida važi napred izvedena jednačina kontinuiteta ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), pa jednačina (2.20) prelazi u:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.21)$$

odnosno prema izrazu (2.15) prelazi u jednačinu oblika:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

2.1.3.

Jednačina konzervacije energije

Ako se posmatrana elementarna masa posmatra kao "zatvoren sistem", onda se prvi zakon termodinamike može napisati u obliku:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dA}{dt}, \quad (2.23)$$

gde je: dE/dt ukupna promena energije u jedinici vremena, a dA/dt rad u jedinici vremena.

Mera povećanja energije fluidnog delića data je sledećim izrazom:

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \frac{D\mathbf{v}^2}{Dt} dV + \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV, \quad (2.24)$$

gde e predstavlja specifičnu toplotnu energiju koja se kod nestišljivih fluida može definisati relacijom:

$$e = c_p T, \quad (2.25)$$

gde je sa T označena temperatura, dok je c_p maseni toplotni kapacitet. Pri daljem izvođenju pretpostavlja se da je ova veličina konstantna, iako opšte gledajući ona za fluide zavisi od temperature.

Prvi član izraza (2.24) je promena kinetičke energije fluidnog delića, a drugi predstavlja meru promene unutrašnje energije. Da bismo primenili zakon o održanju energije, izraz (2.24) treba izjednačiti sa dodatnim članovima od strane svih drugih izvora.

Unutrašnja energija se menja usled rada spoljašnjih sila, kao i zbog rada usled površinskih sila pritiska i viskoznih sila.

$$\begin{aligned} & \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \text{sila zemljine teže,} \\ & \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV - \text{elektromagnetna sila,} \\ & \int_A -p \mathbf{v} dA = \int_V -\nabla \cdot p \mathbf{v} dV - \text{površinska sila pritiska,} \\ & \int_A \boldsymbol{\tau}_{ij} \cdot \mathbf{v} dA = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{v} dV - \text{viskozne sile.} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Takođe, energija se fluidnom deliću može dovesti toplotnom kondukcijom fluksom $\mathbf{J}_T$, zračenjem usled fluksa $\mathbf{J}_{rad}$, a kod određenih slučajeva prenosa toplote i mase moguća je i promena energije usled difuzije fluksom $\mathbf{J}_S$. Ovaj se član definiše izrazom:

$$\int_A (\mathbf{J}_T + \mathbf{J}_{rad} + \mathbf{J}_S) dA = \int_A \mathbf{J}_{tot} dA = \int_V \nabla \mathbf{J}_{tot} dV. \quad (2.27)$$

Na kraju, moguće je unutrašnje stvaranje toplotne energije po jedinici mase:

$$\int_V \rho q dV. \quad (2.28)$$

Vraćajući sve pretpostavljene efekte koji utiču na promenu energije u toku vremena, i izjednačavajući ih sa početnim izrazom (2.23), dobija se jednačina u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho c_p T \right) dV &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV - \int_V \nabla \cdot p \mathbf{v} dV + \\ &+ \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \nabla \mathbf{J}_{tot} dV + \int_V \rho q dV. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Kako je $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma$, te korišćenjem Reynoldsove transportne teoreme i Gaussove teoreme, uz činjenicu da prethodna jednačina mora da važi za svaku posmatranu zapreminu $V(t)$, odakle sledi da podintegralna funkcija, ukoliko je neprekidna, mora da bude jednaka nuli, dobijamo jednačinu u obliku:

$$\rho \mathbf{v} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{J}_{tot} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{v} - \rho q = 0. \quad (2.30)$$

Korišćenjem Eulerove jednačine:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (2.31)$$

prethodna jednačina se svodi na oblik:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{J}_{tot} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{v} - \rho q = 0. \quad (2.32)$$

Pošto se u disertaciji ne razmatraju problemi u kojima se uzima u obzir zračenje, zatim promena energije usled difuzije ili unutrašnja produkcija toplote, definiše se član koji opisuje

kondukciju. Na osnovu Fourierovog zakona o toplotnom fluksu, taj član se može zapisati u obliku:

$$\int_A \mathbf{J}_{tot} dA = \int_A k \nabla T dA = \int_V \nabla \cdot (k \nabla T) dV, \quad (2.33)$$

gde k predstavlja toplotnu provodljivost.

Kako u jednačini (2.32) član $(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{v}$ predstavlja disipativnu funkciju Φ , koja predstavlja izvor unutrašnje energije usled deformacionog rada na deliću fluida, u konačnom obliku energijska jednačina može se zapisati:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}, \quad (2.34)$$

gde disipativna funkcija u razvijenom obliku može biti zapisana kao:

$$\begin{aligned} \Phi = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{v} = & \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ & + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Kako znamo na osnovu simetričnosti napona da su $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy}$, odnosno:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

i kako su:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.37)$$

disipativnu funkciju Φ možemo zapisati i u sledećem razvijenom obliku:

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (2.38)$$

2.2.

Osnovne jednačine MHD strujanja

2.2.1.

Maxwellove jednačine

Elektromagnetna polja se opisuju u opštem slučaju sledećim sistemom Maxwellovih integralnih jednačina [66], koje predstavljaju opšte zakone fizike za elektromagnetne pojave:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_A \mathbf{j} dA + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dA, \\ \int_A \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dA, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\int_A \mathbf{B} dA = 0,$$

$$\int_V q dV = \int_A \mathbf{D} dA.$$

Diferencijalna forma Maxwellovih jednačina (2.39), ima oblik:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.40)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q. \quad (2.43)$$

U prethodnim jednačinama (2.40)-(2.43), oznakama $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{j}$ i q , respektivno su označeni: magnetna indukcija, magnetno polje, električno polje, indukovano električno polje, gustina struje i gustina naelektrisanja. Jednačine (2.40) i (2.41), respektivno, predstavljaju Maxwellovu formu Ampereovog i Faradayovog zakona.

Dva konstitutivna zakona povezana su jednačinama (2.40) i (2.43) i daju vezu između električnih i magnetnih veličina. Oni zapravo povezuju vektore $\mathbf{D}$ sa $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ sa $\mathbf{B}$. Ova dva zakona zapisuju se u obliku:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.45)$$

gde ε predstavlja dielektričnu konstantu, a μ_0 magnetnu permeabilnost vakuma, a kako i ostale sredine imaju sličnu vrednost, nadalje će se koristiti ova oznaka. Sada jednačine (2.40)-(2.43), mogu biti zapisane u sledećoj formi:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{j} + \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}, \quad (2.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.48)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = q. \quad (2.49)$$

2.2.2

Princip konzervacije električnog polja

Princip konzervacije električnog polja, što je elektromagnetni ekvivalent principu konzervacije mase, glasi: *Ukupno električno polje Q date količine materije je konstantno.* Stoga parcijalni izvodi ukupnog električnog polja moraju biti jednaki nuli, što se može zapisati kao:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV = 0. \quad (2.50)$$

Da bi integral (2.50) bio jednak nuli, podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.51)$$

2.2.3.

Ohmov zakon

Za izotropni medijum koji miruje, Ohmov zakon se može zapisati u sledećem obliku:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.52)$$

Za neki pokretni medijum, jednačina (2.52) će i dalje važiti samo ako je napisana za referentni sistem koji se kreće sa medijumom. Zadržavajući iste simbole za veličine, ova jednačina se može napisati:

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'. \quad (2.53)$$

Na osnovu Lorentzovih transformacija za gustinu električne struje i električno polje:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - q\mathbf{v}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.55)$$

Ohmov zakon, za referentni sistem koji miruje, ima oblik:

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.56)$$

gde je σ skalar koji predstavlja elektroprovodnost, a $\mathbf{v}$ vektor brzine.

2.2.4.

Jednačina magnetne indukcije

Magnetna hidrodinamika izučava medijume koji su dovoljno provodni da možemo računati da je vreme naelektrisanja mnogo kraće od vremena prenosa elektromagnetnih fenomena. Stoga se može zanemariti promena električne indukcije tokom vremena $\partial \mathbf{D} / \partial t$ u poređenju sa $\mathbf{j}$ i $\nabla \times \mathbf{H}$, kao i promena gustine naelektrisanja tokom vremena $\partial q / \partial t$ kada se poredi sa gustinom struje $\mathbf{j}$. Stoga, jednačina (2.49) postaje nezavisna od ostalih jednačina, te je samim tim korisna samo za izračunavanje gustine naelektrisanja q . Pored toga, a u kontekstu MHD strujanja, može da se pretpostavi da je provođenje naelektrisanja $q\mathbf{v}$ zanemarljivo ($q\mathbf{v} \approx 0$) kada se poredi sa provođenjem proporcionalnim sa elektroprovodnošću σ i da se dielektrična konstanta ε i magnetna permeabilnost μ mogu smatrati konstantama i jednakim sa onima u vakuumu. Sa ovim pretpostavkama osnovne jednačine elektromagnetnih fenomena za MHD strujanja postaju:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (2.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.61)$$

Kako je μ_0 konstantno, u skladu sa jednačinom (2.57) divergencija gustine struje $\mathbf{j}$ je nula, te jednačina (2.60) postaje suvišna. Koristeći jednačinu (2.61) sistem jednačina postaje:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.64)$$

Novi sistem se sastoji od sedam jednačina a šest nepoznatih. Da bi se uklonila dvoznačnost, obično se uzima na osnovu Ohmov zakona:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.65)$$

Sada, pretpostavljajući da je elektro provodnost konstanta, što je česta pretpostavka kod MHD strujanja, kao i uz pomoć Faradayovog zakona (2.63), dobijamo:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right), \quad (2.66)$$

što se može zapisati i u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.67)$$

gde je $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ koeficijent magnetne difuzije, a μ_0 je permeabilnost vakuma dok σ predstavlja elektroprovodnost. Kada se jednačine (2.64) i (2.67) reše za magnetno polje $\mathbf{B}$, električno polje može se odrediti iz sledeće jednačine:

$$\mathbf{E} = \eta (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.68)$$

a gustina struje $\mathbf{j}$ se može odrediti iz jednačine (2.61).

Jednačina (2.67) je dobro poznata forma jednačine magnetne indukcije [66]. Ona se sastoji od sledećih članova: difuzivnog člana drugog reda, konvektivnog člana prvog reda i hiberboličkog diferencijalnog člana prvog reda. Jednačina magnetne indukcije daje prednost direktnog povezivanja glavne hidrodinamičke veličine, polja brzine, sa glavnom

elektromagnetnom veličinom, magnetnom indukcijom. Zaista, ako se divergencija jednačine (2.64) uzme deo po deo, dobija se sledeći uslov za divergenciju $\mathbf{B}$:

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0. \quad (2.69)$$

Jednačina (2.69) ukazuje da divergencija $\mathbf{B}$ ostaje konstantna tokom vremena i stoga je nula ako je u početku bila nula. Međutim, dobro je poznato, da uopšteno, stvaranje takvog inicijalnog polja bez divergencije nije lak zadatak. Štaviše, iako je lokalna konzervacija magnetnog polja uključena u jednačinu (2.67), ova karakteristika možda ne važi tačno za diskretno razvijenu verziju za numeričko rešenje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tako se rezultujući sistem jednačina mora sastojati od obe jednačine (2.64) i (2.67).

2.2.5.

Navier-Stokesove jednačine MHD strujanja

Vratimo se na napred izvedenu jednačinu kontinuiteta za nestišljiv fluid (2.9):

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2.70)$$

kao i jednačinu konzervacije impulasa:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.71)$$

u kojoj su: p , ρ , ν i $\mathbf{f}$, pritisak, gustina, kinematska viskoznost i vektor zapreminskih sila, respektivno. Za MHD strujanja, vektor zapremiskih sila je $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ i predstavlja Lorentzovu silu koja nastaje usled interakcije između gustine struje i magnetnog polja. Zamenjujući gustinu struje izrazom (2.57) dobijamo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.72)$$

Zapreminska sila $\mathbf{f}$ se takođe može napisati i u sledećem obliku:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (2.73)$$

Fizičko tumačenje ovog zapisa je očigledno. Lorentzova sila je razložena na prvi član koji predstavlja nerotirajući gradijent i drugi član koji predstavlja rotaciju. Nerotirajući gradijent $-\nabla(\mathbf{B}^2/\mu_0)$ predstavlja magnetni pritisak, dok drugi član $(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{B}/\mu_0)$ predstavlja silu koja generiše kretanje unutar tečnosti.

2.2.6.

Sprezanje MHD jednačina

Jednačina magnetne indukcije (2.67) i konzervacije magnetnog polja (2.64), zajedno sa transformisanom Navier-Stokesovom jednačinom (2.72) i jednačinom kontinuiteta (2.70), predstavljaju osnovne jednačine koje rešavanjem opisuju fenomen MHD strujanja. Ove jednačine su potpuno spregnute, jer postoji dvosmerna veza između strujanja fluida i elektromagnetnog polja. Sa jedne strane, uticaj magnetnog polja na polje brzine dat je kroz izraz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ koji se dodaje uobičajenim Navier-Stokesovim jednačinama. Dok s druge strane, uticaj polja brzine na magnetno polje postoji u izrazu $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ u jednačini magnetne indukcije, koji se izvorno pojavljuje u Ohmovom zakonu kao $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Da bi se procenio relativni uticaj faktora preko kojih se vrši sprezanje jednačina, jednačine (2.65) i (2.70) moraju da se svedu na odgovarajući bezdimenzioni oblik. Svođenje jednačina na bezdimenzioni oblik urađeno je u sledećim poglavljima disertacije, u skladu sa razmatranim problemima.

2.3.

Jednačine MHD strujanja mikropolarnih fluida

2.3.1.

Jednačina konzervacije ugaonog impulsa

U ovom odeljku predstavljen je zakon o održanju ugaonog impulsa nezavisno za fluide koji se razmatraju u klasičnoj hidrodinamici, koje zovemo *obični fluide*, kao i za *polarne fluide* [67].

Slučaj običnih fluida

Posmatrajući oblik jednačine za održanje linearnog impulsa:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dx = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} dx + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{p}_n dA, \quad (2.74)$$

i podsećajući se na definiciju ugaonog impulsa u mehanici materijalne tačke ili čvrstih delića, čini se prirodno da se prepostavi sledeći oblik *zakona o održanju ugaonog impulsa*:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dx + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n dA. \quad (2.75)$$

Ovaj zakon o održanju ugaonog impulsa važi ako pretpostavimo da svi momenti potiču od makroskopskih sila. Ovo je slučaj u mnogim običnim fluidima, ali fluid sa jakim polarnim karakterom, može da prenosi moment napona i biti podvrgnut zapreminskim momentima. Takav fluid zovemo polarnim.

U klasičnoj hidrodinamici tenzor napona je simetričan i zakon o održanju ugaonog impulsa je definisan jednačinom (2.75). Kao posledica, u klasičnoj hidrodinamici zakon o održanju ugaonog impulsa može se izvesti iz zakona o održanju mase i zakonu o održanju linearnog impulsa, te kao takav ne dodaje ništa opisu tečnosti.

Slučaj polarnih fluida

U slučaju polarnih fluida moramo uvesti zapreminski moment po jedinici mase $\mathbf{g}$ kao dodatak zapreminskoj sili $\mathbf{f}$ i tangencijalni (spregnuti) napon $\mathbf{c}_n$ kao dodatak normalnom naponu $\mathbf{p}_n$. Za ugaoni impuls se smatra da se sastoji iz dva dela: momenta linearnog impulsa $\rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v})$, takođe nazvanog spoljašnji ugaoni impuls, te unutrašnjeg ugaonog impulsa $\rho \mathbf{l}$.

Onda je bilans ukupnog ugaonog impulsa:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{g} + \mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{c}_n + \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n) dA. \quad (2.76)$$

Kako je prema Greenovoj teoremi:

$$\int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n dA = \int_{\Omega(t)} (\mathbf{x} \times (\nabla \mathbf{p}) + \mathbf{p}_x) d\mathbf{x}, \quad (2.77)$$

gde je $\nabla \mathbf{p}$ drugi zapis za $\text{div} \mathbf{p}$, i $\mathbf{p}_x$ je vektor $\epsilon_{ijk} \mathbf{p}_{jk}$ (ϵ_{ijk} je alternativni tenzor Livi-Kavita), a pri čemu $\mathbf{c}_n$ može biti izraženo u formi $\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}$, gde je $\mathbf{C}$ tenzor koji se zove *tenzor spregnutih (tangencijalnih) napona*, pa iz jednačine (2.76) dobijamo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} [\rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{p}_x] d\mathbf{x}. \quad (2.78)$$

Ovo je jednačina za totalni ugaoni impuls, koja se može napisati:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{p}_x. \quad (2.79)$$

Iz vektorskog proizvoda za $\mathbf{x}$ i Cauchyve jednačine imamo:

$$\rho \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{p}). \quad (2.80)$$

Oduzimanjem prethodne dve jednačine, dobijamo da je:

$$\rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{p}_x. \quad (2.81)$$

Iz (2.79), (2.80) i relacije:

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{p}_x, \quad (2.82)$$

zaključujemo da je:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) - \mathbf{p}_x, \quad (2.83)$$

i

$$\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p} + \mathbf{C}). \quad (2.84)$$

Jednačina (2.84) je zakon o održanju (totalnog) ugaonog impulsa u diferencijalnoj formi.

Pretpostavljamo da se unutrašnji ugaoni impuls po jedinici mase može napisati kao vektor sa komponentama $\mathbf{l}_i$ ($i=1,2,3$), gde je $\mathbf{l}_i = \mathbf{I}_{ik} \boldsymbol{\omega}_k$. U narednim poglavljima razmatraćemo izotropne fluide, tj. one kod kojih je:

$$\mathbf{I}_{ik} = I \delta_{ik}, \quad (2.85)$$

gde je I skalar koji se zove *koeficijent mikroinercije*. Za izotropne polarne fluide jednačina (2.83) redukuje se na:

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{p}_x. \quad (2.86)$$

Da bi smo dobili model mikropolarnog fluida moramo definisati tenzor napona $\mathbf{p}$ i tenzor spregnutih napona $\mathbf{C}$. Definišemo *mikropolarni fluid* kao polarni, izotropni fluid sa tenzorom napona $\mathbf{p}$ i tenzorom spregnutih napona $\mathbf{C}$ u obliku:

$$p_{ij} = (-p + \varepsilon v_{k,k}) \delta_{i,j} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) + \lambda (v_{j,i} - v_{i,j}) - 2\lambda \epsilon_{ijk} \omega_k, \quad (2.87)$$

i

$$C_{i,j} = \gamma \omega_{k,k} \delta_{ij} + \beta (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) + \alpha (\omega_{j,i} - \omega_{i,j}). \quad (2.88)$$

Simetrični deo tenzora p u (2.87) je:

$$p_{ij}^{(s)} = (-p + \lambda v_{k,k}) \delta_{i,j} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (2.89)$$

što predstavlja tenzor napona u klasičnoj hidrodinamici, gde su ε i μ uobičajni koeficijenti viskoznosti (*drugi koeficijent viskoznosti i dinamička njutnovska viskoznost*, respektivno).

Pozitivna konstanta λ u (2.87) predstavlja *dinamičku viskoznost mikrorotacije*. U (2.88) α, β, γ su konstante koje se zovu *dopunski koeficijenti viskoznosti mikrorotacije*.

Zamenom tenzora $\mathbf{p}$ i $\mathbf{C}$ iz (2.87) i (2.88) u napred izvedenu jednačinu konzervacije impulsa, zatim jednačinu konzervacije energije i jednačinu konzervacije ugaonog impulsa, dobiće se sistem jednačina koji zajedno sa jednačinom kontinuiteta i Maxwellovim jednačinama, odnosno jednačinom magnetne indukcije, služi za opisivanje MHD strujanja mikropolarnih fluida.

2.3.2.

Sistem jednačina MHD strujanja mikropolarnih fluida

– *Jednačina kontinuiteta:*

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.90)$$

Kako će se u radu razmarati stacionarna strujanja i kako se mikropolarni fluidi smatraju nestišljivim, jednačina kontinuteta će se koristiti u sledećem obliku:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.91)$$

– *Jednačina konzervacije impulsa:*

Napred izvedena jednačina konzervacije impulsa (2.21) u obliku:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.92)$$

za slučaj mikroparnih fluida, proširuje se na sledeću jednačinu:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mu \Delta \mathbf{v} + (\varepsilon + \mu - \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \Delta \mathbf{v} + 2\lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.93)$$

Poslednja tri člana na desnoj strani jednačine (2.93), posledica su izmenjenog tenzora napona koji je napred definisan.

– *Jednačina konzervacije ugaonog impulsa:*

Nakon definisanja tenzora napona, jednačina konzervacije ugaonog impulsa (2.86), dobija sledeći zapis:

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 2\lambda (\operatorname{rot} \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + (\gamma + \beta - \alpha) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + (\alpha + \beta) \Delta \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.94)$$

– *Jednačina konzervacije energije:*

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (2.95)$$

gde je za mikroparni fluid funkcija disipacije Φ definisana:

$$\begin{aligned} \Phi = & \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + 4\lambda \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right)^2 + \gamma (\operatorname{div} \boldsymbol{\omega})^2 + \\ & + (\alpha + \beta) \nabla \boldsymbol{\omega} : \nabla \boldsymbol{\omega} + (\beta - \alpha) \nabla \boldsymbol{\omega} : (\nabla \boldsymbol{\omega})^T, \end{aligned} \quad (2.96)$$

U prethodnoj jednačini (2.96) $\mathbf{D}$ predstavlja tenzor deformacije:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i}). \quad (2.97)$$

– *Jednačina magnetne indukcije:*

Ukoliko se tokom strujnja mikropalnog fluida ne zanemaruje uticaj indukovanog magnetnog polja, neophodno je uz prethodne jednačine uključiti i jednačinu za magnetu indukciju. Jednačina magnetne indukcije izvedena je već napred (2.67) i ovde samo ponovljena u istoj formi:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.98)$$

- III poglavlje -

3. MHD strujanje mikropolarnog fluida

3.1.

MHD strujanja - mikroplarni fluidi

Počev od sredine prošlog veka, veliki broj istraživača je pokazao interesovanje za magnetno-hidrodinamička (MHD) strujanja elektro provodnih fluida. Razlog se krije pre svega u sve većoj primeni ovih strujanja kako u naučne svrhe, tako i u tehnološkom razvoju. Dejstvo spoljašnjeg magnetnog polja, ali i električnog, javlja se kod nuklearnih reaktora, zatim kod magnetnih merača protoka, ali i kod MHD generatora i pumpi. Zahtevi savremene tehnologije stimulisali su interesovanje za proučavanje strujanja fluida koja uključuju međusobnu interakciju nekoliko fenomena. Jedno od strujanja koje privlači sve više pažnje poslednjih decenija je strujanje mikroplarnog fluida u prisustvu magnetnog i električnog polja.

Istraživanje strujanja i prenosa toplote elektroprovodnih viskoznih fluida između dve beskonačne neprovodne ploče razmatrano je od strane velikog broja naučnika. MHD uređaji za tečne metale privukli su interesovanje za dalje unapređenje metalurgije [68]. Pokazalo se da efekat magnetnog polja može biti od velike pomoći u modernizaciji tehnoloških procesa . Sve veće interesovanje za proučavanje MHD fenomena javio se i kod razvoja fuzionih reaktora gde je plazma ograničena snažnim magnetnim poljem [69]. Mnoge uzbudljive inovacije su postavljene u oblastima MHD propulzije [70], kao i MHD kontrole protoka i prenosa toplote u graničnom sloju [71, 72].

Međutim sva napred navedena istraživanja vezana su za klasu njutnovskih fluida. Istraživanje ne-njutnovskih fluida sa mikrostrukturom, počinje nakon što je Eringen [4] definisao koncept mikropolarnog fluida (1966). Već je napred definisan pojam mikropolarnog fluida, kao fluida koji sadrže čvrste, nasumično orjentisane deliće rastvorene u viskoznoj tečnosti, pri čemu

se ignoriše deformacija tih delića, a ti delići imaju mogućnost rotacije. Može se primetiti da mikropolarni fluidi vode računa o mikrorotaciji čestica fluida pomoću nezavisnog kinematičkog vektora koji se zove vektor mikrorotacije. Da bi smo opisali strujanje ovih fluida, klasičan sistem Navier-Stokseovih jednačina mora biti proširen, što je detaljno izvedeno u prethodnom poglavlju.

Istraživanje strujanja mikropolarnih fluida značajno se proširilo tokom proteklih decenija usled pojavljivanja ovih fluida u industrijskim i magnetno-biološkim procesima. Ova strujanja uzimaju u obzir efekat koji proističe iz lokalne strukture i kretanja mikro čestica fluida. MHD prenos toplote mikropolarne tečnosti može se podeliti na dva dela. Jedan koncept sadrži probleme u kojima je grejanje nusprodukt elektromagnetnih polja kao kod MHD generatora itd, a drugi se sastoji od problema u kojima je primarna upotreba elektromagnetnih polja za kontrolu prenosa toplote [73].

Prenos toplote pri strujanju mikropolnih fluida u prisustvu magnetnog polja privukao je značajnu pažnju poslednjih godina zbog značajnih primena u savremenoj tehnologiji. Ove primene mikropolarnih fluida vezane su za strujanje tečnih kristala [74], protok krvi u plućima ili arterijama [75], kao i za strujanje i termičku kontrolu pri obradi ili nastajanju polimera [76].

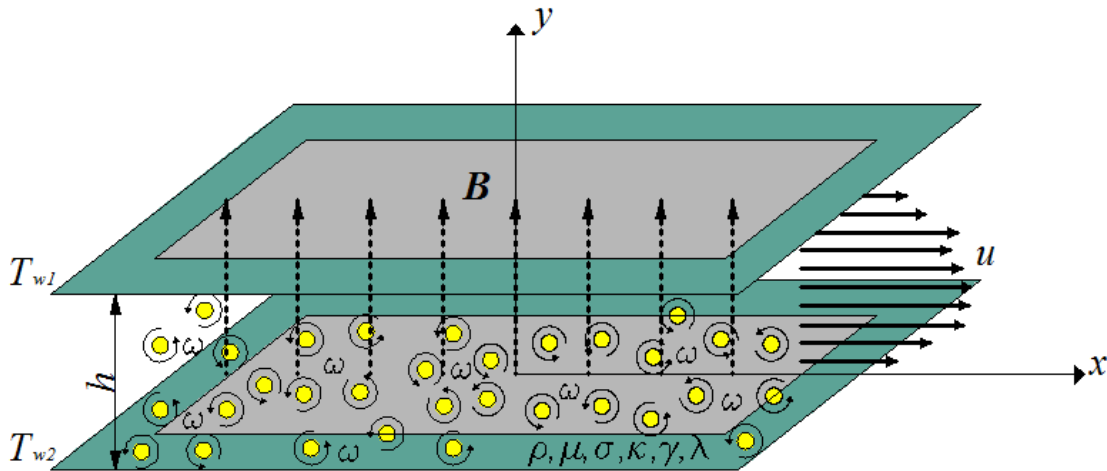
Tačna rešenja za MHD strujanja dostupna su samo za jednostavne geometrije strujnog prostora i određene granične uslove. Tako je opšte poznato da su do sada izučavani uobičajni strujni domeni poput pravougaonog ili kružnog kanala, te elipsasti i kružni isecci itd. Problemi razmatrani u ovoj disertaciji vezani su strujanje mikropolarnih fluida između dve ploče, kao i u pravougaonim kanalima.

3.2.

Fizički i matematički model razmatranog problema

Prvi razmatrani problem u okviru disertacije predstavlja problem MHD laminarnog strujanja i prenosa toplote nestišljivog elektroprovodnog mikropolarnog fluida između dve paralelne ploče.

Potpuno razvijeno strujanje se odvija između paralelnih ploča koje se nalaze na rastojanju h kao što je prikazano na slici 3. Fizički model predstavljen na slici 3.1. sastoji se od dve beskonačne ploče koje se protežu u pravcima x i z . Elektroprovodan mikropolaran fluid struji između ploča usled konstantne razlike pritiska i kako razmatramo potpuno razvijeno strujanje, može se uzeti da brzina ima samo komponentu u pravcu strujanja $\mathbf{v} = u\vec{i}$. Fluid i ploče između kojih struji mikropolaran fluid izložene su dejstvu spoljašnjeg magnetnog polja intenziteta B . Kod strujanja elektroprovodnih fluida u kanalima, zidovi kanala na koje magnetno polje deluje normalno nazivaju se Hartmannovim zidovima, dok se druga dva zida, kod kanala konačnih dimenzija, paralelna dejstvu magnetnog polja, nazivaju bočnim zidovima. Pri strujanju fluida između ploča, gornja i donja ploča se održavaju na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2} , respektivno, pri čemu treba voditi računa da je $T_{w1} > T_{w2}$.



Slika 3. Fizički model razmatranog problema

Usled strujanja elektroprovodnog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, dolazi do indukcije električnog polja intenziteta $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, koje izaziva generisanje struje $\mathbf{j}$. Komponente struje koje su upravne na linije magnetnog polja indukuju Lorentzovu silu $\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Lorentzova sila deluje u suprotnom smeru od smera strujanja fluida i teži da uspori strujanje. Kako intenzitet struje zavisi od brzine, tako i Lorentzova sila linearno zavisi od brzine u . Shodno prethodnom, te znajući da je intenzitet brzine najveći u sredini kanala, Lorentzova sila izaziva veće kočenje fluida u tom središnjem delu i izjednačava polje brzine, pa se uspostavlja ravnoteža između ove sile i sile usled razlike pritiska. Lorentzova sila stoga doprinosi dopunskom padu pritiska pored

viskozno pada pritiska kod hidrodinamičkog strujanja. Kod magnetih polja velikog inteziteta elektromagnetni pad pritiska može za red veličine da prevaziđe viskozni pad pritiska.

Kako je elektroprovodni fluid izložen dejstvu spoljašnjeg magnetnog polja koje je upravno na pravac strujanja i na ploče, tj. u pravcu y ose, dolazi do indukovanja unutrašnjeg magnetnog polja intenziteta $B_x(y)$ u pravcu strujanja, tj. u pravcu x ose, te stoga vektor magnetnog polja možemo napisati u sledećem obliku:

$$\mathbf{B} = B_x(y)\vec{i} + B\vec{j}. \quad (3.1)$$

Međutim, kako će se kod posmatranog problema indukovano polje smatra zanemarljivim, vektor magnetnog polja ima sledeći oblik:

$$\mathbf{B} = B\vec{j}. \quad (3.2)$$

Bezindukcijska aproksimacija podrazumeva da je Reynoldsov magnetni broj mnogo manji od jedinice. Zapravo, zavisno od vrednosti Reynoldsovog magnetnog broja koriste se sledeće dve jednačine za određivanje gustine struje. U slučaju bezindukcijske aproksimacije, tj. kad je Reynoldsov broj daleko manji od jedinice, koristimo jednačinu:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.3)$$

dok u slučaju kada ne zanemarujemo indukovano magnetno polje u pravcu strujanja, što se dešava u slučajevima kada elektroprovodni fluid struji velikom brzinom ili kada je elektroprovodnost fluida velika, koristimo jednačinu:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Kako smo definisali vektor magnetnog polja izrazom (3.2), te pošto znamo da je Lorentzova sila vektorski proizvod gustine struje i magnetnog polja $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ možemo definisati član za Lorentzovu silu koji će se naći u razvijenim Navier-Stokesovim jednačinama za pravac strujanja.

Pre toga, u izrazu (3.3) treba zanemariti električno polje, jer se u razmatranom problemu ne uzima obzir, pa izraz postaje:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.5)$$

a za već definisane vektore brzine i magnetnog polja posmatranog problema, dobijamo:

$$\mathbf{j} = \sigma u B \vec{k}. \quad (3.6)$$

Konačno, član koji definiše Lorentzovu silu dobija se u sledećem obliku:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\sigma B^2 u \vec{i}. \quad (3.7)$$

Jednačina konzervacije impulsa izvedena u drugom poglavlju disertacije glasi:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mu \Delta \mathbf{v} + (\varepsilon + \mu - \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \Delta \mathbf{v} + 2\lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.8)$$

Kako je razmatrani problem strujanja stacionaran ($\partial(\cdot)/\partial t = 0$), zatim uzimajući u obzir bezindukcijsku aproksimaciju (3.7) i jednačinu kontinuiteta za nestišljivi fluid $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ i razvijajući jednačinu konzervacije impulsa za pravac strujanja, tj. x osu, dobijamo sledeću jednačinu:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} - \sigma B^2 u - \frac{dp}{dx} = 0. \quad (3.9)$$

Shodno osnovnoj karakteristici mikropolarnih fluida, da uzima u obzir mikrorotaciju strukturnih elemenata fluida, neophodno je jednačinu konzervacije ugaonog impulsa primeniti na razmatrani oblik. Opšta jednačina konzervacije ugaonog impulsa ima sledeći oblik:

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 2\lambda (\operatorname{rot} \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + (\gamma + \beta - \alpha) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + (\alpha + \beta) \Delta \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{g}, \quad (3.10)$$

dok jednačina konzervacije ugaonog impulsa za razmatrani problem dobija oblik:

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du}{dy} - 2\lambda \omega = 0. \quad (3.11)$$

U teoriji mikropolarnih fluida, dopunske viskoznosti λ i γ vrlo često se obeležavaju drugim oznakama, međutim obeležavanje u ovoj doktorskoj disertaciji urađeno pre svega na osnovu trenda istraživanja mikropolarnih fluida i odgovarajuće nomenklature koja se koristi u tim istraživanjima [77, 78]. Takođe, može se primetiti da su dopunske viskoznosti α i β zanemarene u razvijenoj jednačini (3.11). Novija istraživanja pokazala su da je za opisivanje karakteristika strujanja većeg broja mikropolarnih fluida dovoljno uzeti u obzir dopunske viskoznosti λ i γ . Više različitih autora [79, 80, 81] je prilikom razmatranja strujanja mikropolarnih fluida uzimao u obzir samo pomenute dve dopunske viskoznosti.

Da bi smo u potpunosti definisali matematički model razmatranog problema, pređimo sada na jednačinu konzervacije energije datu sledećim izrazom, a izvedenu u drugom poglavlju ove disertacije:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (3.12)$$

Uzimajući u obzir već napred navedene karakteristike razmatranog problema, kao i funkciju disipacije Φ , definisanu za mikropolarani fluid izrazom (93) u poglavlju II, energijska jednačina razvijena za pravac strujanja, dobija sledeći oblik:

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \sigma B^2 u^2 = 0. \quad (3.13)$$

Sada sistem jednačina koji opisuje MHD strujanje mikropolarnog fluida između dve paralelne ploče, dobija konačan oblik dat sledećim sistemom jednačina:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} - \sigma B^2 u - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (3.14)$$

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du}{dy} - 2\lambda \omega = 0, \quad (3.15)$$

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \sigma B^2 u^2 = 0. \quad (3.16)$$

Iz priloženog sistema jednačina, vidi se da su jednačine (3.14) i (3.15) spregnute, tj. da ih nije moguće rešavati zasebno.

Da bi smo prethodni sistem jednačina rešili, prvo moramo preći na bezdimenzioni oblik tih jednačina za šta je neophodno uvesti karakteristične bezdimenzione veličine, na osnovu kojih ćemo analizirati karakteristike strujanja mikropolarnog fluida.

Uvedimo prvo bezdimenzionu brzinu i bezdimenzionu poprečnu koordinatu:

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad (3.17)$$

gde u izrazu za bezdimenzionu brzinu u^* , U predstavlja referentnu brzinu, koja se definiše na sledeći način:

$$U = \frac{h^2 P}{\mu}, \quad (3.18)$$

pri čemu P predstavlja:

$$P = -\frac{dp}{dx} = \text{const.}$$

Na isti način, bezdimenziona mikrorotacija definisana je izrazom:

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (3.19)$$

gde je:

$$\omega_0 = \frac{U}{h}.$$

Dalje se redom definišu Hartmannov, Prandtlov i Eckertov broj:

$$Ha = Bh \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad Ec = \frac{U^2}{c_p (T_1 - T_2)}. \quad (3.20)$$

Napred uvedeni karakteristični parametri, uobičajno se koriste prilikom analize MHD strujanja. Pored toga, svi navedeni simboli su dobro poznati u teoriji koja se bavi opisivanjem strujanja i prenosa toplote kako njutnovskih, tako i ne-njutnovskih fluida. Međutim, kod mikropolarnih fluida neophodno je uvesti dva nova parametra koji uzimaju uticaj dopunskih viskoznosti na karakteristike strujanja mikropolarnih fluida. Ovi parametri definisani su sledećim izrazima:

$$K = \frac{\lambda}{\mu}, \Gamma = \frac{\gamma}{\mu h^2}. \quad (3.21)$$

Kako je teorija mikropolarnih fluida relativno nova po pitanju izučavanja u našoj naučnoj zajednici, tako ne postoje uobičajni prevodi naziva ovih parametara na našem jeziku. Stoga će u disertaciji nazivi parametara na engleskom jeziku, biti "slobodno" prevedeni na srpski jezik. Parametar K ili "coupling parameter", predstavlja parametar koji daje odnos napred uvedene dopunske viskoznosti λ , koja karakteriše mikropolarne fluide i dinamičke viskoznosti μ . S obzirom na to da ovaj parametar daje spregu između pomenutih viskoznosti, a donekle i direktnim prevođenjem njegovog uobičajnog naziva sa engleskog jezika, prikladno je ovaj parametar zvati parametrom sprežanja. Drugi parametar, parametar Γ ili "spin-gradient viscosity parameter", predstavlja odnos dopunske viskoznosti γ u zavisnosti od dinamičke viskoznosti μ , ali i kvadrata širine kanala h . Kako je iz jednačine konverzacije ugaonog impulsa, ovaj član direktno vezan za vektor mikrorotacije, te samim tim definiše dopunsku viskoznost kod mikropolarnih fluida kao posledicu mikrorotacije elementarnih čestica u mikropolarnom fluidu, adekvatan naziv ovog parametra bi bio parametar viskoznosti mikrorotacije.

Na kraju, neophodno je uvesti i bezdimenzionu temperturu koja je data izrazom:

$$\theta = \frac{T - T_{w2}}{T_{w1} - T_{w2}}. \quad (3.22)$$

Nakon uvedenih bezdimenzionih veličina, sistem jednačina (3.14) - (3.16) prelazi u odgovarajuću bezdimenzionu formu:

$$(1 + K) \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + K \frac{d\omega^*}{dy^*} - Ha^2 u^* + 1 = 0, \quad (3.23)$$

$$\Gamma \frac{d^2 \omega^*}{dy^{*2}} - K \frac{du^*}{dy^*} - 2K\omega^* = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} + (1+K) \text{Pr} \text{Ec} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 + \text{Ec} \text{Pr} \text{Ha}^2 u^{*2} = 0. \quad (3.25)$$

Da bi smo prethodni sistem jednačina (3.23) - (3.25) rešili, neophodno je da uvedemo odgovarajuće granične uslove. Na osnovu napred definisanog razmatranog problema, prvi uslov je uslov klizanja, tj. da na pločama ne postoji klizanje mikropolarnog fluida, te stoga važi da je brzina ista kao i brzina ploča:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{za} \quad y = 0, \\ u &= 0 \quad \text{za} \quad y = h. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Slično prethodnom uslovu, granični uslov za mikrorotaciju biće:

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \quad \text{za} \quad y = 0, \\ \omega &= 0 \quad \text{za} \quad y = h, \end{aligned} \quad (3.27)$$

tj. pretpostavka je da na pločama ne postoji mikrorotacija.

Što se tiče graničnih uslova za temperaturu, pretpostavljeno je da se radi o izotermalnim uslovima na osnovu kojih važi:

$$\begin{aligned} T &= T_{w2} \quad \text{za} \quad y = 0, \\ T &= T_{w1} \quad \text{za} \quad y = h. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ovako definisane granične uslove, takođe treba dati u bezdimenzionom obliku. Bezdimenzioni oblik napred definisanih graničnih uslova je:

$$\begin{aligned} u^* &= 0, \omega^* = 0, \theta = 0, \quad \text{za} \quad y^* = 0, \\ u^* &= 0, \omega^* = 0, \theta = 1, \quad \text{za} \quad y^* = 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nakon definisanja bezdimenzionih graničnih uslova, možemo se vratiti na sistem jednačina koje opisuju problem, a date su u bezdimenzionom obliku, (3.23) - (3.25). Iz datog

sistema, može se lako uočiti da su jednačine (3.23) i (3.24) spregnute, tj. da ih ne možemo rešavati pojedinačno. Prvi korak je da jednačinu (3.23) diferenciramo po y kako bi smo povisili red diferencijalne jednačine, a da zatim u tako dobijenu jednačinu zamenimo drugi izvod vektora mikrorotacije iz jednačine (3.24). Nakon ovih matematičkih operacija, dobija se diferencijalna jednačina četvrtog reda, data u obliku:

$$\frac{d^4 u^*}{dy^{*4}} - a \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + bu^* - d = 0, \quad (3.30)$$

gde su a, b, d novouvedene konstante date izrazima:

$$a = B^* + E - AD^*, \quad b = EB^*, \quad d = EC, \quad (3.31)$$

dok su:

$$A = \frac{K}{1+K}, \quad B^* = \frac{Ha^2}{1+K}, \quad C = \frac{1}{1+K}, \quad D^* = \frac{K}{\Gamma}, \quad E = \frac{2K}{\Gamma}. \quad (3.32)$$

Rešavanje diferencijalnih jednačina svakako ima svoje poteškoće. Prilikom rešavanja jednačine (3.30) i diskusije rešenja, javlja se potreba za rešavanje tri različita slučaja jednačine zavisno od korena karakteristične jednačine.

Odgovarajuće partikularno rešenje jednačine (3.30) ima oblik:

$$u_p = \frac{d}{b} = \frac{EC}{EB^*} = \frac{C}{B^*}, \quad (3.33)$$

dok je karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine data u obliku:

$$\delta^4 - a\delta^2 + b = 0, \quad (3.34)$$

odnosno:

$$za \quad \delta^2 = r \rightarrow r^2 - ar + b = 0. \quad (3.35)$$

Koreni karakteristične jednačine (3.35) su:

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b} \right). \quad (3.36)$$

Zavisno od toga da li je vrednost korena $\sqrt{a^2 - 4b}$, veća, manja ili jednaka nuli, karakteristična jednačina, odnosno i jednačina (3.30), dobija tri moguća rešenja. Pri analizi datog korena, a kako konstante a i b zavise od karakterističnih parametara Ha , K i Γ , ustanovljeno je da za različite mikropolarne fluide ovaj koren može zadovoljiti sva tri uslova, tj. biti veći, manji ili jednak nuli. Ovo je ukratko i dato sledećom analizom:

$$a = B^* + E - AD^* = \frac{Ha^2}{1+K} + \frac{2K}{\Gamma} - \frac{K}{1+K} \frac{K}{\Gamma},$$

$$a = \frac{Ha^2}{1+K} + \frac{K}{\Gamma} \left(\frac{2+K}{1+K} \right) > 0, \quad b = EB^* = \frac{2K}{\Gamma} \frac{Ha^2}{1+K} > 0, \quad (3.37)$$

$$a^2 - 4b = (B^* + E - AD^*)^2 - 4(EB^*) =$$

$$= \frac{Ha^4 \Gamma^2 + 4K^2 (1+K)^2 + K^4 - 2Ha^2 K^2 \Gamma - 2K^4 - 2K^3 - 2KHa^2 + 2K^2 Ha^2}{(1+K)^2 \Gamma^2}.$$

Imenilac u poslednjem izrazu je uvek pozitivan, međutim brojilac može imati pozitivnu ili negativnu vrednost, a biti i nula. Stoga, kako bi smo ovim matematičkim modelom opisali sve mikropolarne fluide, neophodno je uzeti u obzir sva tri moguća rešenja jednačine (3.30), što već komplikovani matematički model još dodatno usložnjava.

Na osnovu prethodne analize tri moguća rešenja jednačine (3.30) data su sledećim izrazima:

– za slučaj kada je: $a^2 - 4b > 0$

$$u^* = C_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \exp(\delta_4 y^*) + \frac{d}{b}, \quad (3.38)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b = 0$

$$u^* = (C_5 + C_6 y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (C_7 + C_8 y^*) \exp(\xi_2 y^*) + \frac{d}{b}, \quad (3.39)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b < 0$

$$\begin{aligned} u^* = & [C_9 \cos(\beta_1 y^*) + C_{10} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + [C_{11} \cos(\beta_1 y^*) + C_{12} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + \frac{d}{b}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Na osnovu rešenja dobijenih za polje brzine, a koja su data izrazima (3.38) - (3.40), sada je moguće naći odgovarajuća rešenja za mikrorotaciju i polje temperature iz jednačina (3.24) i (3.25), respektivno. Rešenja za mikrorotaciju, a respektivno od rešenja za polje brzine, data su sledećim izrazima:

$$\omega^* = C_1 \mathcal{D}_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \mathcal{D}_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \mathcal{D}_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \mathcal{D}_4 \exp(\delta_4 y^*), \quad (3.41)$$

$$\omega^* = (E_{13} + E_{14} y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (E_{15} + E_{16} y^*) \exp(\xi_2 y^*), \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \omega^* = & [P_3^* \sin(\beta_1 y^*) + P_4^* \cos(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + [P_5^* \sin(\beta_1 y^*) + P_6^* \cos(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Poput dobijenih rešenja za mikrorotaciju, rešenja za polje temperature respektivno rešenjima za brzinu i mikrorotaciju su:

$$\begin{aligned}
\theta = -\Pr Ec & \left[\frac{1}{4\delta_1^2} {}^1C \exp(2\delta_1 y^*) + \frac{1}{4\delta_2^2} {}^2C \exp(2\delta_2 y^*) + \frac{1}{4\delta_3^2} {}^3C \exp(2\delta_3 y^*) + \right. \\
& + \frac{1}{4\delta_4^2} {}^4C \exp(2\delta_4 y^*) + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \exp((\delta_1 + \delta_3) y^*) + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \exp((\delta_1 + \delta_4) y^*) \\
& + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \exp((\delta_2 + \delta_3) y^*) + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \exp((\delta_2 + \delta_4) y^*) + \\
& + \frac{1}{\delta_1^2} {}^1F \exp(\delta_1 y^*) + \frac{1}{\delta_2^2} {}^2F \exp(\delta_2 y^*) + \frac{1}{\delta_3^2} {}^3F \exp(\delta_3 y^*) + \frac{1}{\delta_4^2} {}^4F \exp(\delta_4 y^*) + \\
& \left. + \frac{1}{2} {}^1D y^{*2} + \frac{1}{2} {}^3E y^{*2} + \frac{1}{2} {}^5F y^{*2} + {}^1H_1 y^* + {}^1H_2 \right], \tag{3.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = -\Pr Ec & \left[(\Omega_{28} + \Omega_{29} y^* + \Omega_{30} y^{*2}) \exp(2\xi_1 y^*) + \right. \\
& + (\Omega_{31} + \Omega_{32} y^* + \Omega_{33} y^{*2}) \exp(2\xi_2 y^*) + (\Omega_{34}^* + \Omega_{35}^* y^*) \exp(\xi_1 y^*) \\
& \left. + (\Omega_{36}^* + \Omega_{37}^* y^*) \exp(\xi_2 y^*) + \Omega_{38}^* y^{*2} + \Omega_{39}^* y^{*3} + \Omega_{40}^* y^{*4} + {}^2H_1 y^* + {}^2H_2 \right], \tag{3.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = -\Pr Ec & \left\{ \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{47} - \chi_2 \Omega_{49}) \cos(2\beta_1 y^*) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{47} + \chi_1 \Omega_{49}) \sin(2\beta_1 y^*) \left. \right] \exp(2\alpha_1 y^*) + \\
& + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{48} + \chi_2 \Omega_{50}) \cos(2\beta_1 y^*) + \right. \\
& + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{48} - \chi_1 \Omega_{50}) \sin(2\beta_1 y^*) \left. \right] \exp(-2\alpha_1 y^*) - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{51} \sin(2\beta_1 y^*) - \\
& - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} \cos(2\beta_1 y^*) + [(\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) \cos(\beta_1 y^*) + \\
& + (\Omega_{53} \chi_2 + \Omega_{55} \chi_1) \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + [(\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2) \cos(\beta_1 y^*) - \\
& - (\Omega_{54} \chi_2 + \Omega_{56} \chi_1) \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + \frac{1}{2} \Omega_{57} y^{*2} + {}^3H_1 y^* + {}^3H_2 \left. \right\}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Treba naglasiti da se u okviru trećeg poglavlja konstante koje se javljaju u izrazima za polje brzine, mikrorotacije i polje temperature (jednačine od (3.38) do (3.46)), date kao dodatak u okviru trećeg poglavlja. Zbog same složenosti izraza i velikog broja dobijenih konstanti,

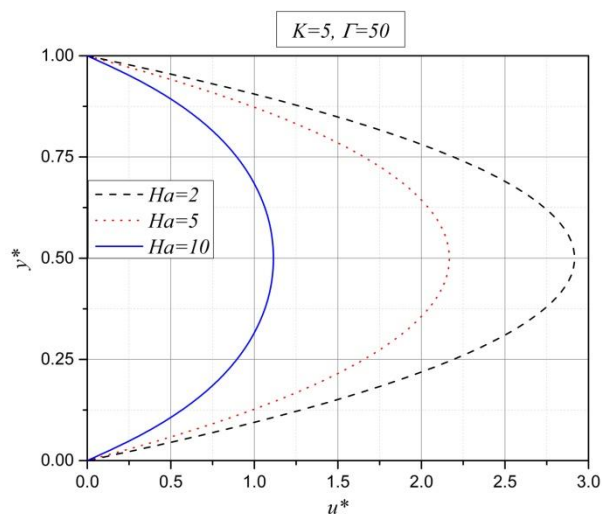
unošenje ovih konstanti u doktorsku disertaciju bespotrebno bi opteretilo materijal, a da sa druge strane ne bi povećalo kvalitet onoga što je cilj doktorske disertacije.

3.3.

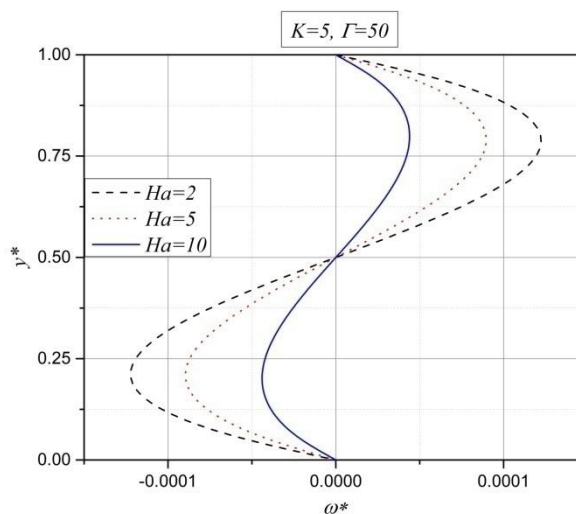
Analiza rezultata razmatranog problema

Nakon što smo definisali fizički i matematički model problema, te dobili rešenja matematičkog modela, pristupamo analizi uticaja karakterističnih parametara na polja brzine i temperature, kao i na mikrorotaciju. Od karakterističnih parametara koji su uvedeni kroz matematički model, ovde će biti analizirani uticaji Hartmannovog broja Ha , kao i parametara K i Γ , koji ustvari predstavljaju uticaj dopunskih viskoznosti λ i γ karakterističnih za mikropolarni fluid. Sve analize uticaja karakterističnih parametara na polja brzine, temperature i mikrotacije, biće predstavljene grafički. Deo rezultata već je objavljen u okviru časopisa "THERMAL SCIENCE" 2016 godine [82].

Najpre se dale analiza uticaja Hartmannovog broja Ha na polje brzine i mikrorotaciju mikropolarnog fluida. Ovaj uticaj predstavljen je na graficima 3.1 i 3.2.



3.1 Uticaj Hartmannovog broja na profil brzine

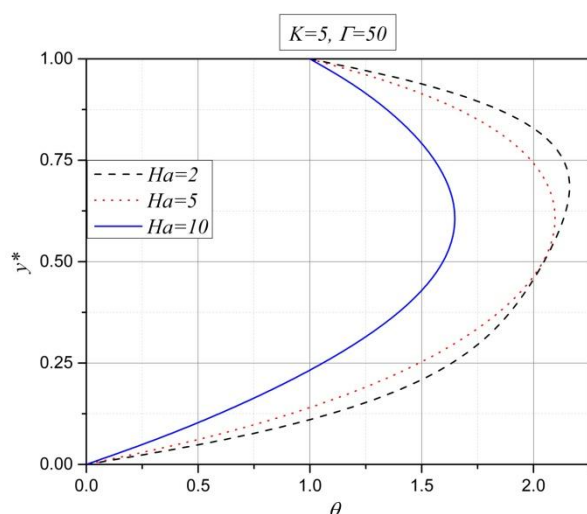


3.2 Uticaj Hartmannovog broja na mikrorotaciju

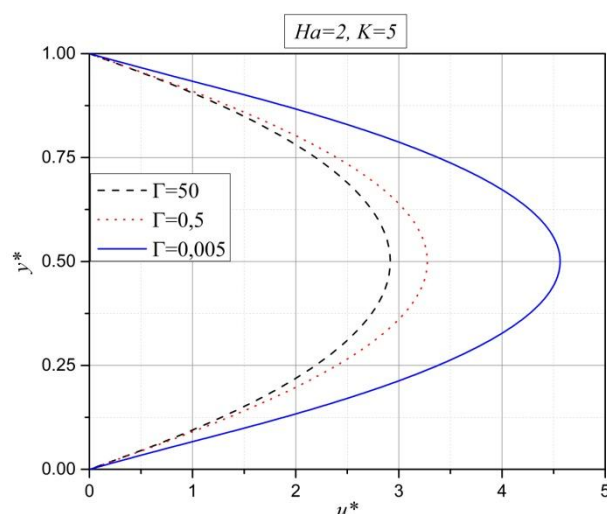
Na grafiku 3.1 predstavljeno je polje brzine za različite vrednosti Hartmannovog broja. Treba naglasiti da su vrednosti parametara K i Γ imali određene konstantne vrednosti date na grafiku 3.1, dok je vršena promena Hartmannovog broja. Sa grafika 3.1 jasno se vidi da porast

Hartmannovog broja dovodi do smanjenja i uniformisanja polja brzine na celoj visini između ploča. Ovakav rezultat je potpuno očekivan jer predstavlja uticaj upravnog magnetnog polja, odnosno Lorentzove sile, na pravac strujanja elektroprovodnog fluida. Već smo napred definisali pojam Lorentzove sile, kao posledicu kretanja elektroprovodnog fluida u magnetnom polju, kao i uticaj te sile na samo kretanje fluida, tj. konkretno na brzinu fluida. Dejstvo Lorentzove sile je takvo da se ono suprotstavlja kretanju fluida, te stoga teži da smanji brzinu fluida, kao i da "poravna" profil brzine.

Na grafiku 3.2 data je mikrorotacija mikropolarnog fluida za različite vrednosti Hartmannovog broja. Primećuje se da za veće vrednosti Hartmannovog broja, dolazi do smanjenja mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti, što navodi na zaključak da povećanje intenziteta magnetnog polja dovodi do smanjenja karakteristika mikropolarnih fluida.



3.3 Uticaj Hartmannovog broja na profil temperature

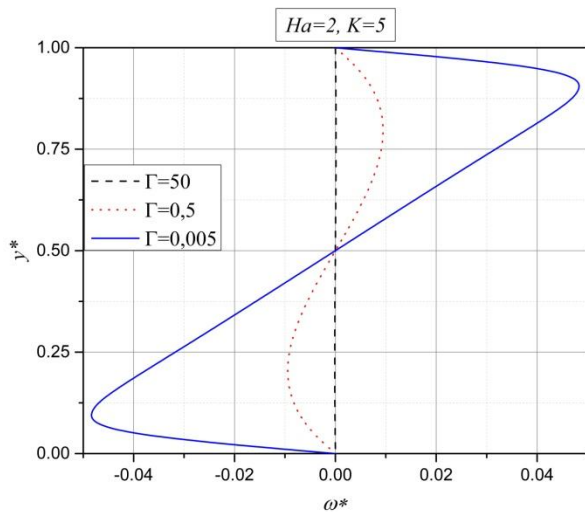


3.4 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na brzinu

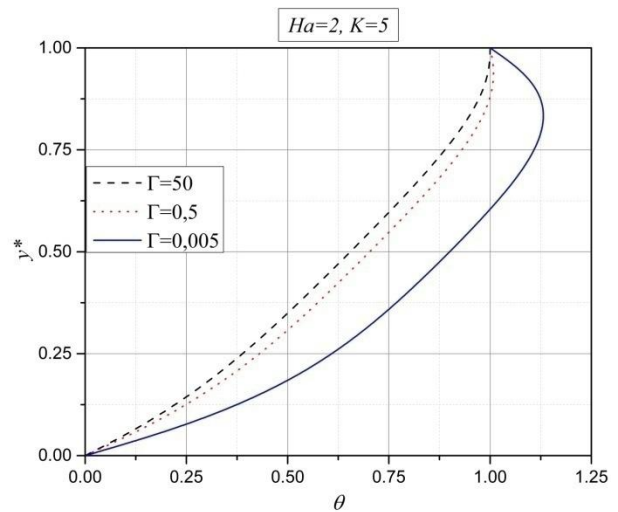
Na sledećoj slici 3.3 prikazan je uticaj Hartmannovog broja na polje temperature mikropolarnog fluida. Pri manjim vrednostima Hartmannovog broja, porast temperature u struji kanala je posledica pre svega viskoznog zagrevanja fluida, dok sa porastom Hartmannovog broja temperatura pocelaj visini između ploča opada, a doprinos temperaturi u sredini kanala daje Jouleova toplota.

Dalje se razmatra analiza uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ . Naravno, poput prethodnog slučaja i analize uticaja Hartmannovog broja, tako i u ovom slučaju, ostala dva karakteristična parametra uzimaju određene konstantne vrednosti dok se menja vrednost parametra viskoznosti mikrorotacije Γ . Na grafiku 3.4 dat je uticaj ovog parametra na profil brzine. Kada su viskozni efekti veći od dopunskih efekata mikrorotacije, odnos γ/μ teži nuli te posmatrani slučaj odgovara ponašanju MHD strujanja viskoznog elektroprovodnog fluida. Ova činjenica dovodi do zaključka da povećanje dopunske viskoznosti mikrorotacije γ , smanjuje protok u poređenju sa slučajem viskozne tečnosti.

Na grafiku 3.5 imamo uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na vektor mikrorotacije ω . Slično analizi uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje brzine, tako i u ovom slučaju povećanje parametra Γ dovodi do smanjenja intenziteta mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti po celoj širini strujnog prostora između ploča. Možemo takođe videti da u slučaju kada dopunska viskoznost mikrorotacije γ ima značajno veću vrednost od dinamičke viskoznosti μ , vrednost vektora mikrorotacije ω^* postaje potpuno zanemarljiva prilikom strujanja mikropolarnog fluida.



3.5 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju



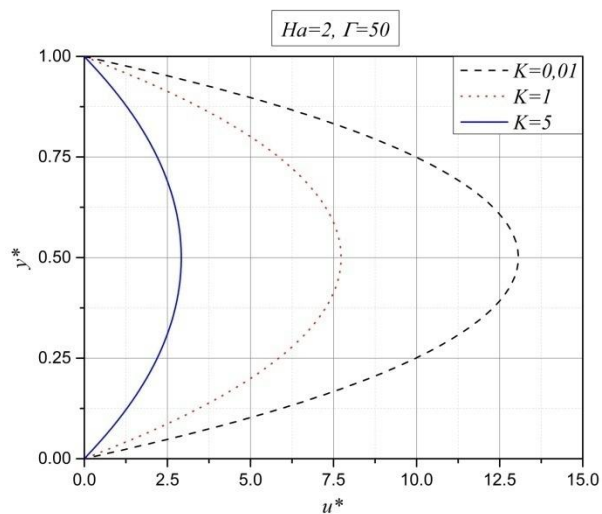
3.6 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na temperaturu

Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje temeprature prikazan je na grafiku 3.6. Sa grafika se vidi da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ uzrokuje smanjenje

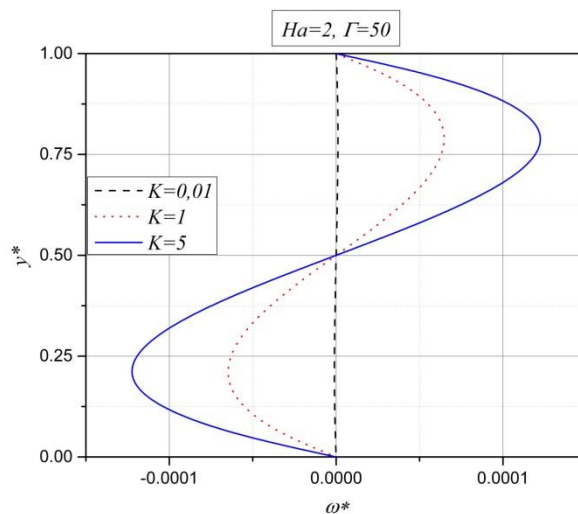
temperature po čitavoj širini između ploča. Odnosno, povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ smanjuje količinu energije transformisane unutar tečnosti. Sa povećanjem parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , brzina opada usled čega opada viskozno zagrevanje, a takođe opada i Jouleova toplota. Kako se povećava vrednost parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , dominantan mehanizam prenosa toplote postaje kondukcija.

Naredna tri grafika 3.7 - 3.9 daće uticaj parametra sprezanja K na polje brzine, mikrorotacije i temperature.

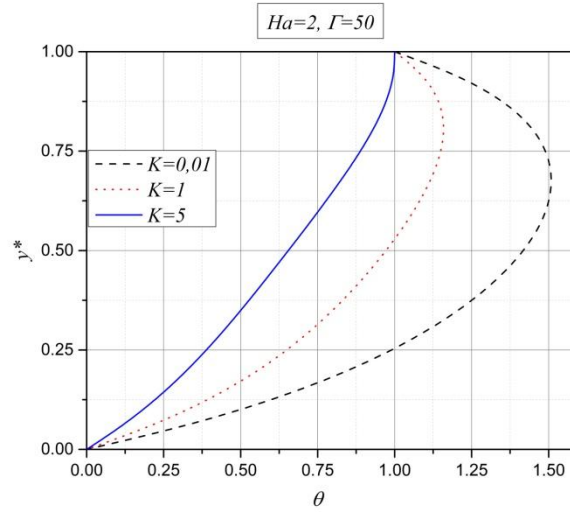
Sa grafika 3.7 i 3.8 može se uočiti da povećanje parametra sprezanja K smanjuje brzinu, ali povećava mikrorotaciju, što znači, kako se i očekivalo, da se otpor strujanju tečnosti povećava s povećanjem parametra sprezanja K . Za slučaj kada $K \rightarrow 0$, posmatrani slučaj odgovara ponašanju viskoznog fluida. Takođe sa slike 3.8 moguće je zapaziti da se intenzitet mikrorotacije blizu ploča povećava sa povećanjem parametra sprezanja K , stvarajući suprotnu rotaciju u blizini granica. To dovodi do zaključka da je efekat sprezanja karakteristika mikrorostrukture, u vidu dopunske viskoznosti λ , sa brzinom strujanja fluida izraženiji u oblasti strujanja blizu granica, tj. u oblasti velikih gradijenta brzine, na šta ukazuje i jednačina (3.24).



3.7 Uticaj parametra sprezanja K na brzinu



3.8 Uticaj parametra sprezanja K na mikrorotaciju

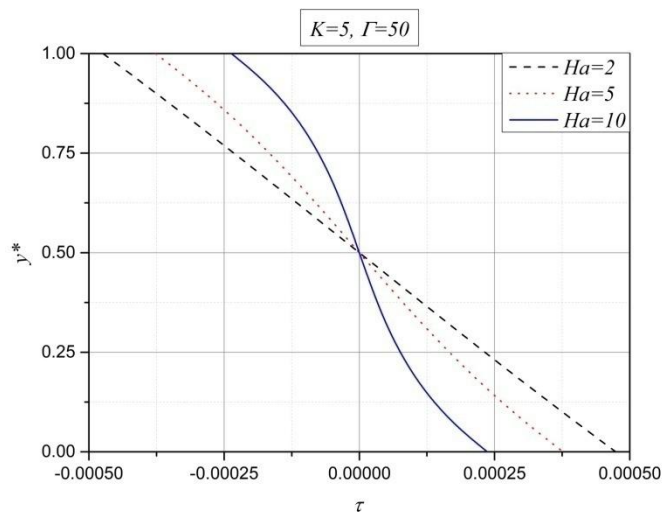
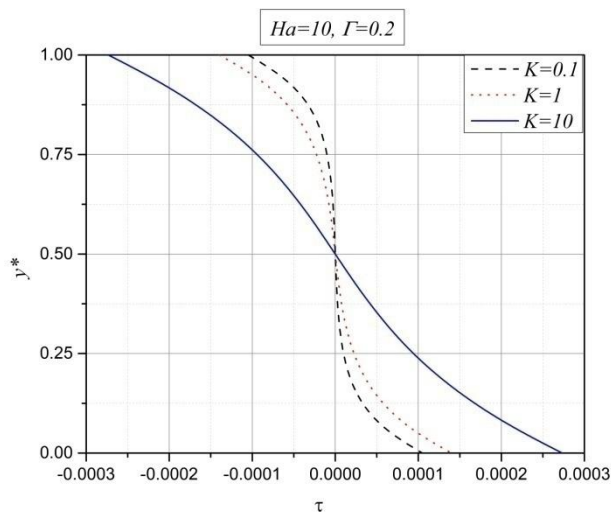
3.9 Uticaj parametra sprezanja K na temperaturu

Grafik 3.9 predstavlja uticaj parametra sprezanja K na polje temperature. Povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja bezdimenzionu temperature po celoj širini između ploča. Vidimo da pri znatno većem uticaju dopunske viskoznosti λ nad dinamičkom viskoznošću μ , odnosno pri izraženijim karakteristikama mikropolarnog fluida, dominantan prenos toplote postaje kondukcija.

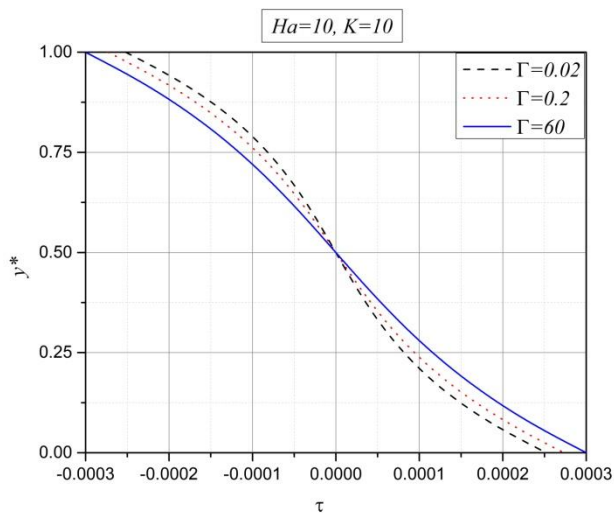
Pored napred navedene analize uticaja karakterističnih parametara na polje brzine, mikrorotacije i temperature, u nastavku će se u vidu grafika dati analiza karakterističnih parametara Ha, K i Γ na tangenti napon. Međutim, pre nego li pristupimo ovoj analizi, neophodno je definisati izraz za odeđivanje tangentskog napona kod mikropolarnih fluida. Kako smo već ranije, u prvom i drugom poglavlju prilikom definisanja mikropolarnih fluida, mogli da vidimo da tenzor napona nije simetričan kod mikropolarnih fluida te da ga treba proširiti, shodno tome tangenti napon za mikropolarne fluide se određuje na osnovu sledećeg izraza:

$$\tau = (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right) + \lambda \omega. \quad (3.47)$$

Naredni grafici 3.10 - 3.12 daće uticaj parametara Ha, K i Γ na tangenti napon kod strujanja mikropolarnog fluida.

3.10 Uticaj Hartmannovog broja Ha na tangentni napon3.11 Uticaj parametra sprezanja K na tangentni napon

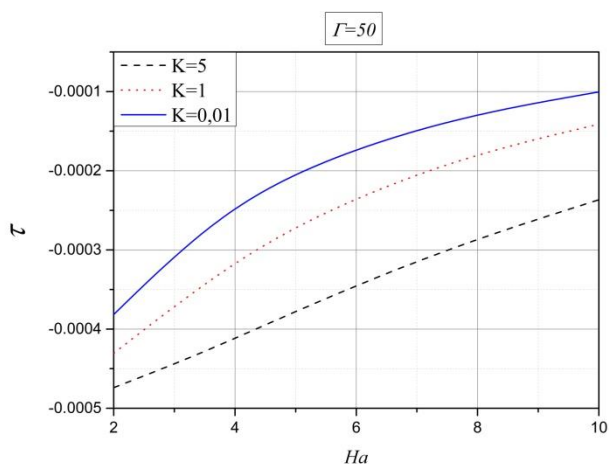
Sa grafika 3.10 i 3.11 jasno se vidi da povećanje Hartmannovog broja dovodi do smanjenja tangentnog napona, dok sasvim suprotno povećanje parametra sprezanja K takođe povećava i tangentni napon.

3.12 Uticaj parametra Γ na tangentni napon

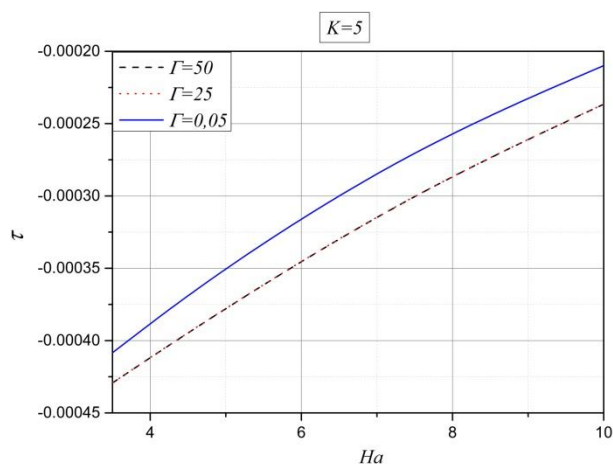
Međutim uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na tangentni napon je praktično zanemarljiv, što se jasno uočava sa grafika 3.12. Iz izraza za tangentni napon (3.47), može se uočiti da je doprinos dopunske viskoznosti λ na promenu tangenog napona značajan, takođe se

uočava da doprinos dopunske viskoznosti mikrorotacije γ ne postoji. Samim tim dobijen rezultat uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na tangentsni napon je očekivan.

Uz već datu pojedinačnu analizu uticaja Hartmannovog broja Ha , parametra sprezanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na tangentsni napon u strujnom prostoru između ploča, zgodno bi bilo analizirati i spregnuti uticaj Hartmannovog broja Ha i parametra sprezanja K , odnosno Hartmannovog broja Ha i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , na tangentsni napon na pločama.



3.13 Uticaj Hartmannovog broja Ha i parametra sprezanja K na tangentsni napon na gornjoj ploči



3.14 Uticaj Hartmannovog broja Ha i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na tangentsni napon na gornjoj ploči

Sa grafika 3.13 može se uočiti da sa porastom Hartmannovog broja Ha dolazi do opadanja tangencijalnog napona na pločama, pri čemu sa druge strane porast parametra K dovodi do povećanja intenziteta tangentsnog napona. Ovo je direktno posledica porasta dopunske viskoznosti λ , odnosno ukupne viskoznosti fluida, pa je ponašanje tangentsnog napona očekivano.

Što se tiče uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , kombinovano sa uticajem Hartmannovog broja Ha , može se videti da sa porastom parametra viskoznosti mikrorotacije Γ dolazi do porasta tangentsnog napona na pločama, ali sve do neke određenje vrednosti posle koje dalje povećanje ne utiče na vrednost tangentsnog napona, što je i prikazano na grafiku 3.14 (vrednosti tangentsnog napona za $\Gamma = 25$ i $\Gamma = 50$ su iste).

3.4.

*Dodatak - konstante kod razmatranog problema*Za slučaj kada je $a^2 - 4b > 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \delta_1 = +\sqrt{r_1}, \quad \delta_2 = -\sqrt{r_1}, \quad \delta_3 = +\sqrt{r_2}, \quad \delta_4 = -\sqrt{r_2},$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{B^*}{A} - D^* \right), \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{EA}, \quad \mathcal{D}_i = \delta_i (\mathfrak{I}_1 - \delta_i^2 \mathfrak{I}_2) \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$C_1 = -\frac{1}{\mathcal{D}_1} (\mathcal{D}_2 C_2 + \mathcal{D}_3 C_3 + \mathcal{D}_4 C_4), \quad C_2 = -\frac{1}{\mathfrak{R}_1} (\mathfrak{R}_2 C_3 + \mathfrak{R}_3 C_4),$$

$$C_3 = -\frac{1}{S_1} \left(S_2 C_4 + \frac{d}{b} \right), \quad C_4 = \frac{\mathcal{T}_1 - S_1}{\mathcal{T}_2 S_1 - \mathcal{T}_1 S_2} \frac{d}{b},$$

$$\mathcal{M}_i = 1 - \frac{\mathcal{D}_{i+1}}{\mathcal{D}_1} \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{N}_i = \exp \delta_{i+1} - \frac{\mathcal{D}_{i+1}}{\mathcal{D}_1} \exp \delta_1 \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathfrak{R}_i = \mathcal{D}_{i+1} (\exp \delta_{i+1} - \exp \delta_1) \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{T}_i = \mathcal{N}_{i+1} - \frac{\mathcal{N}_1}{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_{i+1} \quad i = 1, 2,$$

$$S_i = \mathcal{M}_{i+1} - \frac{\mathcal{M}_1}{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_{i+1} \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} {}^1\mathcal{B}_1 &= \frac{{}^1C}{4\delta_1^2} + \frac{{}^2C}{4\delta_2^2} + \frac{{}^3C}{4\delta_3^2} + \frac{{}^4C}{4\delta_4^2} + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} + \\ &+ \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} + \frac{{}^1F}{\delta_1^2} + \frac{{}^2F}{\delta_2^2} + \frac{{}^3F}{\delta_3^2} + \frac{{}^4F}{\delta_4^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^1\mathcal{B}_2 &= \frac{1}{4\delta_1^2} {}^1C \exp(2\delta_1) + \frac{1}{4\delta_2^2} {}^2C \exp(2\delta_2) + \frac{1}{4\delta_3^2} {}^3C \exp(2\delta_3) + \frac{1}{4\delta_4^2} {}^4C \exp(2\delta_4) + \\
&+ \frac{1}{2} {}^1D + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \exp(\delta_1 + \delta_3) + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \exp(\delta_1 + \delta_4) + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \exp(\delta_2 + \delta_3) + \\
&+ \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \exp(\delta_2 + \delta_4) + \frac{1}{2} {}^3E + \frac{1}{\delta_1^2} {}^1F \exp(\delta_1) + \frac{1}{\delta_2^2} {}^2F \exp(\delta_2) + \frac{1}{\delta_3^2} {}^3F \exp(\delta_3) + \\
&+ \frac{1}{\delta_4^2} {}^4F \exp(\delta_4) + \frac{1}{2} {}^5F,
\end{aligned}$$

$${}^1H_2 = -{}^1\mathcal{B}_1, \quad {}^1H_1 = {}^1\mathcal{B}_1 - {}^1\mathcal{B}_2 - \frac{1}{\text{Pr } Ec},$$

$$\begin{aligned}
{}^iC &= C_i^2 \left[(1+K)\delta_i^2 + Ha^2 \right] \quad i=1,2,3,4, \quad {}^iD = 2C_1C_{i+1} \left[(1+K)\delta_1\delta_{i+1} + Ha^2 \right] \quad i=1,2,3, \\
{}^iE &= 2C_2C_{i+2} \left[(1+K)\delta_2\delta_{i+2} + Ha^2 \right] \quad i=1,2, \quad {}^3E = 2C_3C_4 \left[(1+K)\delta_3\delta_4 + Ha^2 \right],
\end{aligned}$$

$${}^iF = 2 \frac{d}{b} Ha^2 C_i \quad i=1,2,3,4, \quad {}^5F = \frac{d^2}{b^2} Ha^2.$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b = 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} a, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} a,$$

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{B^*}{A} - D^* \right), \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{1}{EA},$$

$$C_5 = -\left(C_7 + \frac{d}{b} \right), \quad C_6 = \frac{1}{F_1} (E_4 - E_3 C_7 - F_2 C_8), \quad C_7 = -\frac{1}{E_7} (E_8 C_8 + E_9), \quad C_8 = \frac{E_9 E_{10} - E_7 E_{12}}{E_7 E_{11} - E_8 E_{10}},$$

$$F_i = \mathfrak{T}_1 - 3\mathfrak{T}_2 \xi_i^2 \quad i=1,2, \quad E_i = \xi_i \left(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 \xi_i^2 \right) \quad i=1,2,$$

$$G_i = \xi_i \left(\mathfrak{T}_1 - \xi_i^2 \mathfrak{T}_2 \right) \exp \xi_i \quad i=1,2, \quad H_i = [\mathfrak{T}_1 (1 + \xi_i) - \mathfrak{T}_2 \xi_i^2 (3 + \xi_i)] \exp \xi_i \quad i=1,2,$$

$$E_3 = E_2 - E_1, \quad E_4 = E_1 \frac{d}{b}, \quad E_5 = \exp \xi_2 - \exp \xi_1, \quad E_6 = (1 - \exp \xi_1) \frac{d}{b}, \quad G_3 = G_2 - G_1, \quad G_4 = G_1 \frac{d}{b},$$

$$E_7 = E_5 - \frac{E_3}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_8 = \exp \xi_2 - \frac{F_2}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_9 = E_6 + \frac{E_4}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_{10} = G_3 - \frac{H_1}{F_1} E_3,$$

$$E_{11} = H_2 - \frac{H_1}{F_1} F_2, \quad E_{12} = \frac{H_1}{F_1} E_4 - G_4, \quad E_{13} = E_1 C_5 + F_1 C_6, \quad E_{14} = E_1 C_6, \quad E_{15} = E_2 C_7 + F_2 C_8,$$

$$E_{16} = E_2 C_8,$$

$${}^2\mathcal{A}_1 = \Omega_{28} + \Omega_{31} + \Omega_{34}^* + \Omega_{36}^*,$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathcal{B}_2 = & (\Omega_{28} + \Omega_{29} + \Omega_{30}) \exp(2\xi_1) + (\Omega_{31} + \Omega_{32} + \Omega_{33}) \exp(2\xi_2) + \\ & + (\Omega_{34}^* + \Omega_{35}^*) \exp(\xi_1) + (\Omega_{36}^* + \Omega_{37}^*) \exp(\xi_2) + \Omega_{38}^* + \Omega_{39}^* + \Omega_{40}^*, \end{aligned}$$

$${}^2H_1 = {}^2\mathcal{A}_1 - {}^2\mathcal{B}_2 - \frac{1}{\text{Pr} Ec}, \quad {}^2H_2 = -{}^2\mathcal{A}_1,$$

$$\Omega_1 = (1+K)(C_6^2 + \xi_1^2 C_5^2 + 2C_5 C_6 \xi_1) + Ha^2 C_5^2, \quad \Omega_2 = (1+K)(2C_5 C_6 \xi_1^2 + 2\xi_1 C_6^2) + 2Ha^2 C_5 C_6,$$

$$\Omega_3 = (1+K)(\xi_1^2 C_6^2 + Ha^2 C_6^2), \quad \Omega_4 = (1+K)(C_8^2 + \xi_2^2 C_7^2 + 2\xi_2 C_7 C_8) + C_7^2 Ha^2,$$

$$\Omega_5 = (1+K)(2C_7 C_8 \xi_2^2 + 2\xi_2 C_8^2) + 2C_7 C_8 Ha^2, \quad \Omega_6 = (1+K)\xi_2^2 C_8^2 + C_8^2 Ha^2,$$

$$\Omega_7 = (1+K)(2C_6 C_8 + 2C_6 C_7 \xi_2 + 2C_5 C_8 \xi_1 + 2\xi_1 \xi_2 C_5 C_7) + 2C_5 C_7 Ha^2,$$

$$\Omega_8 = (1+K)(2C_6 C_8 \xi_2 + 2C_6 C_8 \xi_1 + 2\xi_1 \xi_2 C_6 C_7 + 2\xi_1 \xi_2 C_5 C_8) + 2Ha^2 (C_6 C_7 + C_5 C_8),$$

$$\Omega_9 = (1+K)2\xi_1 \xi_2 C_6 C_8 + 2C_6 C_8 Ha^2, \quad \Omega_{10} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_5, \quad \Omega_{11} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_6, \quad \Omega_{12} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_7,$$

$$\Omega_{13} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_8, \quad \Omega_{14} = \frac{d^2}{b^2} Ha^2, \quad \Omega_{15} = \frac{\Omega_1}{2\xi_1} - \frac{\Omega_2}{4\xi_1^2} + \frac{\Omega_3}{4\xi_1^3}, \quad \Omega_{16} = \frac{\Omega_2}{2\xi_1} - \frac{\Omega_3}{2\xi_1^2}, \quad \Omega_{17} = \frac{\Omega_3}{2\xi_1},$$

$$\Omega_{18} = \frac{\Omega_4}{2\xi_2} - \frac{\Omega_5}{4\xi_2^2} + \frac{\Omega_6}{4\xi_2^3}, \quad \Omega_{19} = \frac{\Omega_5}{2\xi_2} - \frac{\Omega_6}{2\xi_2^2}, \quad \Omega_{20} = \frac{\Omega_6}{2\xi_2}, \quad \Omega_{21}^* = \frac{\Omega_{10}}{\xi_1} - \frac{\Omega_{11}}{\xi_1^2}, \quad \Omega_{22}^* = \frac{\Omega_{11}}{\xi_1},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{23}^* &= \frac{\Omega_{12}}{\xi_2} - \frac{\Omega_{13}}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{24}^* = \frac{\Omega_{13}}{\xi_2}, \quad \Omega_{25} = \frac{\Omega_{11}}{\xi_1}, \quad \Omega_{26} = \frac{\Omega_{12}}{\xi_2} - \frac{\Omega_{13}}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{27} = \frac{\Omega_{13}}{\xi_2}, \\
\Omega_{28} &= \frac{\Omega_{15}}{2\xi_1} - \frac{\Omega_{16}}{4\xi_1^2} + \frac{\Omega_{17}}{4\xi_1^3}, \quad \Omega_{29} = \frac{\Omega_{16}}{2\xi_1} - \frac{\Omega_{17}}{2\xi_1^2}, \quad \Omega_{30} = \frac{\Omega_{17}}{2\xi_1}, \quad \Omega_{31} = \frac{\Omega_{18}}{2\xi_2} - \frac{\Omega_{19}}{4\xi_2^2} + \frac{\Omega_{20}}{4\xi_2^3}, \\
\Omega_{32} &= \frac{\Omega_{19}}{2\xi_2} - \frac{\Omega_{20}}{2\xi_2^2}, \quad \Omega_{33} = \frac{\Omega_{20}}{2\xi_2}, \quad \Omega_{34}^* = \frac{\Omega_{21}^*}{\xi_1} - \frac{\Omega_{22}^*}{\xi_1^2}, \quad \Omega_{35}^* = \frac{\Omega_{22}^*}{\xi_1}, \quad \Omega_{36}^* = \frac{\Omega_{23}^*}{\xi_2} - \frac{\Omega_{24}^*}{\xi_2^2}, \\
\Omega_{37}^* &= \frac{\Omega_{24}^*}{\xi_2}, \quad \Omega_{38}^* = \frac{\Omega_7 + \Omega_{14}}{2}, \quad \Omega_{39}^* = \frac{\Omega_8}{6}, \quad \Omega_{40}^* = \frac{\Omega_9}{12}.
\end{aligned}$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$, konstante su:

$$r_1^* = \frac{1}{2}(a + i\sqrt{4b - a^2}), \quad r_2^* = \frac{1}{2}(a - i\sqrt{4b - a^2}), \quad \alpha = \frac{1}{2}a, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}, \quad R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{R} \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt{R} \sin \frac{\theta_1}{2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{B^*}{A} - D^* \right), \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{EA},$$

$$\eta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_4 = -\alpha_1 + i\beta_1,$$

$$\begin{aligned}
{}^3\mathcal{B}_1 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\Omega_{47} \chi_1 - \Omega_{49} \chi_2) \right] + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\Omega_{48} \chi_1 + \Omega_{50} \chi_2) \right] - \\
&- \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} + (\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) + (\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^3\mathcal{B}_2 = & \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{47} - \chi_2 \Omega_{49}) \cos(2\beta_1) + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{47} + \chi_1 \Omega_{49}) \sin(2\beta_1) \right] \exp(2\alpha_1) + \\
& + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{48} + \chi_2 \Omega_{50}) \cos(2\beta_1) + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{48} - \chi_1 \Omega_{50}) \sin(2\beta_1) \right] \exp(-2\alpha_1) - \\
& - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{51} \sin(2\beta_1) - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} \cos(2\beta_1) + [(\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) \cos(\beta_1) + \\
& + (\Omega_{53} \chi_2 + \Omega_{55} \chi_1) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1) + [(\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2) \cos(\beta_1) - \\
& - (\Omega_{54} \chi_2 + \Omega_{56} \chi_1) \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1) + \frac{1}{2} \Omega_{57},
\end{aligned}$$

$$\Omega_{41} = \alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9, \quad \Omega_{42} = \beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9, \quad \Omega_{43} = \beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11}, \quad \Omega_{44} = \alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11},$$

$$\Omega_{45} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[(1+K)(\Omega_{41}^2 + \Omega_{42}^2) + Ha^2 (C_9^2 + C_{10}^2) \right],$$

$$\Omega_{46} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[(1+K)(\Omega_{43}^2 + \Omega_{44}^2) + Ha^2 (C_{11}^2 + C_{12}^2) \right],$$

$$\Omega_{47} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{42}^2 - \Omega_{41}^2) + Ha^2 (C_9^2 - C_{10}^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{41}\Omega_{42} + Ha^2 C_9 C_{10} \right],$$

$$\Omega_{48} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{44}^2 - \Omega_{43}^2) + Ha^2 (C_{12}^2 - C_{11}^2) \right] + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{43}\Omega_{44} - Ha^2 C_{11} C_{12} \right],$$

$$\Omega_{49} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{41}\Omega_{42} + Ha C_9 C_{10} \right] + \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{42}^2 - \Omega_{41}^2) + Ha^2 (C_9^2 - C_{10}^2) \right],$$

$$\Omega_{50} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{43}\Omega_{44} - Ha C_{11} C_{12} \right] + \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{43}^2 - \Omega_{44}^2) + Ha^2 (C_{11}^2 - C_{12}^2) \right],$$

$$\Omega_{51} = \frac{1}{2\beta_1} \left[(1+K)(\Omega_{41}\Omega_{43} - \Omega_{42}\Omega_{44}) + Ha^2 (C_9 C_{12} + C_{10} C_{11}) \right],$$

$$\Omega_{52} = \frac{1}{2\beta_1} \left[(1+K)(\Omega_{42}\Omega_{43} - \Omega_{41}\Omega_{44}) + Ha^2 (C_9 C_{11} - C_{10} C_{12}) \right],$$

$$\Omega_{53} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_9 \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - C_{10} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \Omega_{54} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_{11} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + C_{12} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{55} &= 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_9 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + C_{10} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \Omega_{56} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_{11} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - C_{12} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \\
\Omega_{57} &= (1+K)(\Omega_{42}\Omega_{43} - \Omega_{41}\Omega_{44}) + Ha^2 \left(C_9 C_{11} + C_{10} C_{12} + \frac{d^2}{b^2} \right), \quad \chi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad \chi_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \\
P &= (\Im_1 - \Im_2 \alpha_1^2 + 3\Im_2 \beta_1^2) \alpha_1, \quad Q = (\Im_1 - 3\Im_2 \alpha_1^2 + \Im_2 \beta_1^2) \beta_1, \\
Q_1 &= \cos \beta_1 \exp \alpha_1, \quad Q_2 = \sin \beta_1 \exp \alpha_1, \quad Q_3 = \cos \beta_1 \exp(-\alpha_1), \quad Q_4 = \sin \beta_1 \exp(-\alpha_1), \\
Q_5 &= P_3 \alpha_1 + P_4 \beta_1, \quad Q_6 = P_4 \alpha_1 - P_3 \beta_1, \quad Q_7 = P_5 \alpha_1 + P_6 \beta_1, \quad Q_8 = P_5 \beta_1 - P_6 \alpha_1, \quad Q_9 = \frac{P}{Q} \frac{d}{b}, \quad Q_9^* = \frac{2P}{Q}, \\
Q_{10} &= Q_3 - Q_1, \quad Q_{11} = (1 - Q_1) \frac{d}{b}, \quad Q_{12} = Q_6 + Q_7, \quad Q_{13} = Q_6 \frac{d}{b}, \quad Q_{14} = Q_4 - Q_2, \quad Q_{14}^* = Q_2 Q_9^* + Q_{10}, \\
Q_{15} &= Q_{11} + Q_2 Q_9, \quad Q_{16} = Q_8 - Q_5, \quad Q_{16}^* = Q_5 Q_9^* - Q_{12}, \quad Q_{17} = Q_5 Q_9 - Q_{13}, \\
P_1 &= \Im_1 - \Im_2 \alpha_1^2 + \Im_2 \beta_1^2, \quad P_2 = 2\Im_2 \alpha_1 \beta_1, \quad P_3 = (P_1 \sin \beta_1 - P_2 \cos \beta_1) \exp(\alpha_1), \\
P_4 &= (P_2 \sin \beta_1 + P_1 \cos \beta_1) \exp(\alpha_1), \quad P_5 = (P_1 \cos \beta_1 - P_2 \sin \beta_1) \exp(-\alpha_1), \\
P_6 &= (P_1 \sin \beta_1 + P_2 \cos \beta_1) \exp(-\alpha_1), \\
P_3^* &= P_1(\alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9) + P_2(\beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9), \quad P_4^* = P_1(\beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9) - P_2(\alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9), \\
P_5^* &= -[P_1(\alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11}) + P_2(\beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11})], \quad P_6^* = P_1(\beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11}) - P_2(\alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11}), \\
C_9 &= -\left(C_{11} + \frac{d}{b} \right), \quad C_{10} = Q_9^* C_{11} + Q_9 - C_{12}, \quad C_{11} = -\frac{1}{Q_{14}^*} (Q_{14} C_{12} + Q_{15}), \quad C_{12} = \frac{Q_{16}^* Q_{15} - Q_{17} Q_{14}^*}{Q_{16} Q_{14}^* - Q_{16}^* Q_{14}}.
\end{aligned}$$

- IV poglavlje -

4. MHD strujanje mikropolarnog fluida sa indukovanim poljem

4.1.

MHD strujanje mikropolarnog fluida za $Rm \sim 0^0$

Usled strujanja elektroprovodnog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, dolazi do indukcije električnog polja intenziteta $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, koje izaziva generisanje vektora gustine struje $\mathbf{j}$ [65]. Ako uniformno magnetno polje intenziteta B deluje u pravcu y ose, usled kretanja fluida u pravcu kretanja se indukuje magnetno polje intenziteta $B_x(y)$, te se vektor magnetnog polja zapisuje u sledećem obliku:

$$\mathbf{B} = B_x(y)\vec{i} + B\vec{j}. \quad (4.1)$$

Ako je elektroprovodnost fluida σ , vektor gustine struje $\mathbf{j}$, kada se ne zanemaruje indukovano magnetno polje, definiše se sledećom jednačinom:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (4.2)$$

Pošto smo definisali vektor magnetnog polja izrazom (4.1), dobija se sledeći izraz za vektor gustine struje:

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_x(y)}{\partial y} \vec{k}. \quad (4.3)$$

Komponente struje koje su upravne na linije magnetnog polja indukuju Lorentzovu silu $\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, koja je u ovom slučaju definisana izrazom:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial y} \vec{i} - \frac{B_x}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial y} \vec{j}. \quad (4.4)$$

Ovde je očigledno da se javlja komponenta Lorentzove sile koja deluje u y pravcu. Ova sila će direktno uticati na stvaranje sekundarnog strujanja tj. promenu strujanja u poprečnom pravcu, pa se pri razmatranju strujanja u magnetnom polju velikog inteziteta problem mora razmatrati kao dvodimenzioni.

U ovom slučaju projekcija impulsne jednačine na x pravac glasi:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} + \frac{B}{\mu_0} \frac{dB_x}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0. \quad (4.5)$$

Kako je kod razmatranog problema $Rm \sim 0^0$, te ne možemo zanemariti indukovano magnetno polje, pređimo onda na jednačinu magnetne indukcije. Jednačina magnetne indukcije u opštem obliku data je sledećom izrazom:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad (4.6)$$

gde je prvi član na levoj strani jednak nuli ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$), tj. primenjeno spoljašnje magnetno polje je stacionarno. Drugi i treći član jednačine za magnetnu indukciju (4.6), sada imaju sledeći oblik:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial u}{\partial y} B \vec{i}, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}. \quad (4.8)$$

Sada jednačina magnetne indukcija dobija oblik:

$$\frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{d^2 B_x}{dy^2} + B \frac{du}{dy} = 0. \quad (4.9)$$

Ostalo je još da definišemo jednačinu konzervacije energije u slučaju kada se ne zanemaruje indukovano magnetno polje u pravcu strujanja $B_x(y)$. Podsetimo se opšteg oblika jednačine za konzervaciju energije, koju smo izveli u II poglavlju ove disertacije:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (4.10)$$

Kako smo gustinu struje $\mathbf{j}$ definisali izrazom (4.3), onda poslednji član na desnoj strani jednačine konzervacije energije postaje:

$$\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} = \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right)^2 \vec{i}, \quad (4.11)$$

odnosno razvijena jednačina konzervacije energije za pravac strujanja, x osu, postaje:

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{1}{\sigma \mu_0^2} \left(\frac{dB_x}{dy} \right)^2 = 0. \quad (4.12)$$

Sada sistem jednačina (4.5), (4.9) i (4.12), uz jednačinu konzervacije ugaonog impulsa, koja je u potpunosti ista kao i u slučaju kada je zanemareno indukovano magnetno polje, čine sistem jednačina koji se koristi prilikom opisivanja MHD strujanja mikropolarnog fluida za slučaj kada je $Rm \sim 0^0$, odnosno za slučaj kada se indukovano magnetno polje u pravcu strujanja ne zanemaruje. Kompletan sistem jednačina sada izgleda ovako:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} + \frac{B}{\mu_0} \frac{dB_x}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (4.13)$$

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du}{dy} - 2\lambda \omega = 0, \quad (4.14)$$

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{1}{\sigma \mu_0^2} \left(\frac{dB_x}{dy} \right)^2 = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\sigma\mu_0} \frac{d^2 B_x}{dy^2} + B \frac{du}{dy} = 0. \quad (4.16)$$

4.2.

Fizički i matematički model razmatranog problema

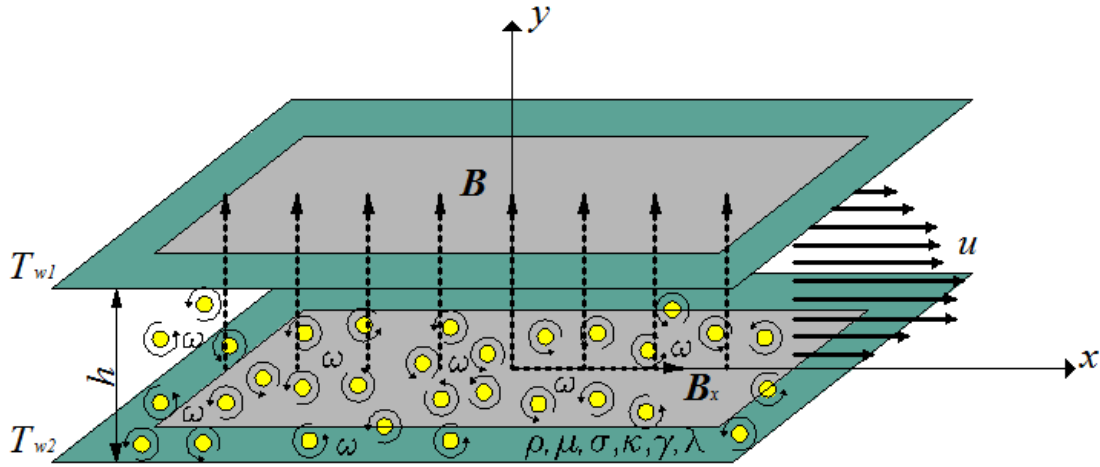
Kako smo u prethodnom delu četvrtog poglavlja definisali jednačine za slučaj strujanja mikropolarnog fluida sa indukovanim poljem, sada treba u potpunosti definisati fizički, ali i matematički model razmatranog problema u ovom poglavlju.

Razmatra se laminarno i potpuno razvijeno MHD strujanje mikropolarnog fluida, između ploča koje se protežu u x i z pravcu, a na međusobnom su rastojanju h . Pod pretpostavkom da se razmatra slučaj potpuno razvijenog strujanja, brzina strujanja fluida je u pravcu x - ose i intenziteta je u . Strujanje se odvija usled konstantnog pada pritiska duž pravca strujanja. Upravno na pravac strujanja deluje spoljašnje magnetno polje intenziteta B . Usled strujanja fluida i dejstva spoljašnjeg magnetnog polja, dolazi do indukovanja unutrašnjeg magnetnog polja u pravcu strujanja intenziteta B_x . Već smo ranije napomenuli, da u slučaju kada ne možemo zanemariti uticaj unutrašnjeg magnetnog polja, Reynoldsov magnetni broj je reda: $Rm \sim 0^0$. Tokom strujanja mikropolarnih fluida, gornja i donja ploča održavaju se na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2} , respektivno, pri čemu treba voditi računa da je $T_{w1} > T_{w2}$. Sada vektore brzine i magnetnog polja za razmatrani problem, možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{v} = u\vec{i}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B} = B_x\vec{i} + B\vec{j}. \quad (4.18)$$

Napred definisani fizički model MHD strujanja mikropolarnog fluida, predstavljen je na slici 4.



Slika 4. Fizički model razmatranog problema

Sada možemo ponovo napisati sistem jednačina (4.13) - (4.16), izveden u prethodnom odeljku, koji predstavlja matematički model razmatranog problema:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} + \frac{B}{\mu_0} \frac{dB_x}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (4.19)$$

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du}{dy} - 2\lambda\omega = 0, \quad (4.20)$$

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{1}{\sigma \mu_0^2} \left(\frac{dB_x}{dy} \right) = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{d^2 B_x}{dy^2} + B \frac{du}{dy} = 0. \quad (4.22)$$

Da bi smo zadati sistem jednačina rešili, neophodno je da definišemo granične uslove razmatranog problema. Kako su ploče nepokretne, možemo usvojiti tvrdnju da su brzina i mikrorotacija na pločama jednake nuli, tj:

$$\begin{aligned} u = 0, \omega = 0, \quad \text{za } y = 0, \\ u = 0, \omega = 0, \quad \text{za } y = h. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Što se tiče graničnih uslova za temperaturu i indukovano polje, pretpostavljeno je da se radi o izotermalnim uslovima i da su zidovi kanala neprovodni, na osnovu čega su granični uslovi:

$$\begin{aligned} T &= T_{w2}, B_x = 0 \quad \text{za} \quad y = 0, \\ T &= T_{w1}, B_x = 0 \quad \text{za} \quad y = h. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sledeći korak je da prethodni sistem jednačina (4.19) - (4.22), kao i granične uslove (4.23) i (4.24), svedemo na bezdimenzioni oblik, te stoga uvodimo prvo sledeće transformacije za bezdimenzionu brzinu, mikrorotaciju, indukovano magnetno polje i poprečnu koordinatu:

$$u^* = \frac{u}{U}, y^* = \frac{y}{h}, \omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}, b = \frac{B_x}{B}, \quad (4.25)$$

gde u izrazu za bezdimenzionu brzinu u^* , U predstavlja referentnu brzinu, koja se definiše na sledeći način:

$$U = \frac{h^2 P}{\mu}, P = -\frac{dp}{dx} = \text{const}, \quad (4.26)$$

dok u izrazu za bezdimenzionu mikrorotaciju ω_0 je definisano sledećim izrazom:

$$\omega_0 = \frac{U}{h}. \quad (4.27)$$

Dalje se redom definišu Hartmannov, Prandtlov, Eckertov broj i Reynoldsov magnetni broj:

$$Ha = Bh \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, Pr = \frac{\mu c_p}{k}, Ec = \frac{U^2}{c_p (T_1 - T_2)}, Rm = \sigma \mu_0 U h, \quad (4.28)$$

kao i karakteristični parametri za strujanje mikroplarnog fluida, parametar sprežanja K i parametar viskoznosti mikrorotacije Γ :

$$K = \frac{\lambda}{\mu}, \Gamma = \frac{\gamma}{\mu h^2}. \quad (4.29)$$

Na kraju uvodimo i bezdimenzionu temperturu koja je data izrazom:

$$\theta = \frac{T - T_{w2}}{T_{w1} - T_{w2}}. \quad (4.30)$$

Sada je sistem jednačina (4.19) - (4.22) u bezdimenzionom obliku dat sledećim jednačinama:

$$(1 + K) \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + K \frac{d\omega^*}{dy^*} + \frac{Ha^2}{Rm} \frac{db}{dy^*} + 1 = 0, \quad (4.31)$$

$$\Gamma \frac{d^2 \omega^*}{dy^{*2}} - K \frac{du^*}{dy^*} - 2K\omega^* = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} + (1 + K) \text{Pr} \text{Ec} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 + \text{Pr} \text{Ec} \frac{Ha^2}{Rm^2} \left(\frac{db}{dy^*} \right)^2 = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{Rm} \frac{d^2 b}{dy^{*2}} + \frac{du^*}{dy^*} = 0. \quad (4.34)$$

Odgovarajući granični uslovi dati izrazima (4.23) i (4.24), transformisani su u bezdimenzioni oblik:

$$\begin{aligned} u^* = 0, \omega^* = 0, \theta = 0, b = 0 \quad \text{za} \quad y^* = 0, \\ u^* = 0, \omega^* = 0, \theta = 1, b = 0 \quad \text{za} \quad y^* = 1. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Kao i u prethodnim primerima, prilikom rešavanja sistema jednačina (4.31) - (4.34) lako se uočava da su jednačine (4.31) i (4.32) spregnute. Prvi korak kako bi smo rešili postavljen sistem je da iz jednačine (4.31) izrazimo prvi izvod veličine b i tako dobijenu jednačinu diferenciramo po y , kako bi se dobio drugi izvod veličine b . Ovako dobijeni drugi izvod veličine b , zamenjuje se u jednačinu (4.34) i dobija se nova jednačina koja zavisi samo od prvog i trećeg izvoda brzine i drugog izvoda mikrorotacije. Ovako dobije jednačina, zajedno sa jednačinom (4.32) čini sistem spregnutih jednačina, iz kog se daljom transformacijom, poput u poglavlju III, dobija jednačina četvrog reda u obliku:

$$\frac{d^4 \omega^*}{dy^{*4}} - a \frac{d^2 \omega^*}{dy^{*2}} + b \omega^* = 0, \quad (4.36)$$

u kojoj su konstante a i b definisane sledećim izrazima:

$$a = RmB^* - (A-2)D^*, \quad b = 2RmB^*D^*, \quad (4.37)$$

gde su:

$$A = \frac{K}{1+K}, \quad B^* = \frac{1}{1+K} \frac{Ha^2}{Rm}, \quad C = \frac{1}{1+K}, \quad D^* = \frac{K}{\Gamma}. \quad (4.38)$$

Karakteristična jednačina jednačine (4.36) ima oblik:

$$\delta^4 - a\delta^2 + b = 0, \quad (4.39)$$

odnosno:

$$za \quad \delta^2 = r \rightarrow r^2 - ar + b = 0. \quad (4.40)$$

Slično kao i pri rešavanju jednačine četvrtog reda u prethodnim slučajevima, tako i u ovom slučaju pri rešavanju jednačine (4.36), odnosno karakteristične jednačine (4.39), postoje tri moguća rešenja za mikrorotaciju ω u zavisnosti od korena karakteristične jednačine. Kako su koreni karakteristične jednačine:

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad (4.41)$$

opet možemo konstatovati da rešenja karakteristične jednačine zavise od vrednosti potkorene veličine, tj. od toga da li je izraz $a^2 - 4b$ veći, jednak ili manji od nula. Za posmatrani problem, izraz $a^2 - 4b$ nakon zamene konstanti a i b ima oblik:

$$a^2 - 4b = \frac{\left[\left(\frac{2+K}{\Gamma} K + Ha^2 \right)^2 - 8K(1+K) \frac{Ha^2}{\Gamma} \right]}{(1+K)^2}. \quad (4.42)$$

Imenilac izraza (4.42) je uvek pozitivan, ali brojilac može imati kako pozitivne, tako i negativne vrednosti ili biti nula u zavisnosti od karakterističnih bezdimenzionih veličina. Stoga, postoje tri moguća rešenja za mikrorotaciju ω u zavisnosti od korena karakteristične jednačine, odnosno od vrednosti izraza $a^2 - 4b$.

Ta rešenja data su sledećim izrazima:

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b > 0$

$$\omega^* = C_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \exp(\delta_4 y^*), \quad (4.43)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b = 0$

$$\omega^* = (C_5 + C_6 y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (C_7 + C_8 y^*) \exp(\xi_2 y^*), \quad (4.44)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b < 0$

$$\begin{aligned} \omega^* = & [C_9 \cos(\beta_1 y^*) + C_{10} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + [C_{11} \cos(\beta_1 y^*) + C_{12} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Respektivno, odgovarajuća rešenja za brzinu data su sledećim izrazima:

$$u^* = C_1 D_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 D_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 D_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 D_4 \exp(\delta_4 y^*) + D_1, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} u^* = & \left[\frac{1}{D^*} (C_6 + \xi_1 C_5) - 2 \frac{C_5}{\xi_1} + 2 \frac{C_6}{\xi_1^2} \right] \exp(\xi_1 y^*) + \\ & + \left[\frac{1}{D^*} (C_8 + \xi_2 C_7) - 2 \frac{C_7}{\xi_2} + 2 \frac{C_8}{\xi_2^2} \right] \exp(\xi_2 y^*) + \\ & + \left(\frac{1}{D^*} \xi_1 C_6 - 2 \frac{C_6}{\xi_1} \right) y \exp(\xi_1 y^*) + \left(\frac{1}{D^*} \xi_2 C_8 - 2 \frac{C_8}{\xi_2} \right) y \exp(\xi_2 y^*) + D_2, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} u^* = & [(-\mathfrak{I}_1 C_9 + \mathfrak{I}_2 C_{10}) \sin(\beta_1 y^*) + (\mathfrak{I}_1 C_{10} + \mathfrak{I}_2 C_9) \cos(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + [-(\mathfrak{I}_1 C_{11} + \mathfrak{I}_2 C_{12}) \sin(\beta_1 y^*) + (\mathfrak{I}_1 C_{12} - \mathfrak{I}_2 C_{11}) \cos(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + D_3, \end{aligned} \quad (4.48)$$

za temperaturu:

$$\begin{aligned} \theta = & -(1+K) \Pr Ec [\mathsf{T}_1 \exp(2\delta_1 y^*) + \mathsf{T}_2 \exp(2\delta_2 y^*) + \mathsf{T}_3 \exp(2\delta_3 y^*) + \\ & + \mathsf{T}_4 \exp(2\delta_4 y^*) + \mathsf{T}_6 \exp((\delta_1 + \delta_3) y^*) + \mathsf{T}_7 \exp((\delta_1 + \delta_4) y^*) + \\ & + \mathsf{T}_8 \exp((\delta_2 + \delta_3) y^*) + \mathsf{T}_9 \exp((\delta_2 + \delta_4) y^*) + \mathsf{T}_{11} \exp(\delta_1 y^*) + \mathsf{T}_{12} \exp(\delta_2 y^*) + \\ & + \mathsf{T}_{13} \exp(\delta_3 y^*) + \mathsf{T}_{14} \exp(\delta_4 y^*) + (\mathsf{T}_5 + \mathsf{T}_{10} + \mathsf{T}_{15}) y^{*2} + D_7 y^* + D_8], \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \theta = & -(1+K) \Pr Ec \{ \mathsf{T}_{31} \exp(2\xi_1 y^*) + \mathsf{T}_{32} \exp(2\xi_2 y^*) + \\ & + \mathsf{T}_{34} \exp(\xi_1 y^*) + \mathsf{T}_{35} \exp(\xi_2 y^*) + \mathsf{T}_{36} y^{*2} \exp(2\xi_1 y^*) + \mathsf{T}_{37} y^{*2} \exp(2\xi_2 y^*) + \\ & + \mathsf{T}_{39} y^* \exp(2\xi_1 y^*) + \mathsf{T}_{40} y^* \exp(2\xi_2 y^*) + \mathsf{T}_{42} y^* \exp(\xi_1 y^*) + \mathsf{T}_{43} y^* \exp(\xi_2 y^*) + \\ & + \frac{1}{2} \mathsf{T}_{30} y^{*2} + \frac{1}{6} \mathsf{T}_{27} y^{*3} + \frac{1}{12} \mathsf{T}_{24} y^{*4} + D_9 y^* + D_{10} \}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \theta = & -(1+K) \Pr Ec \left\{ \left[R_{28} \cos(2\beta_1 y^*) + R_{29} \sin(2\beta_1 y^*) + R_{36} \right] \exp(2\alpha_1 y^*) + \right. \\ & + \left[R_{30} \cos(2\beta_1 y^*) - R_{31} \sin(2\beta_1 y^*) + R_{37} \right] \exp(-2\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[R_{32} \sin(\beta_1 y^*) + R_{33} \cos(\beta_1 y^*) \right] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[R_{34} \cos(\beta_1 y^*) - R_{35} \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*) - \\ & \left. - R_{38} \cos(2\beta_1 y^*) - R_{39} \sin(2\beta_1 y^*) + \frac{1}{2} R_{19} y^{*2} + D_{11} y^* + D_{12} \right\}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

i za indukovano magnetno polje:

$$\begin{aligned} b = & -\frac{1}{B^*} \left[C y^* + C_1 \mathsf{A}_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \mathsf{A}_2 \exp(\delta_2 y^*) + \right. \\ & \left. + C_3 \mathsf{A}_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \mathsf{A}_4 \exp(\delta_4 y^*) + D_4 \right], \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} b = & -\frac{1}{B^*} \left[C y^* + (A C_5 + \mathfrak{I}_3 C_5 + \mathfrak{I}_5 C_6) \exp(\xi_1 y^*) + \right. \\ & + (A C_7 + \mathfrak{I}_4 C_7 + \mathfrak{I}_6 C_8) \exp(\xi_2 y^*) + \\ & \left. + C_6 (A + \mathfrak{I}_3) y^* \exp(\xi_1 y^*) + C_8 (A + \mathfrak{I}_4) y^* \exp(\xi_2 y^*) + D_5 \right], \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$b = -\frac{1}{B^*} \{ Cy^* + [N_9 \cos(\beta_1 y^*) + N_{10} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + [N_{11} \cos(\beta_1 y^*) + N_{12} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + D_6 \}. \quad (4.54)$$

Kao i u prethodnom slučaju, tako i u ovom, konstante koje su uvedene prilikom nalaženja rešenja za mikrorotaciju, brzinu, temperaturu i indukovano magnetno polje, ovde su izostavljene jer bi njihov veliki broj i kompleksnost bespotrebno opteretili sadržaj doktorske disertacije. Ipak, ove konstante se nalaze u okviru dodatka disertacije.

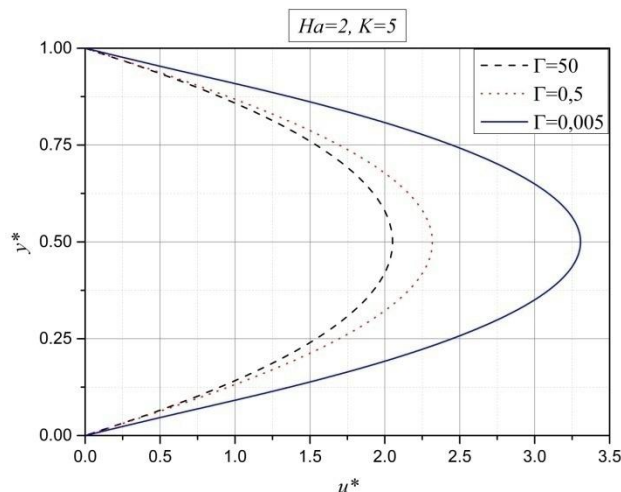
4.3.

Analiza rezultata razmatranog problema

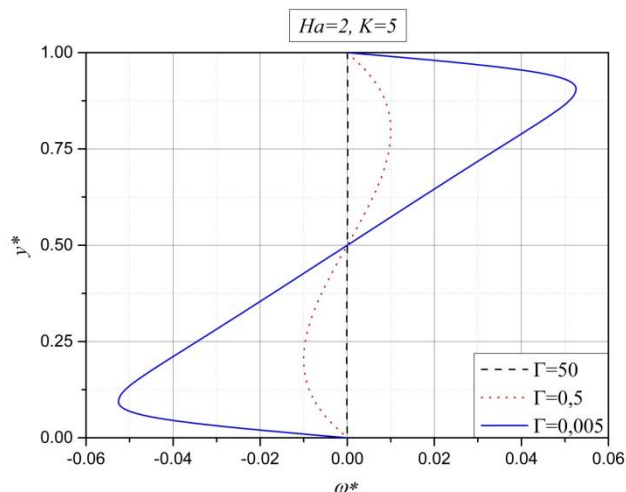
U nastavku ovog poglavlja daje se analiza rezultata dobijenih kroz matematički model razmatranog MHD strujanja mikropolarnog fluida, u ovom slučaju ne zanemarujući indukovano magnetno polje. Analiza uticaja indukovano polja je od velikog značaja, što pokazuju brojni radovi iz ove oblasti [83, 84]. Kao i do sada, pre svega će se razmatrati uticaj parametra sprežanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , koji karakterišu uticaj fizičkih karakteristika mikropolarnog fluida, kao i Hartmannovog broja na profile brzine, mikrorotacije, temperature i indukovano magnetnog polja.

Prva četiri grafika daće uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje brzine, mikrorotacije, temperature i indukovano magnetnog polja.

Sa grafika 4.1 i 4.2, na kojima je predstavljen uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje brzine i mikrorotacije, još jednom se potvrđuju rezultati dobijeni u III poglavlju, tj. prilikom razmatranja MHD strujanja jednog mikropolarnog fluida, ali uz zanemarivanje indukovano polja. Sa datih grafika se jasno vidi da povećanje dopunske viskoznosti mikrorotacije γ , smanjuje brzinu, a samim tim i protok, u poređenju sa slučajem viskozne tečnosti. Takođe, povećanje parametra Γ dovodi do smanjenja intenziteta mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti po celoj visini strujnog prostora između ploča, što je prikazano na grafiku 4.2.



4.1 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na profil brzine

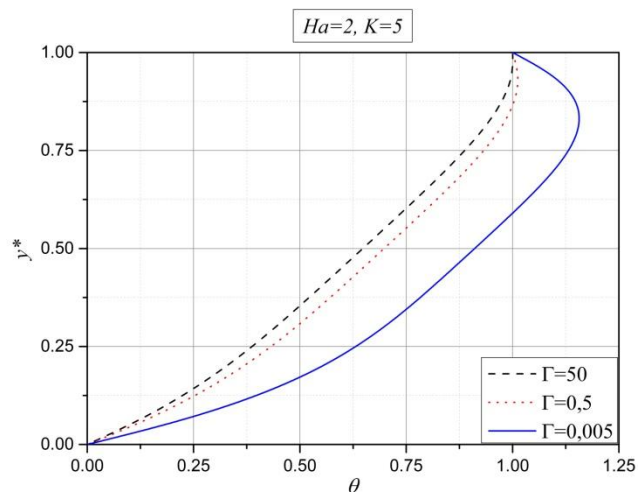


4.2 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju

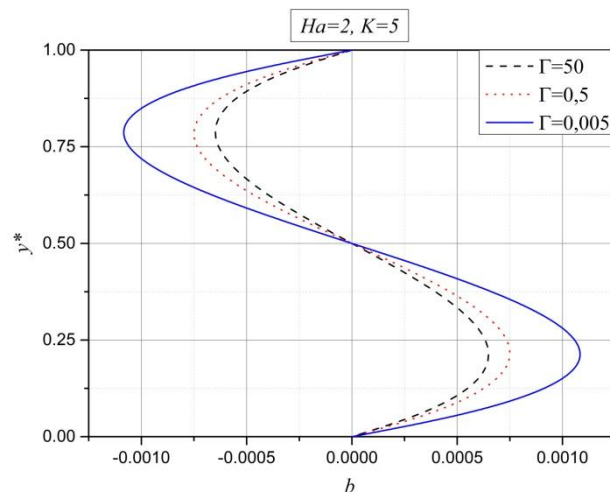
Sledeći grafik 4.3, daje uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje bezdimenzione temperature. I opet možemo, isto kao i slučaju razmatranog problema u poglavlju III, doneti zaključak da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ uzrokuje smanjenje temperature po čitavoj visini između ploča. Odnosno, povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ smanjuje količinu energije transformisane unutar tečnosti.

Ono što ovaj razmatrani problem izdvaja u odnosu na prethodni iz poglavlja III je uzimanje u obzir uticaja indukovanog magnetnog polja, kao i analiza uticaja karakterističnih parametara na bezdimenzino indukovano magnetno polje.

Tako na grafiku 4.4 imamo predstavljen uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na indukovano magnetno polje b . Sa pomenutog grafika se vidi da sa povećanjem parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , odnosno povećanjem dopunske viskoznosti γ , dolazi do smanjenja po apsolutnoj vrednosti indukovanog magnetnog polja po celoj visini između ploča. Kako je indukovano polje posledica strujanja elektroprovodnog fluida, tj. brzine strujanja, a sa grafika 4.1 je već izveden zaključak da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ dovodi do smanjenja brzine, tako je i ova tendencija promene indukovanog magnetnog polja sa promenom Γ očekivana.



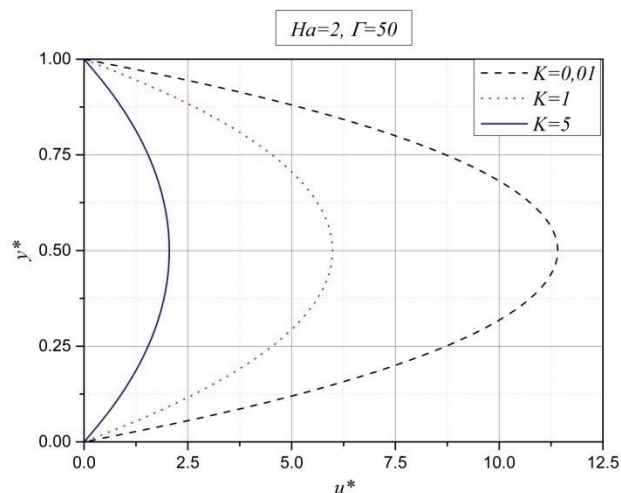
4.3 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na profil bezdimenzione temperature



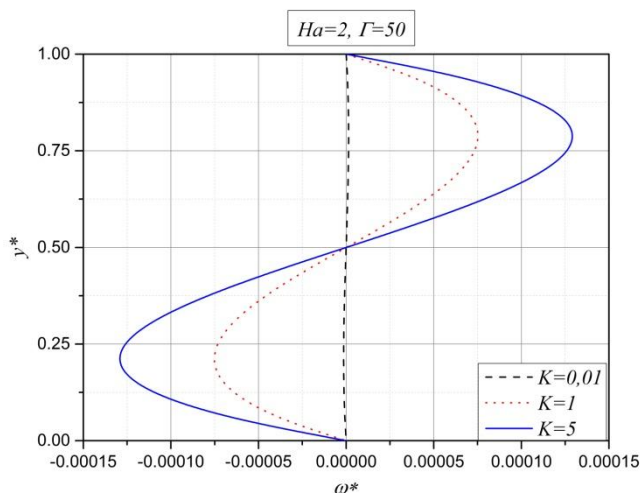
4.4 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na indukovano polje

Naredna četiri grafika predstaviće uticaj parametra sprezanja K na karakteristične veličine strujanja razmatranog problema.

Analiza uticaja parametra sprezanja K na profil brzine i mikrorotacije predstavljeno je na graficima 4.5 i 4.6.



4.5 Uticaj parametra sprezanja K na profil brzine



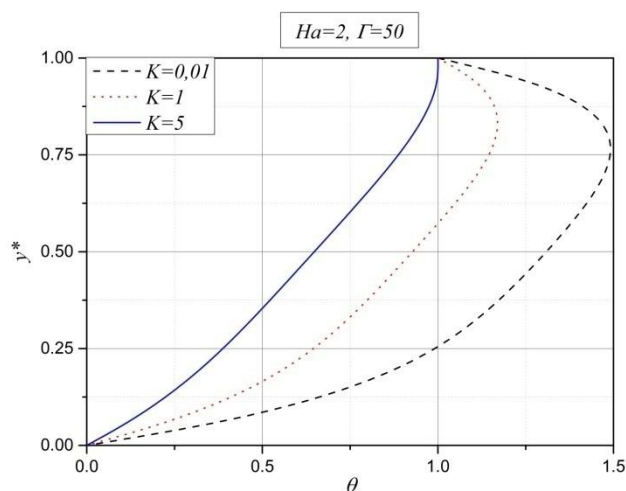
4.6 Uticaj parametra sprezanja K na mikrorotaciju

Sa datih grafika jasno se uočava da povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja brzine, a sa druge strane do povećanja apsolutne vrednosti mikrorotacije po visini

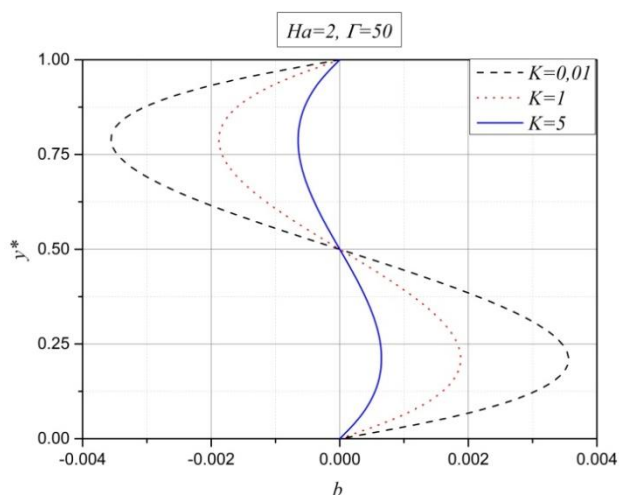
strujnog prostora između ploča. Iz toga se donosi zaključak da povećanje parametra sprezanja K stvara otpor strujanju tečnosti, dok sa druge strane intenzivira karakteristike mikropolarnog fluida kroz dopunsku viskoznost λ , što se odražava na intenzivniju mikrorotaciju.

Dobijeni rezultati odgovaraju u potpunosti rezultatima dobijenim prilikom analize MHD strujanja mikropolarnog fluida u slučaju kad je Reynoldsov magnetni broj mnogo manji od jedinice.

Grafik 4.7 koji predstavlja uticaj parametra sprezanja K na bezdimenzionu temperaturu pokazuje da povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja bezdimenzionu temperature po celoj visini između ploča.



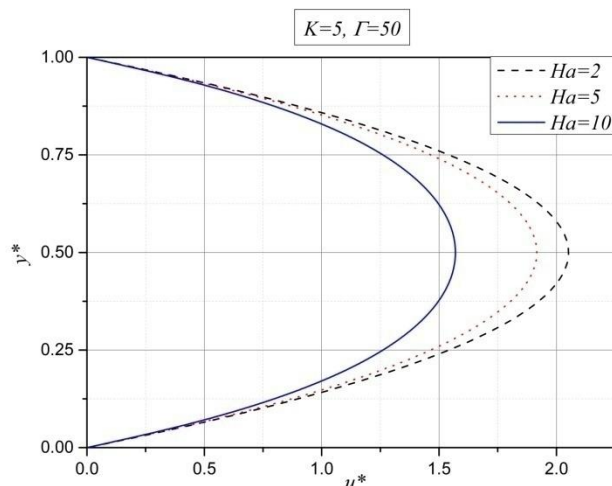
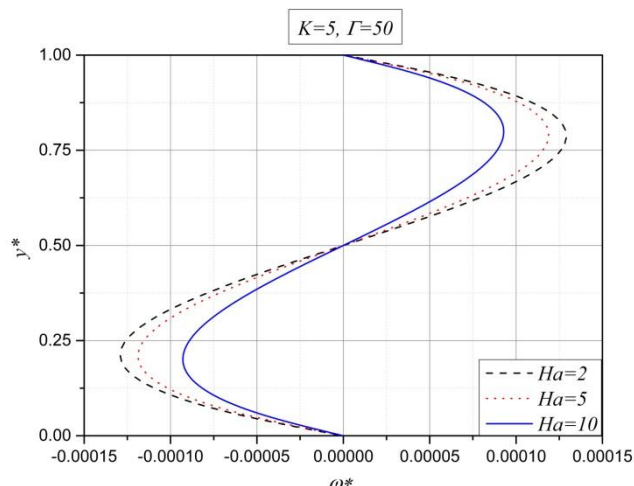
4.7 Uticaj parametra sprezanja K na profil temperature



4.8 Uticaj parametra sprezanja K na indukovano magnetno polje

Uticaj parametra sprezanja K na indukovano magnetno polje, dat je na grafiku 4.8. Sa datog grafika se vidi da povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja indukovano magnetnog polja b po celoj visini kanala. Kako smo sa grafika 4.5 ustanovili da dopunska viskoznost λ povećava otpor strujanju, a kako je indukovano polje posledica kretanja elektroprovodnog fluida, onda je uticaj parametra sprezanja K na indukovano magnetno polje očekivan.

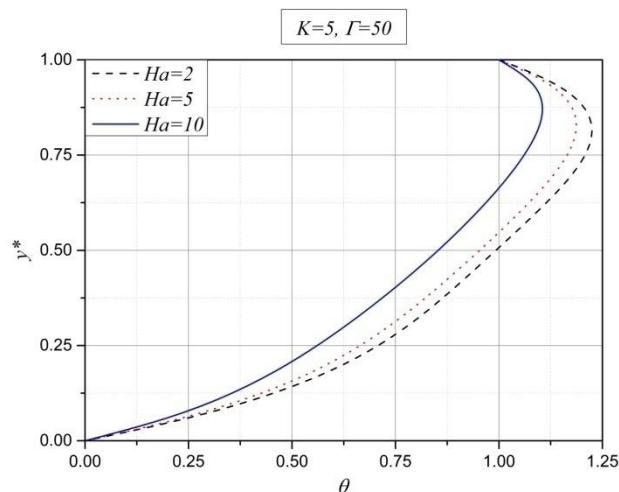
Uticaj Hartmannovog broja Ha na karakteristike razmatranog problema strujanja dat je na grafcima 4.9 - 4.12.

4.9 Uticaj Hartmannovog broja Ha na profil brzine4.10 Uticaj Hartmannovog broja Ha na mikrorotaciju

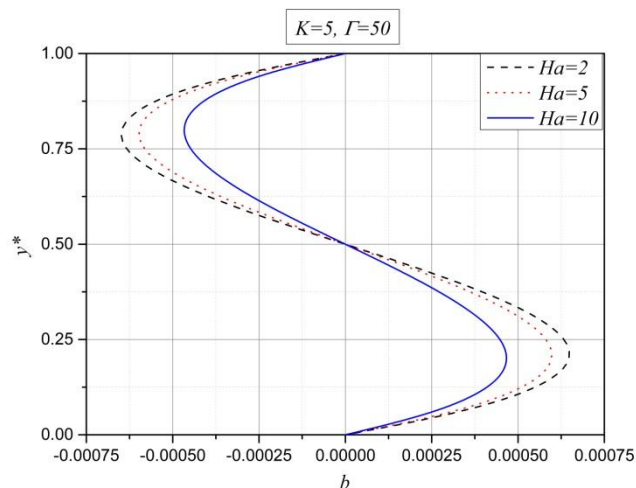
Analiza uticaja Hartmannovog broja Ha na profil brzine i mikrorotacije mikropolarnog fluida, izvršena je već u okviru poglavlja III. Donešeni zaključci na osnovu te analize, važe i za posmatrani model. Tako sa grafika 4.9 jasno možemo uočiti da porast Hartmannovog broja dovodi do smanjenja polja brzine na celoj širini kanala. Ovakav rezultat je potpuno očekivan jer predstavlja uticaj upravnog magnetnog polja, odnosno Lorentzove sile, na pravac strujanja elektroprovodnog fluida. Dejstvo Lorentzove sile je takvo da se ono suprotstavlja kretanju fluida, te stoga teži da smanji brzinu fluida, kao i da "poravna" profil brzine. Slično se sa grafika 4.10 može videti da za veće vrednosti Hartmannovog broja, dolazi do smanjenja mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti, što navodi na zaključak da povećanje intenziteta magnetnog polja dovodi do smanjenog uticaja karakteristika mikropolarnog fluida.

Sa slike 4.11 vidi se da pri nižim vrednostima Hartmannovog broja, postoji viskozno zagrevanje struje fluida u blizini ploča. Povećanje Hartmannovog broja dovodi do poravnjanja polja temperature u kanalu.

Na kraju, na grafiku 4.12 predstavljen je uticaj Hartmannovog broja na indukovano magnetno polje. Sa porastom Hartmannovog broja intezitet indukovano polja opada, jer u tom slučaju raste uticaj spoljašnje primenjenog polja u odnosu na indukovano. Slabljenje uticaja indukovano polja naspram spoljašnjeg posledica je smanjenja brzine strujanja mikropolarnog fluida sa porastom Hartmannovog broja.



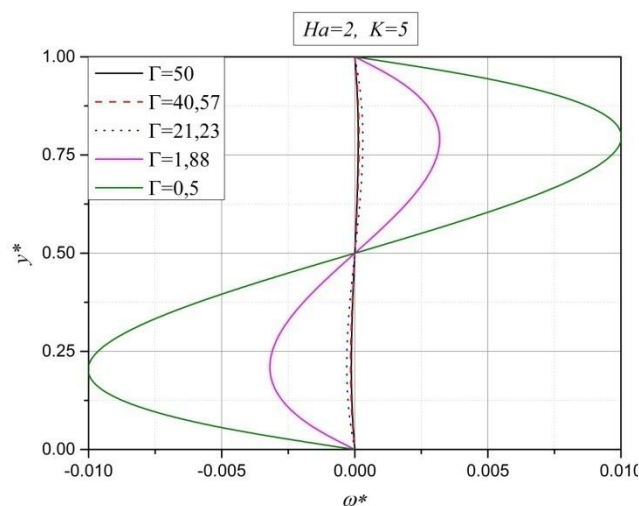
4.11 Uticaj Hartmannovog broja Ha na profil
bezdimeziona temperature



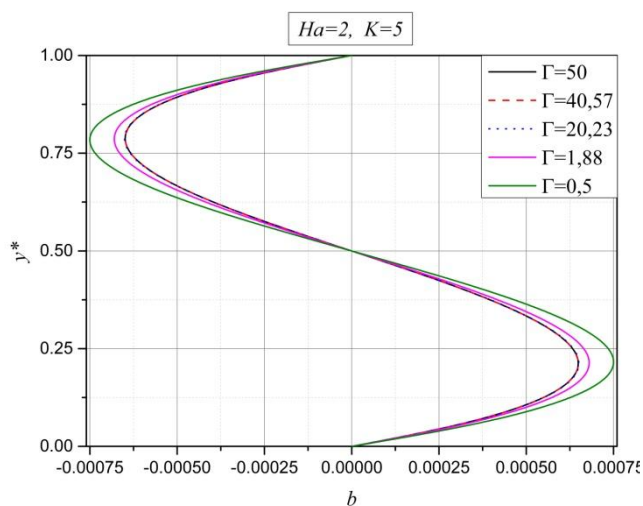
4.12 Uticaj Hartmannovog broja Ha na indukovano
magnetno polje

U nastavku analize MHD strujanja mikropolarnog fluida, već opisanog u ovom poglavlju, razmatraće se korišćenje sva tri dobijena rešenja za brzinu, mikrotaciju i indukovano polje. Prilikom analize fizičkih karakteristika koje imaju mikropolarni fluidi koji nas najčešće okružuju (poput ljudske i životinjske krvi ili tečnih kristala) može se doći do zaključka da njihove fizičke karakteristike odgovaraju prvom slučaju rešenja, tj. kada se uzme da je potkorena veličina rešenja jednačine (4.36) pozitivna. Međutim, ovo ne može da bude generalni zaključak za sve mikropolarne fluide, jer oni obuhvataju veliku klasu različitih fluida. Stoga je izvršena analiza uticaja karakterističnih parametara u slučaju da se koriste sva tri rešenja, tj. za širi spektar različitih mikropolarnih fluida. Naredni grafici pokazaće uticaj parametara sprežanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje brzine, mikrorotacije i indukovano polje mikropolarnog fluida. U daljim graphicima vrednosti $\Gamma = 50; 40,57; 0,5$, odgovaraju prvom rešenju jednačine (4.36), tj. slučaju kada je $a^2 - 4b > 0$. Vrednost parametra viskoznosti $\Gamma = 1,88$ odgovara slučaju kada je $a^2 - 4b = 0$, dok za vrednost $\Gamma = 21,23$ odgovara slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$. Poput parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , parametar sprežanja K uzima sledeće vrednosti u zavisnosti od vrednosti podkorene veličine $a^2 - 4b$. Za vrednosti $K = 5; 52,3; 70$ koristi se prvo rešenje jednačine (4.36), tj. kada je $a^2 - 4b > 0$. U slučaju kada je $K = 8,98$ važi da je $a^2 - 4b = 0$, odnosno kada je $K = 30$ odgovara slučaju kada je $a^2 - 4b < 0$.

Grafik 4.13 predstavlja uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na bezdimenzionu mikrorotaciju.



4.13 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju



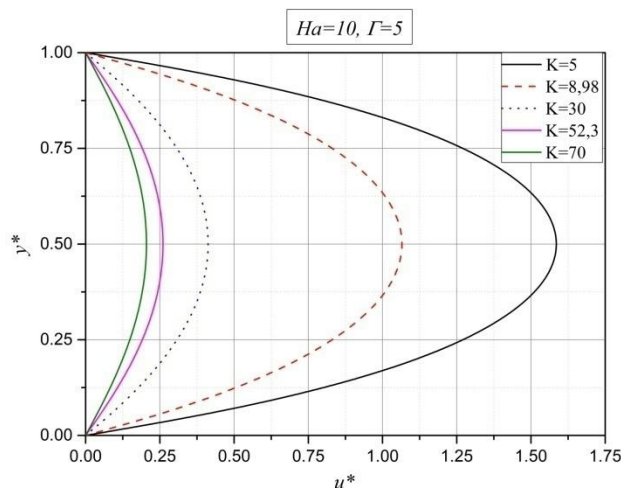
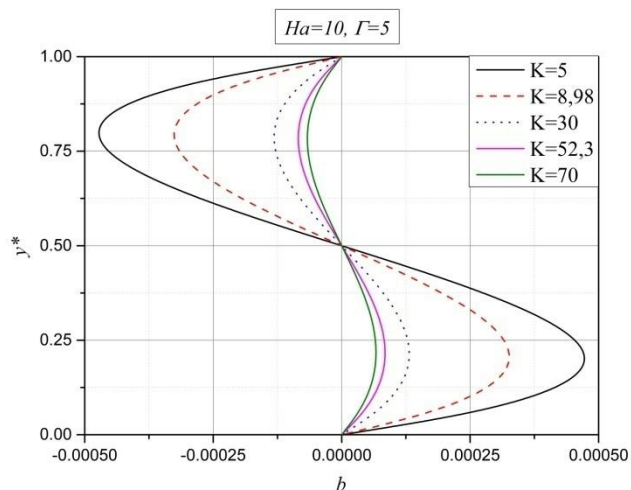
4.14 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na indukovano magnetno polje

Ako se tendencija promene intenziteta mikrorotacije sa povećanjem parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , koja je predstavljena na grafiku 4.13, uporedi sa već izvršenom analizom datom na grafiku 4.2, može se izvesti zaključak da je ponašanje mikrorotacije u zavisnosti od parametra viskoznosti mikrorotacije Γ isto za sva tri slučaja rešenja karakteristične jednačine kao i za prvi slučaj.

Ista situacija je i prilikom analize indukovano magnetnog polja b u zavisnosti od parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , što je prikazano na grafiku 4.14. Poređenjem ovog grafika sa grafikom 4.4 izvodi se jedinstven zaključak da sa povećanjem parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , odnosno povećanjem dopunske viskoznosti γ , dolazi do smanjenja po indukovano magnetnog polja po apsolutnoj vrednosti po celoj visini između ploča.

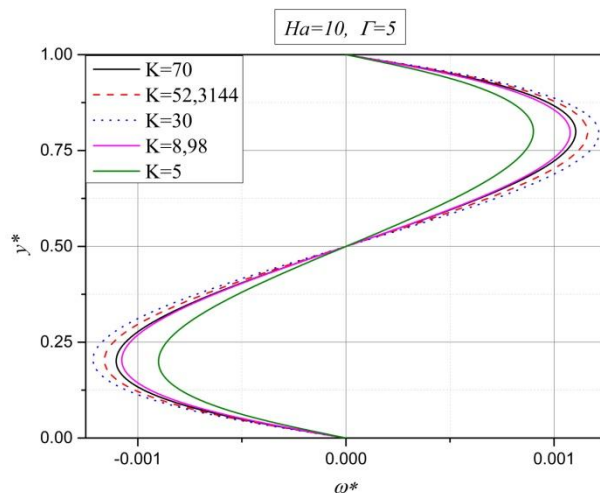
Naredni grafici daće uticaj parametra sprežanja K na polje brzine, mikrorotacije i indukovano magnetno polje.

Na graficima 4.15 i 4.16 predstavljen je uticaj parametra sprežanja K na brzinu strujanja fluida kao i na mikrorotaciju, respektivno.

4.15 Uticaj parametra sprezanja K na brzinu4.16 Uticaj parametra sprezanja K na indukovano magnetno polje

Tendencija promene brzine i indukovanog magnetnog polja sa promenom parametra sprezanja K , koja je predstavljena na graficima 4.15 i 4.16, u potpunosti odgovara već sprovedenoj analizi datoj na graficima 4.5 i 4.8. Sa datih grafika se vidi da povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja brzine i indukovanog magnetnog polja b po celoj širini kanala.

Međutim, kada vršimo analizu uticaja parametra sprezanja K na bezdimenzionu mikrorotaciju postoje izvesne razlike.

4.17 Uticaj parametra sprezanja K na mikrorotaciju

Sa grafika 4.17 se vidi da određene vrednosti parametra sprežanja K , za definisane vrednosti karakterističnih bezdimenzionalnih parametara (Ha, Γ i Rm), mogu izazvati povećanje ili smanjenje vektora mikrorotacije. Tri dobijena rešenja diferencijalne jednačine (4.36) omogućavaju određivanje tačnih vrednosti K za određene pojedine slučajeve. Ovo ukazuje na to da određena kombinacija definisanih vrednosti karakterističnih parametara, može uzrokovati isticanje svojstava mikropolarnog fluida.

4.4.

*Dodatak - konstante kod razmatranog problema*Za slučaj kada je $a^2 - 4b > 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \delta_1 = +\sqrt{r_1}, \quad \delta_2 = -\sqrt{r_1}, \quad \delta_3 = +\sqrt{r_2}, \quad \delta_4 = -\sqrt{r_2},$$

$$D_i = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{\delta_i^2}{D^*} - 2 \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad A_i = A + \delta_i D_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_9 &= D_1 \exp(\delta_1), \quad \mathfrak{T}_{10} = D_2 \exp(\delta_2), \quad \mathfrak{T}_{11} = D_3 \exp(\delta_3), \quad \mathfrak{T}_{12} = D_4 \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{T}_{13} = A_1 \exp(\delta_1), \\ \mathfrak{T}_{14} &= A_2 \exp(\delta_2), \quad \mathfrak{T}_{15} = A_3 \exp(\delta_3), \quad \mathfrak{T}_{16} = A_4 \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{T}_{17} = A_1 - \mathfrak{T}_{13}, \quad \mathfrak{T}_{18} = A_2 - \mathfrak{T}_{14}, \\ \mathfrak{T}_{19} &= A_3 - \mathfrak{T}_{15}, \quad \mathfrak{T}_{20} = A_4 - \mathfrak{T}_{16}, \quad \mathfrak{T}_{21} = \mathfrak{T}_9 - D_1, \quad \mathfrak{T}_{22} = \mathfrak{T}_{10} - D_2, \quad \mathfrak{T}_{23} = \mathfrak{T}_{11} - D_3, \quad \mathfrak{T}_{24} = \mathfrak{T}_{12} - D_4, \\ \mathfrak{T}_{25} &= \exp(\delta_1) - \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{T}_{26} = \exp(\delta_2) - \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{T}_{27} = \exp(\delta_3) - \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{T}_{28} = \mathfrak{T}_{21} - \mathfrak{T}_{24}, \\ \mathfrak{T}_{29} &= \mathfrak{T}_{22} - \mathfrak{T}_{24}, \quad \mathfrak{T}_{30} = \mathfrak{T}_{23} - \mathfrak{T}_{24}, \quad \mathfrak{T}_{31} = \mathfrak{T}_{17} - \mathfrak{T}_{20}, \quad \mathfrak{T}_{32} = \mathfrak{T}_{18} - \mathfrak{T}_{20}, \quad \mathfrak{T}_{33} = \mathfrak{T}_{19} - \mathfrak{T}_{20}, \\ \mathfrak{T}_{34} &= \mathfrak{T}_{27} \mathfrak{T}_{28} - \mathfrak{T}_{25} \mathfrak{T}_{30}, \quad \mathfrak{T}_{35} = \mathfrak{T}_{27} \mathfrak{T}_{29} - \mathfrak{T}_{26} \mathfrak{T}_{30}, \quad \mathfrak{T}_{36} = \mathfrak{T}_{27} \mathfrak{T}_{31} - \mathfrak{T}_{25} \mathfrak{T}_{33}, \quad \mathfrak{T}_{37} = \mathfrak{T}_{32} \mathfrak{T}_{27} - \mathfrak{T}_{26} \mathfrak{T}_{33}, \\ C_1 &= \frac{C \mathfrak{T}_{27} \mathfrak{T}_{35}}{\mathfrak{T}_{35} \mathfrak{T}_{36} - \mathfrak{T}_{34} \mathfrak{T}_{37}}, \quad C_2 = -\frac{\mathfrak{T}_{34}}{\mathfrak{T}_{35}} C_1, \quad C_3 = -\frac{1}{\mathfrak{T}_{27}} (\mathfrak{T}_{25} C_1 + \mathfrak{T}_{26} C_2), \quad C_4 = -(C_1 + C_2 + C_3), \\ D_1 &= -(D_1 C_1 + D_2 C_2 + D_3 C_3 + D_4 C_4), \quad D_4 = -(C + \mathfrak{T}_{13} C_1 + \mathfrak{T}_{14} C_2 + \mathfrak{T}_{15} C_3 + \mathfrak{T}_{16} C_4), \end{aligned}$$

$$M_1 = C_1 \delta_1 D_1, \quad M_2 = C_2 \delta_2 D_2, \quad M_3 = C_3 \delta_3 D_3, \quad M_4 = C_4 \delta_4 D_4,$$

$$N_1 = C_1 A_1 \delta_1, \quad N_2 = C_2 A_2 \delta_2, \quad N_3 = C_3 A_3 \delta_3, \quad N_4 = C_4 A_4 \delta_4,$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{4\delta_1^2} \left(M_1^2 + \frac{N_1^2}{B^* Rm} \right), \quad T_2 = \frac{1}{4\delta_2^2} \left(M_2^2 + \frac{N_2^2}{B^* Rm} \right), \quad T_3 = \frac{1}{4\delta_3^2} \left(M_3^2 + \frac{N_3^2}{B^* Rm} \right), \\ T_4 &= \frac{1}{4\delta_4^2} \left(M_4^2 + \frac{N_4^2}{B^* Rm} \right), \quad T_5 = \left(M_1 M_2 + \frac{N_1 N_2}{B^* Rm} \right), \quad T_6 = \frac{2}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \left(M_1 M_3 + \frac{N_1 N_3}{B^* Rm} \right), \\ T_7 &= \frac{2}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \left(M_1 M_4 + \frac{N_1 N_4}{B^* Rm} \right), \quad T_8 = \frac{2}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \left(M_2 M_3 + \frac{N_2 N_3}{B^* Rm} \right), \end{aligned}$$

$$\mathsf{T}_9 = \frac{2}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \left(\mathsf{M}_2 \mathsf{M}_4 + \frac{\mathsf{N}_2 \mathsf{N}_4}{B^* Rm} \right), \quad \mathsf{T}_{10} = \left(\mathsf{M}_3 \mathsf{M}_4 + \frac{\mathsf{N}_3 \mathsf{N}_4}{B^* Rm} \right), \quad \mathsf{T}_{11} = \frac{2}{\delta_1^2} \frac{C \mathsf{N}_1}{B^* Rm}, \quad \mathsf{T}_{12} = \frac{2}{\delta_2^2} \frac{C \mathsf{N}_2}{B^* Rm},$$

$$\mathsf{T}_{13} = \frac{2}{\delta_3^2} \frac{C \mathsf{N}_3}{B^* Rm}, \quad \mathsf{T}_{14} = \frac{2}{\delta_4^2} \frac{C \mathsf{N}_4}{B^* Rm}, \quad \mathsf{T}_{15} = \frac{C^2}{2B^* Rm},$$

$$D_8 = -(\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2 + \mathsf{T}_3 + \mathsf{T}_4 + \mathsf{T}_6 + \mathsf{T}_7 + \mathsf{T}_8 + \mathsf{T}_9 + \mathsf{T}_{11} + \mathsf{T}_{12} + \mathsf{T}_{13} + \mathsf{T}_{14}),$$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{16} = & \mathsf{T}_1 \exp(2\delta_1) + \mathsf{T}_2 \exp(2\delta_2) + \mathsf{T}_3 \exp(2\delta_3) + \mathsf{T}_4 \exp(2\delta_4) + \mathsf{T}_6 \exp(\delta_1 + \delta_3) + \\ & + \mathsf{T}_7 \exp(\delta_1 + \delta_4) + \mathsf{T}_8 \exp(\delta_2 + \delta_3) + \mathsf{T}_9 \exp(\delta_2 + \delta_4) + \mathsf{T}_{11} \exp(\delta_1) + \\ & + \mathsf{T}_{12} \exp(\delta_2) + \mathsf{T}_{13} \exp(\delta_3) + \mathsf{T}_{14} \exp(\delta_4) + \mathsf{T}_5 + \mathsf{T}_{10} + \mathsf{T}_{15}, \end{aligned}$$

$$D_7 = -\left(D_8 + \mathsf{T}_{16} + \frac{C}{\text{Pr} Ec} \right).$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b = 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad \xi_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}} a, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} a,$$

$$\mathfrak{S}_3 = \frac{\xi_1^2}{D^*} - 2, \quad \mathfrak{S}_4 = \frac{\xi_2^2}{D^*} - 2, \quad \mathfrak{S}_5 = \frac{2\xi_1}{D^*}, \quad \mathfrak{S}_6 = \frac{2\xi_2}{D^*},$$

$$\mathfrak{S}_{38} = \frac{1}{D^*} + \frac{2}{\xi_1^2}, \quad \mathfrak{S}_{39} = \frac{\xi_1}{D^*} - \frac{2}{\xi_1}, \quad \mathfrak{S}_{40} = \frac{1}{D^*} + \frac{2}{\xi_2^2}, \quad \mathfrak{S}_{41} = \frac{\xi_2}{D^*} - \frac{2}{\xi_2}, \quad \mathfrak{S}_{42} = \mathfrak{S}_{39} \exp(\xi_1),$$

$$\mathfrak{S}_{43} = (\mathfrak{S}_{38} + \mathfrak{S}_{39}) \exp(\xi_1), \quad \mathfrak{S}_{44} = \mathfrak{S}_{41} \exp(\xi_2), \quad \mathfrak{S}_{45} = (\mathfrak{S}_{40} + \mathfrak{S}_{41}) \exp(\xi_2), \quad \mathfrak{S}_{46} = A + \mathfrak{S}_3,$$

$$\mathfrak{S}_{47} = A + \mathfrak{S}_4, \quad \mathfrak{S}_{48} = (A + \mathfrak{S}_3) \exp(\xi_1), \quad \mathfrak{S}_{49} = (A + \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_5) \exp(\xi_1), \quad \mathfrak{S}_{50} = (A + \mathfrak{S}_4) \exp(\xi_2),$$

$$\mathfrak{S}_{51} = (A + \mathfrak{S}_4 + \mathfrak{S}_6) \exp(\xi_2), \quad \mathfrak{S}_{52} = \exp(\xi_1) - \exp(\xi_2), \quad \mathfrak{S}_{53} = \mathfrak{S}_{39} - \mathfrak{S}_{41}, \quad \mathfrak{S}_{54} = \mathfrak{S}_{42} - \mathfrak{S}_{44},$$

$$\mathfrak{S}_{55} = \mathfrak{S}_{46} - \mathfrak{S}_{47}, \quad \mathfrak{S}_{56} = \mathfrak{S}_{48} - \mathfrak{S}_{50}, \quad \mathfrak{S}_{57} = \mathfrak{S}_{54} - \mathfrak{S}_{53}, \quad \mathfrak{S}_{58} = \mathfrak{S}_{43} - \mathfrak{S}_{38}, \quad \mathfrak{S}_{59} = \mathfrak{S}_{45} - \mathfrak{S}_{40},$$

$$\mathfrak{S}_{60} = \mathfrak{S}_{56} - \mathfrak{S}_{55}, \quad \mathfrak{S}_{61} = \mathfrak{S}_{49} - \mathfrak{S}_5, \quad \mathfrak{S}_{62} = \mathfrak{S}_{51} - \mathfrak{S}_6, \quad \mathfrak{S}_{63} = \mathfrak{S}_{52} \exp(-\xi_2), \quad \mathfrak{S}_{64} = \exp(\xi_1 - \xi_2),$$

$$\mathfrak{S}_{65} = (\mathfrak{S}_{57} - \mathfrak{S}_{59} \mathfrak{S}_{63}), \quad \mathfrak{S}_{66} = \mathfrak{S}_{58} - \mathfrak{S}_{59} \mathfrak{S}_{64}, \quad \mathfrak{S}_{67} = \mathfrak{S}_{60} - \mathfrak{S}_{62} \mathfrak{S}_{63}, \quad \mathfrak{S}_{68} = \mathfrak{S}_{61} - \mathfrak{S}_{62} \mathfrak{S}_{64},$$

$$C_5 = \frac{C \mathfrak{S}_{66}}{\mathfrak{S}_{65} \mathfrak{S}_{68} - \mathfrak{S}_{66} \mathfrak{S}_{67}}, \quad C_6 = -\frac{\mathfrak{S}_{65}}{\mathfrak{S}_{66}} C_5, \quad C_7 = -C_5, \quad C_8 = -\mathfrak{S}_{63} C_5 - \mathfrak{S}_{64} C_6,$$

$$D_2 = -(\mathfrak{I}_{38}C_6 + \mathfrak{I}_{53}C_5 + \mathfrak{I}_{40}C_8), \quad D_5 = -(\mathfrak{I}_{55}C_5 + \mathfrak{I}_5C_6 + \mathfrak{I}_6C_8),$$

$$M_5 = C_5\mathfrak{I}_3 + C_6\mathfrak{I}_5, \quad M_6 = C_7\mathfrak{I}_4 + C_8\mathfrak{I}_6, \quad M_7 = C_6\mathfrak{I}_3, \quad M_8 = C_8\mathfrak{I}_4,$$

$$N_5 = \xi_1(AC_5 + \mathfrak{I}_3C_5 + \mathfrak{I}_5C_6) + C_6(A + \mathfrak{I}_3), \quad N_6 = \xi_2(AC_7 + \mathfrak{I}_4C_7 + \mathfrak{I}_6C_8) + C_8(A + \mathfrak{I}_4),$$

$$N_7 = \xi_1C_6(A + \mathfrak{I}_3), \quad N_8 = \xi_2C_8(A + \mathfrak{I}_4),$$

$$T_{17} = M_5^2 + \frac{N_5^2}{B^*Rm}, \quad T_{18} = M_6^2 + \frac{N_6^2}{B^*Rm}, \quad T_{19} = 2\left(M_5M_6 + \frac{N_5N_6}{B^*Rm}\right), \quad T_{20} = 2\frac{CN_5}{B^*Rm}, \quad T_{21} = 2\frac{CN_6}{B^*Rm},$$

$$T_{22} = M_7^2 + \frac{N_7^2}{B^*Rm}, \quad T_{23} = M_8^2 + \frac{N_8^2}{B^*Rm}, \quad T_{24} = 2\left(M_7M_8 + \frac{N_7N_8}{B^*Rm}\right), \quad T_{25} = 2\left(M_5M_7 + \frac{N_5N_7}{B^*Rm}\right),$$

$$T_{26} = 2\left(M_6M_8 + \frac{N_6N_8}{B^*Rm}\right), \quad T_{27} = 2\left(M_5M_8 + M_6M_7 + \frac{N_5N_8 + N_6N_7}{B^*Rm}\right), \quad T_{28} = 2\frac{CN_7}{B^*Rm},$$

$$T_{29} = 2\frac{CN_8}{B^*Rm}, \quad T_{30} = \frac{C^2}{B^*Rm}, \quad T_{30}^* = T_{19} + T_{30}, \quad T_{31} = \frac{1}{4\xi_1^2}\left(T_{17} + \frac{3}{2\xi_1^2}T_{22} - \frac{1}{\xi_1}T_{25}\right),$$

$$T_{32} = \frac{1}{4\xi_2^2}\left(T_{18} + \frac{3T_{23}}{2\xi_2^2} - \frac{T_{26}}{\xi_2}\right), \quad T_{34} = \frac{1}{\xi_1^2}\left(T_{20} - \frac{2}{\xi_1}T_{28}\right), \quad T_{35} = \frac{1}{\xi_2^2}\left(T_{21} - \frac{2}{\xi_2}T_{29}\right), \quad T_{36} = \frac{T_{22}}{4\xi_1^2},$$

$$T_{37} = \frac{T_{23}}{4\xi_2^2}, \quad T_{39} = \frac{1}{2\xi_1^2}\left(\frac{T_{25}}{2} - \frac{T_{22}}{\xi_1}\right), \quad T_{40} = \frac{1}{2\xi_2^2}\left(\frac{T_{26}}{2} - \frac{T_{23}}{\xi_2}\right), \quad T_{42} = \frac{T_{28}}{\xi_1^2}, \quad T_{43} = \frac{T_{29}}{\xi_2^2},$$

$$D_{10} = -(T_{31} + T_{32} + T_{34} + T_{35}),$$

$$T_{44} = (T_{31} + T_{36} + T_{39})\exp(2\xi_1) + (T_{32} + T_{37} + T_{40})\exp(2\xi_2) + (T_{34} + T_{42})\exp(\xi_1) + \\ + (T_{35} + T_{43})\exp(\xi_2) + \frac{1}{2}T_{30}^* + \frac{1}{6}T_{27} + \frac{1}{12}T_{24},$$

$$D_9 = -\left(T_{44} + D_{10} + \frac{C}{\text{Pr}Ec}\right).$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$, konstante su:

$$r_1^* = \frac{1}{2}\left(a + i\sqrt{4b - a^2}\right), \quad r_2^* = \frac{1}{2}\left(a - i\sqrt{4b - a^2}\right), \quad r_1^* = \alpha + i\beta, \quad r_2^* = \alpha - i\beta,$$

$$\frac{1}{2}a = \alpha, \quad \frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2} = \beta, \quad R^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \theta_1 = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \theta_2 = \arctg \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = -\theta_1,$$

$$\eta_1 = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} + i \sin \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \eta_2 = \sqrt{R} \left(-\cos \frac{\theta_1}{2} - i \sin \frac{\theta_1}{2} \right),$$

$$\eta_3 = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} - i \sin \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \eta_4 = \sqrt{R} \left(-\cos \frac{\theta_1}{2} + i \sin \frac{\theta_1}{2} \right),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{R} \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt{R} \sin \frac{\theta_1}{2},$$

$$\eta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_4 = -\alpha_1 + i\beta_1,$$

$$\mathfrak{T}_1 = \beta_1 \left(\frac{1}{D^*} + \frac{2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \mathfrak{T}_2 = \alpha_1 \left(\frac{1}{D^*} - \frac{2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \mathfrak{T}_7 = \alpha_1 \mathfrak{T}_2 - \beta_1 \mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_8 = \alpha_1 \mathfrak{T}_1 + \beta_1 \mathfrak{T}_2,$$

$$N_9 = AC_9 + \mathfrak{T}_7 C_9 + \mathfrak{T}_8 C_{10}, \quad N_{10} = AC_{10} + \mathfrak{T}_7 C_{10} - \mathfrak{T}_8 C_9,$$

$$N_{11} = AC_{11} + \mathfrak{T}_7 C_{11} - \mathfrak{T}_8 C_{12}, \quad N_{12} = AC_{12} + \mathfrak{T}_8 C_{11} + \mathfrak{T}_7 C_{12},$$

$$\mathfrak{T}_{69} = \cos \beta_1 \exp \alpha_1, \quad \mathfrak{T}_{70} = \sin \beta_1 \exp \alpha_1, \quad \mathfrak{T}_{71} = \cos \beta_1 \sin(-\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{72} = \sin \beta_1 \exp(-\alpha_1),$$

$$\mathfrak{T}_{73} = [-\mathfrak{T}_1 \sin(\beta_1) + \mathfrak{T}_2 \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{74} = [\mathfrak{T}_2 \sin(\beta_1) + \mathfrak{T}_1 \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1),$$

$$\mathfrak{T}_{75} = [\mathfrak{T}_1 \sin \beta_1 + \mathfrak{T}_2 \cos \beta_1] \exp(-\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{76} = [\mathfrak{T}_1 \cos \beta_1 - \mathfrak{T}_2 \sin \beta_1] \exp(-\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{77} = A + \mathfrak{T}_7,$$

$$\mathfrak{T}_{79} = [(A + \mathfrak{T}_7) \cos(\beta_1) - \mathfrak{T}_8 \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{80} = [\mathfrak{T}_8 \cos(\beta_1) + (A + \mathfrak{T}_7) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1),$$

$$\mathfrak{T}_{81} = [(A + \mathfrak{T}_7) \cos(\beta_1) + \mathfrak{T}_8 \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1),$$

$$\mathfrak{T}_{82} = [(A + \mathfrak{T}_7) \sin(\beta_1) - \mathfrak{T}_8 \cos(\beta_1)] \exp(-\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{83} = \mathfrak{T}_{69} - \mathfrak{T}_{71}, \quad \mathfrak{T}_{84} = \mathfrak{T}_{73} + \mathfrak{T}_{75},$$

$$\mathfrak{T}_{86} = \mathfrak{T}_{79} - \mathfrak{T}_{81}, \quad \mathfrak{T}_{87} = 2\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_{84}, \quad \mathfrak{T}_{88} = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_{74}, \quad \mathfrak{T}_{89} = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_{76}, \quad \mathfrak{T}_{91} = \mathfrak{T}_8 - \mathfrak{T}_{80}, \quad \mathfrak{T}_{92} = \mathfrak{T}_8 + \mathfrak{T}_{82},$$

$$\mathfrak{T}_{93} = \mathfrak{T}_{92} \mathfrak{T}_{83} - \mathfrak{T}_{86} \mathfrak{T}_{72}, \quad \mathfrak{T}_{94} = \mathfrak{T}_{91} \mathfrak{T}_{72} + \mathfrak{T}_{92} \mathfrak{T}_{70}, \quad \mathfrak{T}_{95} = C \mathfrak{T}_{72}, \quad \mathfrak{T}_{96} = \mathfrak{T}_{89} \mathfrak{T}_{70} - \mathfrak{T}_{72} \mathfrak{T}_{88},$$

$$\mathfrak{T}_{97} = \mathfrak{T}_{87} \mathfrak{T}_{72} - \mathfrak{T}_{89} \mathfrak{T}_{83},$$

$$C_9 = \frac{\mathfrak{I}_{96}}{\mathfrak{I}_{97}} C_{10}, \quad C_{10} = \frac{\mathfrak{I}_{95} \mathfrak{I}_{97}}{(\mathfrak{I}_{93} \mathfrak{I}_{96} + \mathfrak{I}_{94} \mathfrak{I}_{97})}, \quad C_{11} = -C_9, \quad C_{12} = -\frac{1}{\mathfrak{I}_{72}} (\mathfrak{I}_{83} C_9 + \mathfrak{I}_{70} C_{10}),$$

$$D_3 = -(2\mathfrak{I}_2 C_9 + \mathfrak{I}_1 C_{10} + \mathfrak{I}_1 C_{12}), \quad D_6 = \mathfrak{I}_8 C_{12} - \mathfrak{I}_8 C_{10},$$

$$M_9 = \mathfrak{I}_7 C_9 + \mathfrak{I}_8 C_{10}, \quad M_{10} = \mathfrak{I}_7 C_{10} - \mathfrak{I}_8 C_9, \quad M_{11} = \mathfrak{I}_7 C_{11} - \mathfrak{I}_8 C_{12}, \quad M_{12} = \mathfrak{I}_8 C_{11} + \mathfrak{I}_7 C_{12},$$

$$N_{13} = \alpha_1 N_{10} - \beta_1 N_9, \quad N_{14} = \alpha_1 N_9 + \beta_1 N_{10}, \quad N_{15} = -(\beta_1 N_{11} + \alpha_1 N_{12}), \quad N_{16} = \beta_1 N_{12} - \alpha_1 N_{11},$$

$$R_1 = M_9^2 + \frac{N_{14}^2}{B^* R m}, \quad R_2 = M_{10}^2 + \frac{N_{13}^2}{B^* R m}, \quad R_3 = M_{11}^2 + \frac{N_{16}^2}{B^* R m}, \quad R_4 = M_{12}^2 + \frac{N_{15}^2}{B^* R m},$$

$$R_5 = M_9 M_{10} + \frac{N_{13} N_{14}}{B^* R m}, \quad R_6 = M_{11} M_{12} + \frac{N_{15} N_{16}}{B^* R m}, \quad R_7 = 2 \left(M_9 M_{11} + \frac{N_{14} N_{16}}{B^* R m} \right),$$

$$R_8 = 2 \left(M_{10} M_{12} + \frac{N_{13} N_{15}}{B^* R m} \right), \quad R_9 = M_9 M_{12} + M_{10} M_{11} + \frac{N_{13} N_{16} + N_{14} N_{15}}{B^* R m}, \quad R_{10} = \frac{2C N_{13}}{B^* R m},$$

$$R_{11} = \frac{2C N_{14}}{B^* R m}, \quad R_{12} = \frac{2C N_{15}}{B^* R m}, \quad R_{13} = \frac{2C N_{16}}{B^* R m}, \quad R_{14} = \frac{1}{2} R_1 - \frac{1}{2} R_2, \quad R_{15} = \frac{1}{2} R_3 - \frac{1}{2} R_4,$$

$$R_{16} = \frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_2, \quad R_{17} = \frac{1}{2} R_3 + \frac{1}{2} R_4, \quad R_{18} = \frac{1}{2} R_7 - \frac{1}{2} R_8, \quad R_{19} = \frac{1}{2} (R_7 + R_8) + \frac{C^2}{B^* R m},$$

$$R_{20} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{14}\alpha_1 - R_5\beta_1), \quad R_{21} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{14}\beta_1 + R_5\alpha_1),$$

$$R_{22} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{15}\alpha_1 + R_6\beta_1), \quad R_{23} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{15}\beta_1 - R_6\alpha_1), \quad R_{24} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{10}\alpha_1 + R_{11}\beta_1),$$

$$R_{25} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{11}\alpha_1 - R_{10}\beta_1), \quad R_{26} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{13}\beta_1 - R_{12}\alpha_1), \quad R_{27} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{13}\alpha_1 + R_{12}\beta_1),$$

$$R_{28} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{20}\alpha_1 - R_{21}\beta_1), \quad R_{29} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{20}\beta_1 + R_{21}\alpha_1),$$

$$R_{30} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{22}\alpha_1 - R_{23}\beta_1), \quad R_{31} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{23}\alpha_1 + R_{22}\beta_1),$$

$$R_{32} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{24}\alpha_1 + R_{25}\beta_1), \quad R_{33} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{25}\alpha_1 - R_{24}\beta_1), \quad R_{34} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{27}\alpha_1 - R_{26}\beta_1),$$

$$R_{35} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{26}\alpha_1 + R_{27}\beta_1), \quad R_{36} = \frac{R_{16}}{4\alpha_1^2}, \quad R_{37} = \frac{R_{17}}{4\alpha_1^2}, \quad R_{38} = \frac{R_{18}}{4\beta_1^2}, \quad R_{39} = \frac{R_9}{4\beta_1^2},$$

$$D_{12} = R_{38} - (R_{28} + R_{36} + R_{30} + R_{37} + R_{33} + R_{34}),$$

$$\begin{aligned} R_{40} = & [R_{28} \cos(2\beta_1) + R_{29} \sin(2\beta_1) + R_{36}] \exp(2\alpha_1) + \\ & [R_{30} \cos(2\beta_1) - R_{31} \sin(2\beta_1) + R_{37}] \exp(-2\alpha_1) + \\ & + [R_{32} \sin(\beta_1) + R_{33} \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1) + \\ & [R_{34} \cos(\beta_1) - R_{35} \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1) - \\ & - R_{38} \cos(2\beta_1) - R_{39} \sin(2\beta_1) + \frac{1}{2} R_{19}, \end{aligned}$$

$$D_{11} = -\frac{C}{\Pr Ec} - R_{40} - D_{12}.$$

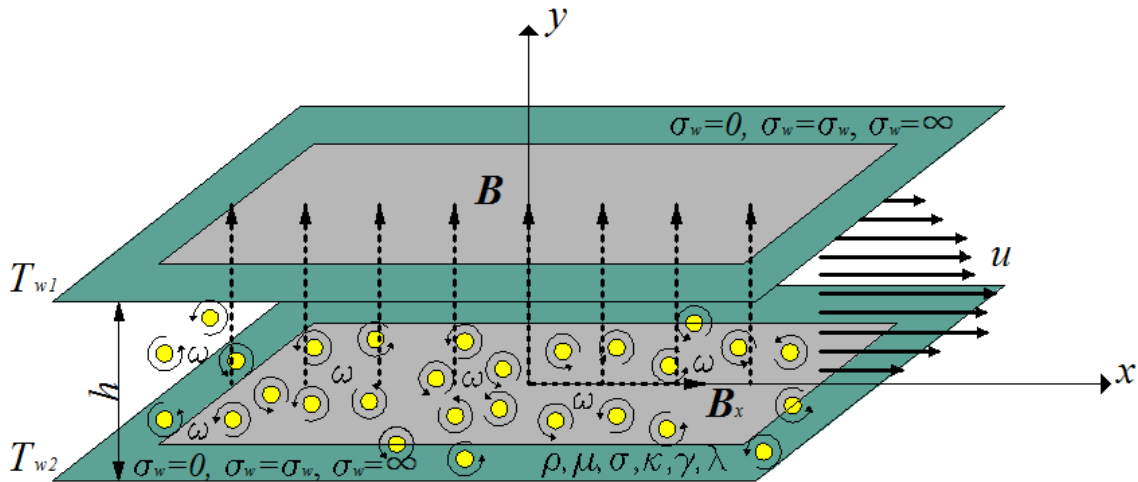
- V poglavlje -

5. Promenljiva elektroprovodnost ploča

5.1.

Fizički i matematički model razmatranog problema

U ovom delu disertacije analiziraće se uticaj promenljive elektroprovodnosti ploča σ_w na strujanje mikropolarnog fluida. Razmatrani fizički model dat je na slici 5. i predstavlja MHD strujanje mikropolarnog fluida između dve ploče koje se prostiru u x i z pravcu, a na međusobnom su odstojanju h . Analiza MHD strujanja mikropolarnog fluida vrši se pod pretpostavkom da je fluid konstantne elektroprovodnosti, dok gornja i donja ploča imaju proizvoljnu elektroprovodnost, a slučaj se tretira kao jednodimenzioni.



5. Fizički model razmatranog strujanja

Potpuno razvijeno strujanje mikropolarnog fluida, odvija se u pravcu ose x usled konstantnog pada pritiska. Upravno na pravac strujanja fluida, u pravcu y ose, deluje spoljašnje magnetno polje intenziteta B . Usled strujanja elektroprovodnog fluida i dejstva spoljašnjeg magnetno polja, dolazi do indukcije unutrašnjeg magnetnog polja intenziteta B_x u pravcu

strujanja fluida. Pod prepostavkom da Reynoldsov magnetni broj uzima vrednost oko jedinice, indukovano magnetno polje se ne zanemaruje. Pri strujanju mikropolarnog fluida, gornja i donja ploča se održavaju na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2} , respektivno, pri čemu je $T_{w1} > T_{w2}$.

Za ovako definisani problem, vektori brzine i magnetnog polja su:

$$\mathbf{v} = u\vec{i}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}. \quad (5.2)$$

Ovako definisani fizički model, matematički se opisuje sledećim sistemom jednačina, koji je u prethodnom poglavlju izveden:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} + \frac{B}{\mu_0} \frac{dB_x}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (5.3)$$

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du}{dy} - 2\lambda\omega = 0, \quad (5.4)$$

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{1}{\sigma\mu_0} \left(\frac{dB_x}{dy} \right)^2 = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\sigma\mu_0} \frac{d^2 B_x}{dy^2} + B \frac{du}{dy} = 0. \quad (5.6)$$

Sa ciljem da dati sistem jednačina svedemo na bezdimenzionu formu, uvode se sledeće već dobro poznate bezdimenzione veličine:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{y}{h}, u^* = \frac{u}{U}, U = \frac{h^2 P}{\mu}, P = -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \\ \omega^* &= \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0 = \frac{U}{h}, \theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}, b = \frac{B_x}{B_0}, \\ K &= \frac{\lambda}{\mu}, \Gamma = \frac{\gamma}{\mu h^2}, Ha = Bh \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \\ Ec &= \frac{U^2}{c_p (T_1 - T_2)}, Re = \frac{U_0 h}{\nu}, Rm = \sigma\mu_0 U h. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sada sistem jednačina (5.3) - (5.6) u bezdimenzionoj formi dobija sledeći oblik:

$$(1+K)\frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} + K\frac{d\omega^*}{dy^*} + \frac{Ha^2}{Rm}\frac{db}{dy^*} + Re P = 0, \quad (5.8)$$

$$\Gamma\frac{d^2 \omega^*}{dy^{*2}} - K\frac{du^*}{dy^*} - 2K\omega^* = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} + (1+K)Pr Ec \left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + Pr Ec \frac{Ha^2}{Rm^2} \left(\frac{db}{dy^*}\right)^2 = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{Rm}\frac{d^2 b}{dy^{*2}} + \frac{du^*}{dy^*} = 0. \quad (5.11)$$

Što se tiče graničnih uslova za zadate bezdimenzione jednačine sistema (5.8) - (5.11), kako su ploče nepokretne važe bezdimenzioni granični uslovi za brzinu i mikrorotaciju definisani sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} u^* = 0, \omega^* = 0, \quad \text{za } y^* = 0, \\ u^* = 0, \omega^* = 0, \quad \text{za } y^* = 1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dok za temperaturu uzimamo klasične izotermne granične uslove, odnosno:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad \text{za } y^* = 0, \\ \theta = 1 \quad \text{za } y^* = 1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Kako bi smo rešili sistem jednačina (5.8) - (5.11), neophodno je još definisati da li su zidovi kanala neprovodni, konačne provodnosti ili idealno provodne.

Kako smo u prethodnim slučajevima već razmatrali primere kod kojih su ploče između kojih struji fluid neprovodne, u ovom delu disertacije, bavićemo se problemom kod kojih su zidovi kanala konačne provodnosti ili idealno provodne.

Za neprovodne zidove već smo definisali granični uslov, koji je glasio:

$$\begin{aligned} b &= 0 \quad \text{za} \quad y^* = 0, \\ b &= 0 \quad \text{za} \quad y^* = 1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Međutim u slučaju kada su ploče konačne provodnosti ili idealno provodne, kao kod razmatranog problema, granični uslovi glase:

$$\begin{aligned} c \frac{\partial b}{\partial y^*} + b &= 0 \quad \text{za} \quad y^* = 0, \\ c \frac{\partial b}{\partial y^*} - b &= 0 \quad \text{za} \quad y^* = 1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

gde je sa c označen odnos provodnosti zida i fluida $c = \sigma_w t_w / \sigma h$. Elektromagnetni granični uslovi direktno zavise od elektroprovodnosti zidova kanala σ_w . Postoje tri karakteristična slučaja: neprovodne ploče $\sigma_w = 0$, slučaj $\sigma_w > 0$, koji uključuje ploče konačne provodnosti i za idealno provodne $\sigma_w \rightarrow \infty$.

Sada kada smo definisali sistem jednačina koji opisuju problem i zadali odgovarajuće granične uslove, možemo pristupiti rešavanju ovog sistema. Tako se posle par matematičkih operacija iz jednačina (5.8) i (5.9) dobija sledeća diferencijalna jednačina četvrtog reda za mikrorotaciju:

$$\frac{d^4 \omega^*}{dy^{*4}} - a \frac{d^2 \omega^*}{dy^{*2}} + b \omega^* = 0, \quad (5.11)$$

u kojoj su konstante a i b definisane na sledeći način:

$$a = RmB^* - (A-2)D^*, \quad b = 2RmB^*D^*, \quad (5.12)$$

dok su:

$$A = \frac{K}{1+K}, \quad B^* = \frac{1}{1+K} \frac{Ha^2}{Rm}, \quad C = \frac{ReP}{1+K}, \quad D^* = \frac{K}{\Gamma}. \quad (5.13)$$

Slično kao i pri rešavanju diferencijalne jednačine četvrtog reda u prethodnim slučajevima, tako i u ovom slučaju pri rešavanju jednačine (5.11) postoje tri moguća rešenja za

mikrorotaciju ω u zavisnosti od korena karakteristične jednačine. Ta rešenja data su sledećim izrazima:

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b > 0$

$$\omega^* = C_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \exp(\delta_4 y^*), \quad (5.14)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b = 0$

$$\omega^* = (C_5 + C_6 y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (C_7 + C_8 y^*) \exp(\xi_2 y^*), \quad (5.15)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b < 0$

$$\begin{aligned} \omega^* = & \left[C_9 \cos(\beta_1 y^*) + C_{10} \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[C_{11} \cos(\beta_1 y^*) + C_{12} \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Respektivno već datim rešenjima za mikrorotaciju, slede rešenja za brzinu:

$$u^* = C_1 D_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 D_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 D_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 D_4 \exp(\delta_4 y^*) + D_1, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} u^* = & \left[\frac{1}{D^*} (C_6 + \xi_1 C_5) - 2 \frac{C_5}{\xi_1} + 2 \frac{C_6}{\xi_1^2} \right] \exp(\xi_1 y^*) + \\ & + \left[\frac{1}{D^*} (C_8 + \xi_2 C_7) - 2 \frac{C_7}{\xi_2} + 2 \frac{C_8}{\xi_2^2} \right] \exp(\xi_2 y^*) + \\ & + \left(\frac{1}{D^*} \xi_1 C_6 - 2 \frac{C_6}{\xi_1} \right) y \exp(\xi_1 y) + \left(\frac{1}{D^*} \xi_2 C_8 - 2 \frac{C_8}{\xi_2} \right) y \exp(\xi_2 y) + D_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} u^* = & \left[(-\Im_1 C_9 + \Im_2 C_{10}) \sin(\beta_1 y^*) + (\Im_1 C_{10} + \Im_2 C_9) \cos(\beta_1 y^*) \right] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[-(\Im_1 C_{11} + \Im_2 C_{12}) \sin(\beta_1 y^*) + (\Im_1 C_{12} - \Im_2 C_{11}) \cos(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*) + D_3, \end{aligned} \quad (5.19)$$

zatim rešenja za temperaturu:

$$\begin{aligned}
\theta = & -(1+K) \Pr Ec \left[T_1 \exp(2\delta_1 y^*) + T_2 \exp(2\delta_2 y^*) + T_3 \exp(2\delta_3 y^*) + \right. \\
& + T_4 \exp(2\delta_4 y^*) + T_6 \exp((\delta_1 + \delta_3) y^*) + T_7 \exp((\delta_1 + \delta_4) y^*) + \\
& + T_8 \exp((\delta_2 + \delta_3) y^*) + T_9 \exp((\delta_2 + \delta_4) y^*) + T_{11} \exp(\delta_1 y^*) + T_{12} \exp(\delta_2 y^*) + \\
& \left. + T_{13} \exp(\delta_3 y^*) + T_{14} \exp(\delta_4 y^*) + (T_5 + T_{10} + T_{15}) y^{*2} + D_7 y^* + D_8 \right], \tag{5.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & -(1+K) \Pr Ec \left\{ T_{31} \exp(2\xi_1 y^*) + T_{32} \exp(2\xi_2 y^*) + \right. \\
& + T_{34} \exp(\xi_1 y^*) + T_{35} \exp(\xi_2 y^*) + T_{36} y^{*2} \exp(2\xi_1 y^*) + T_{37} y^{*2} \exp(2\xi_2 y^*) + \\
& + T_{39} y^* \exp(2\xi_1 y^*) + T_{40} y^* \exp(2\xi_2 y^*) + T_{42} y^* \exp(\xi_1 y^*) + T_{43} y^* \exp(\xi_2 y^*) + \\
& \left. + \frac{1}{2} T_{30}^* y^{*2} + \frac{1}{6} T_{27} y^{*3} + \frac{1}{12} T_{24} y^{*4} + D_9 y^* + D_{10} \right\}, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & -(1+K) \Pr Ec \left\{ \left[R_{28} \cos(2\beta_1 y^*) + R_{29} \sin(2\beta_1 y^*) + R_{36} \right] \exp(2\alpha_1 y^*) + \right. \\
& + \left[R_{30} \cos(2\beta_1 y^*) - R_{31} \sin(2\beta_1 y^*) + R_{37} \right] \exp(-2\alpha_1 y^*) + \\
& + \left[R_{32} \sin(\beta_1 y^*) + R_{33} \cos(\beta_1 y^*) \right] \exp(\alpha_1 y^*) + \\
& + \left[R_{34} \cos(\beta_1 y^*) - R_{35} \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*) - \\
& \left. - R_{38} \cos(2\beta_1 y^*) - R_{39} \sin(2\beta_1 y^*) + \frac{1}{2} R_{19} y^{*2} + D_{11} y^* + D_{12} \right\}, \tag{5.22}
\end{aligned}$$

i na kraju rešenja za indukovano magnetno polje:

$$\begin{aligned}
b = & -\frac{1}{B^*} \left[Cy^* + C_1 A_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 A_2 \exp(\delta_2 y^*) + \right. \\
& \left. + C_3 A_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 A_4 \exp(\delta_4 y^*) + D_4 \right], \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = & -\frac{1}{B^*} \left[Cy^* + (AC_5 + \Im_3 C_5 + \Im_5 C_6) \exp(\xi_1 y^*) + \right. \\
& + (AC_7 + \Im_4 C_7 + \Im_6 C_8) \exp(\xi_2 y^*) + \\
& \left. + C_6 (A + \Im_3) y^* \exp(\xi_1 y^*) + C_8 (A + \Im_4) y^* \exp(\xi_2 y^*) + D_5 \right], \tag{5.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = & -\frac{1}{B^*} \left\{ Cy^* + [N_9 \cos(\beta_1 y^*) + N_{10} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \right. \\
& \left. + [N_{11} \cos(\beta_1 y^*) + N_{12} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + D_6 \right\}. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

I u ovom, kao i u prethodnim slučajevima izostavljenje su konstante koje se javljaju u izrazima (5.14) - (5.25) zbog njihovog velikog broja, ali su date u dodatku disertacije.

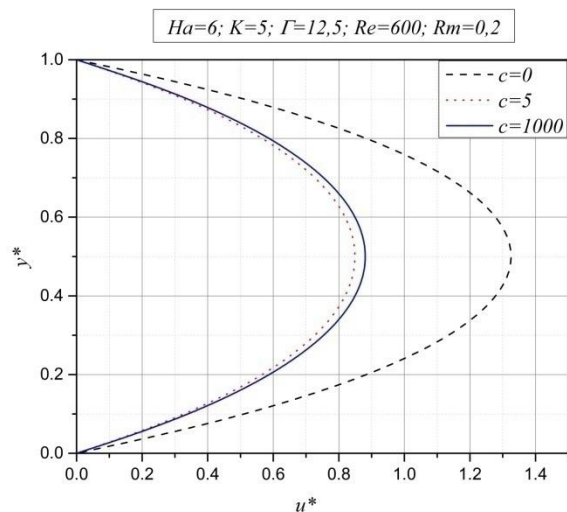
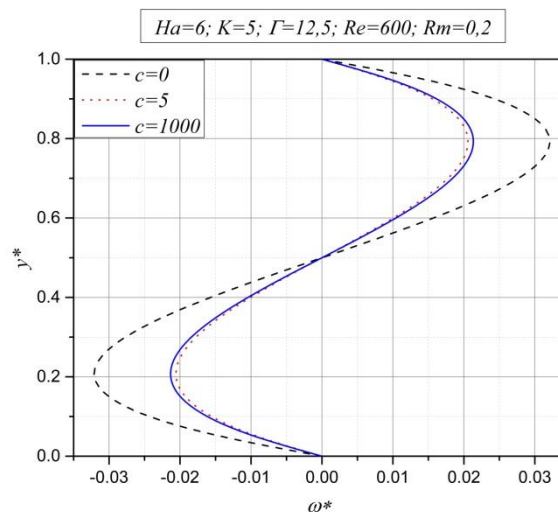
5.2.

Analiza rezultata razmatranog problema

Kako je u prethodnim poglavljima već vršena analiza uticaja fizičkih karakteristika mikropolaranog fluida, preko parametra sprezanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , na razmatrani problem strujanja fluida, a uz to analiziran i uticaj magnetnog preko Hartmannovog broja Ha , kod ovog problema skoncentrisaćemo se uglavnom na analizu uticaja promjenjive elektroprovodnosti zida na polje brzine, mikrorotacije, temperature i indukovano magnetnog polja mikropolaranog fluida. Tokom izrade doktorske disertacije, deo rezultata objavljen je u okviru više radova objavljenih na naučnim skupovima i časopisima, tako se rezultati dobijeni prilikom analize uticaja promjenjive elektroprovodnosti zidova na strujanje mikropolaranog fluida mogu se naći u okviru literature [85].

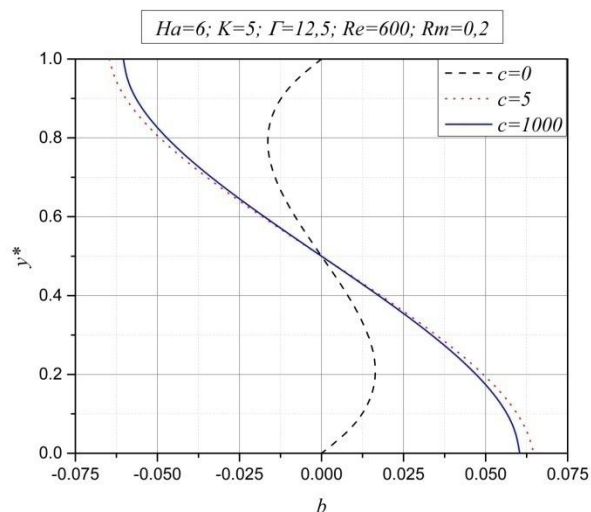
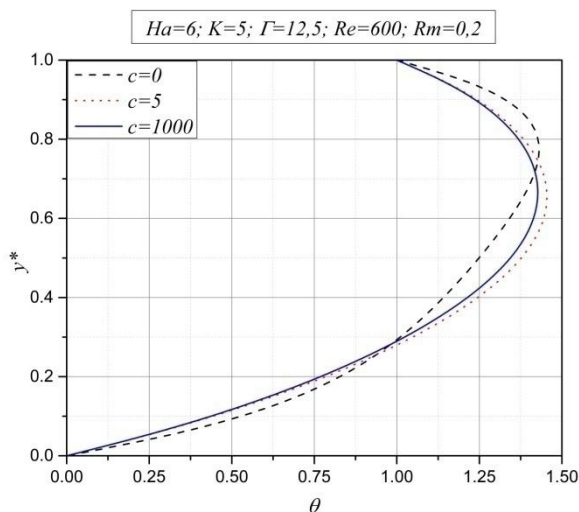
Stoga će prva četiri grafika dati uticaj promjenjive elektroprovodnosti zidova preko c ($c = \sigma_w t_w / \sigma h$) na polje brzine, mikrorotacije, indukovano magnetnog polja i temperature.

Sa grafika 5.1, koji predstavlja uticaj promjenjive elektroprovodnosti zidova na brzinu, može se uočiti da u slučaju neprovodnih ploča ($c=0$) profil brzine je izraženiji nego kada su ploče konačne provodnosti ($c=5$) ili približno beskonačne provodnosti ($c=1000$). Takođe se može uočiti da povećanje elektroprovodnosti zidova dovodi do smanjenja uticaja spoljašnjeg magnetnog polja, pa tako imamo povećanje intenziteta brzine za slučaj kada je $c=1000$ u odnosu na slučaj kada je $c=5$.

5.1 Profil brzine za različite vrednosti c 5.2 Uticaj c na mikrorotaciju

Na narednom grafiku, 5.2, dat je uticaj elektroprovodnosti ploča na polje mikrorotacije. Vidi se da je tendencija promene mikrorotacije potpuno ista kao i kod brzine, tj. u slučaju kada se ploče mogu smatrati elektro neprovodnim ($c=0$), mikrorotacija ima najveći intenzitet po apsolutnoj vrednosti, dok za neke konačne vrednosti elektro provodnosti ($c=5$) dolazi do opadanja intenziteta mikrorotacije, da bi u slučaju potpune provodnosti ploča ($c=1000$) ponovo došlo do malog porasta intenziteta mikrorotacije.

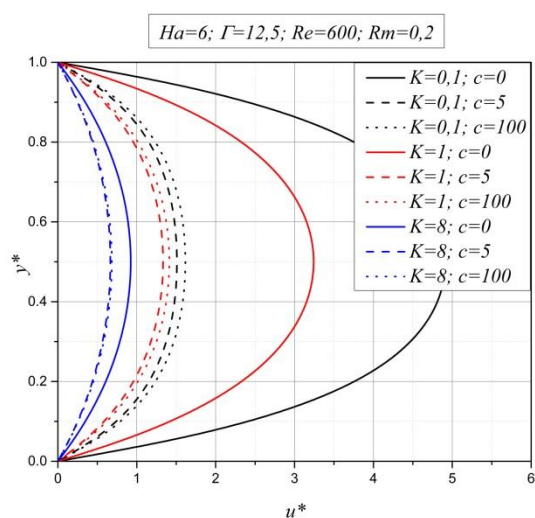
Naredni grafik 5.3 prikazuje promenu idnukovanog magnetnog polja za različite vrednosti c .

5.3 Profil indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti c 5.4 Uticaj c na bezdimenzionu temepaturu

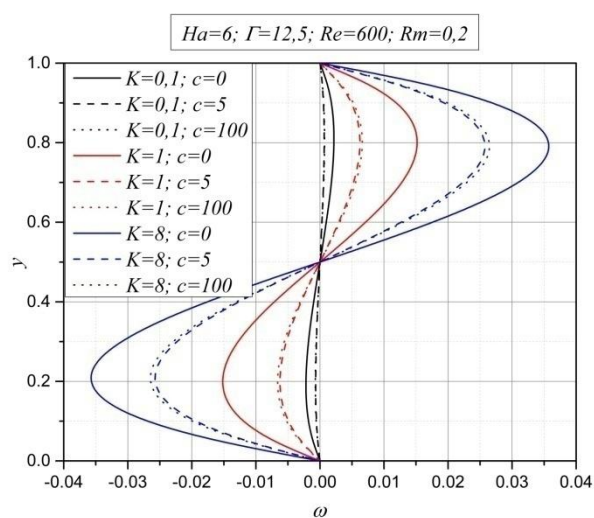
U slučaju neprovodnih zidova ($c = 0$) struja ne može da uđe u zid ploča sa strane fluida, što kao posledicu ima nestajanje normalne komponente gustine struje na zidu. Kako struja ne može da uđe u zidove, strujno kolo se zatvara u viskoznim graničnim slojevima u okolini zida. Indukovano magnetno polje B_x predstavlja strujnu funkciju električne struje, a linije $B_x = \text{const.}$ su strujne linije struje. U tom slučaju indukovano magnetno polje na zidovima ploča ima vrednost nula. Dok u slučaju kada su zidovi konačne električne provodnosti ($c = 5$), indukovano magnetno polje ima maksimalne vrednosti na zidovima u poređenju sa slučajem beskonačne elektroprovodnosti zidova ($c = 1000$).

Grafik 5.4 daje uticaj elektroprovodnosti ploča na profil temeprature. Sa grafika se zaključuje da kod neprovodnih ploča ($c = 0$) viskozno zagrevanje dovodi do povećanja temperature u blizini ploča, dok u slučaju konačne ($c = 5$) i približno beskonačne ($c = 1000$) provodnosti ploča viskozno zagrevanje i Jouleova toplota dovode do povećanja intenziteta temperature u sredini strujnog prostora.

Kako je cilj disertacije analiza mikropolarnih fluida, te samim tim analiza uticaja karakterističnih parametra mikropolarnih fluida K i Γ na karakteristike strujanja, u daljem delu ovog poglavlja razmotrićemo međusobni uticaj parametra sprežanja K i elektroprovodnosti ploča na profil brzine, mikrorotacije, indukovano polja i temeprature, a zatim i uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ zajedno sa promenjivom elektroprovodnošću ploča.



5.5 Profil brzine za reazličite vrednosti c i parematra sprežanja K

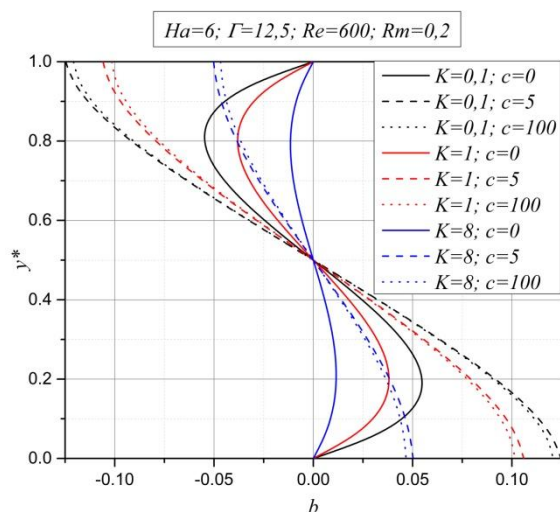


5.6 Uticaj c i parametra sprežanja K na mikrorotaciju

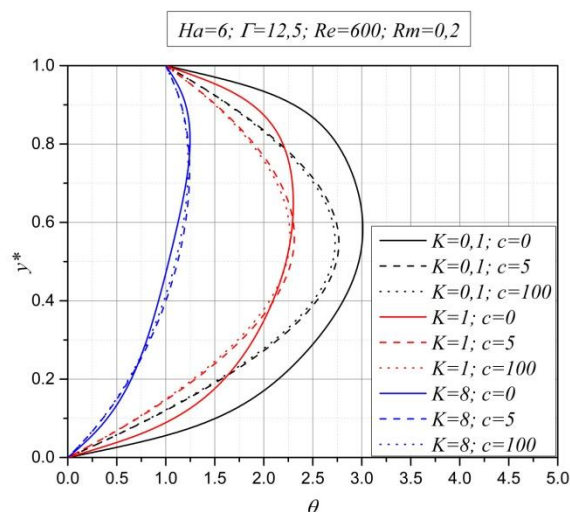
Grafici 5.5 i 5.6 daju uticaje parametra sprezanja K i elektroprovodnosti ploča na polje brzine i mikrorotacije.

Sa grafika 5.5 se vidi povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja intenziteta brzine po celoj visini strujnog prostora, pri čemu smanjenju intenziteta brzine doprinosi i to da su zidovi konačne elektroprovodnosti.

Kod mikrorotacije je situacija nešto drugačija, jer povećanje parametra sprezanja K dovodi do povećanja apsolutne vrednosti mikrorotacije, pa tako u slučaju kada su zidovi neprovodni ($c=0$), a K najveće, i mikrorotacija dostiže svoju maksimalnu vrednost, što je prikazano na grafiku 5.6.



5.7 Indukovano magnetno polje za različite vrednosti c i parametra sprezanja K



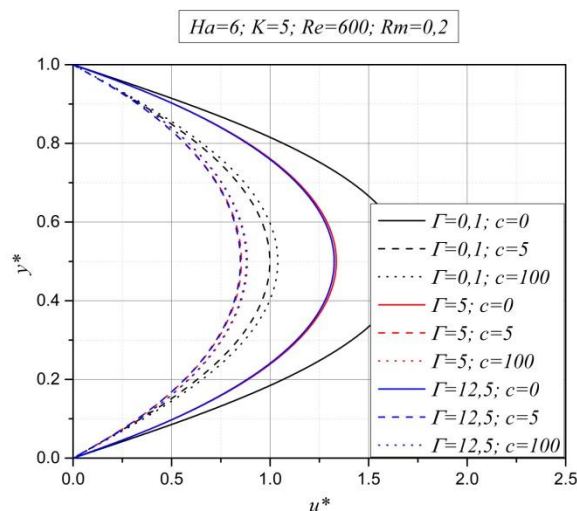
5.8 Uticaj c i parametra sprezanja K na temperaturu

Slika 5.7 pokazuje, kako što je i očekivano, da povećanje parametra sprezanja K uzrokuje smanjenje intenziteta indukovano magnetnog polja po apsolutnoj vrednosti. Pored toga, kada su ploče elektroneprovodne, na njima naravno nema induktivnog magnetnog polja.

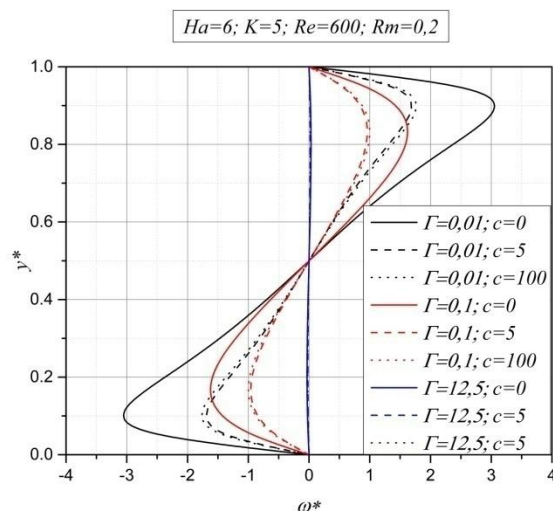
Što se tiče uticaja parametra sprezanja K i promenjive elektroprovodnosti zidova na temperaturu, grafik 5.8, vidi se da kako parametar sprezanja K raste tako temperatura po celoj visini kanala opada, da bi u graničnom slučaju kada $K \rightarrow \infty$ dominantan prenos toplote bila kondukcija. Sa druge strane u slučaju kada su zidovi neprovodni ($c=0$) porast temperature je

izražen blizu ploča kao posledica viskoznog zagrevanja, dok u slučajevima konačne provodnosti do porasta temperature dolazi u sredini kanala.

Na kraju će se kod razmatranog problema analizirati i zajednički uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ i elektroprovodnosti zidova na karakteristike strujanja mikropolarnog fluida.

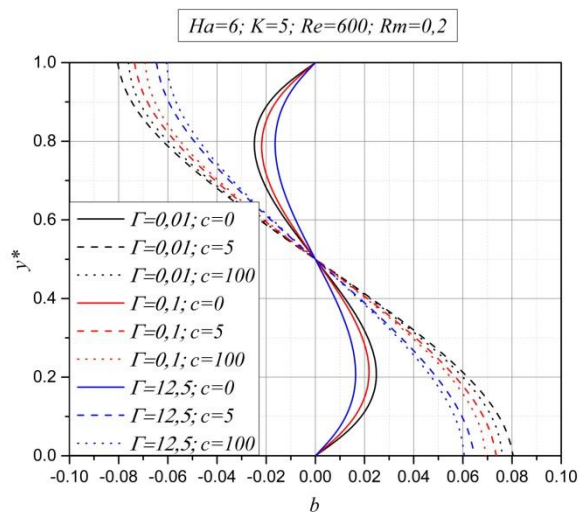


5.9 Brzina za različite vrednosti c i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ

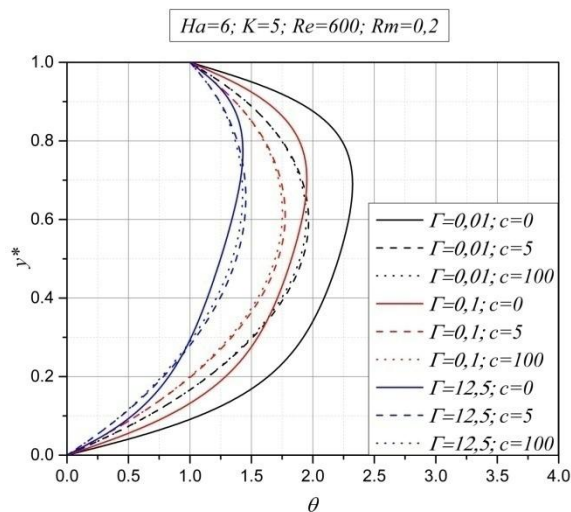


5.10 Uticaj c i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju

Grafik 5.9 pokazuje uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na brzinu, sa kog se uočava da se brzina smanjuje kada se parametar viskoznosti mikrorotacije povećava. Kada su zidovi elektroneprovodni i parametar viskoziteta mikrorotacije $\Gamma \rightarrow 0$, profil brzine mikropolarnog fluida isti je kao u slučaju laminarnog strujanja viskozne tečnosti. Što se tiče uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na vektor mikrorotacije, grafik 5.10, vidi se da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije dovodi da smanjenja intenziteta mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti. Takođe sa grafika 5.10, kao i sa grafika 5.6 i 5.2, može se zaključiti da povećanje elektroprovodnosti zidova ploča dovodi do smanjenja intenziteta mikrorotacije, što znači da veća elektroprovodnost ploča umanjuje karakteristike mikropolarnog fluida.



5.11 Indukovano magnetno polje u funkciji c i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ



5.12 Uticaj c i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na bezdimenzionu temperaturu

Naredni grafik 5.11 prikazuje uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ i promjenjive elektroprovodnosti ploča, na indukovano magnetno polje.

Povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ dovodi do smanjenja intenziteta indukovanog magnetnog polja, mada se može videti da taj uticaj nije značajan niti u jednom od izložena tri slučaja. Takođe se sa grafika 5.11 može uočiti da je intenzitet indukovanog magnetnog polja nešto veći u slučaju kada ploče imaju neku konačnu vrednost elektroprovodnosti.

Na kraju uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ i promjenjive elektroprovodnosti ploča na bezdimenzionu temperaturu je potpuno očekivan. Sa grafika 5.12 se vidi da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ smanjuje bezdimenzionu temperaturu po celoj širini kanala, težeći tome da dominantan prenos toplote bude kondukcija. Sa druge strane u slučaju kada su ploče neke konačne elektroprovodnosti, do povećanja temperature dolazi u sredini strujnog prostora, dok u slučaju neprovodnih ploča imamo neznatno uvećanje temperature u blizini ploča dok je profil temperature u srednjem delu strujnog prostora ravniji.

5.3.

*Dodatak - konstante kod razmatranog problema*Za slučaj kada je $a^2 - 4b > 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \delta_1 = +\sqrt{r_1}, \quad \delta_2 = -\sqrt{r_1}, \quad \delta_3 = +\sqrt{r_2}, \quad \delta_4 = -\sqrt{r_2},$$

$$D_i = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{\delta_i^2}{D^*} - 2 \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad A_i = A + \delta_i D_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_9 &= D_1 \exp(\delta_1), \quad \mathfrak{I}_{10} = D_2 \exp(\delta_2), \quad \mathfrak{I}_{11} = D_3 \exp(\delta_3), \quad \mathfrak{I}_{12} = D_4 \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{I}_{13} = A_1 \exp(\delta_1), \\ \mathfrak{I}_{14} &= A_2 \exp(\delta_2), \quad \mathfrak{I}_{15} = A_3 \exp(\delta_3), \quad \mathfrak{I}_{16} = A_4 \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{I}_{17}^* = \mathfrak{I}_{13}(c\delta_1 - 1), \quad \mathfrak{I}_{18}^* = \mathfrak{I}_{14}(c\delta_2 - 1), \\ \mathfrak{I}_{19}^* &= \mathfrak{I}_{15}(c\delta_3 - 1), \quad \mathfrak{I}_{20}^* = \mathfrak{I}_{16}(c\delta_4 - 1), \quad \mathfrak{I}_{21}^* = c - 1, \quad \mathfrak{I}_{22}^* = cA_1\delta_1 + A_1 + \mathfrak{I}_{17}^*, \\ \mathfrak{I}_{23}^* &= cA_2\delta_2 + A_2 + \mathfrak{I}_{18}^*, \quad \mathfrak{I}_{24}^* = cA_3\delta_3 + A_3 + \mathfrak{I}_{19}^*, \quad \mathfrak{I}_{25}^* = cA_4\delta_4 + A_4 + \mathfrak{I}_{20}^*, \quad \mathfrak{I}_{26}^* = c + \mathfrak{I}_{21}^*, \\ \mathfrak{I}_{27}^* &= \mathfrak{I}_9 - D_1, \quad \mathfrak{I}_{28}^* = \mathfrak{I}_{10} - D_2, \quad \mathfrak{I}_{29}^* = \mathfrak{I}_{11} - D_3, \quad \mathfrak{I}_{30}^* = \mathfrak{I}_{12} - D_4, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{I}_{31}^* = \exp(\delta_1) - \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{I}_{32}^* = \exp(\delta_2) - \exp(\delta_4), \quad \mathfrak{I}_{33}^* = \exp(\delta_3) - \exp(\delta_4),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{34}^* &= \mathfrak{I}_{27}^* - \mathfrak{I}_{30}^*, \quad \mathfrak{I}_{35}^* = \mathfrak{I}_{28}^* - \mathfrak{I}_{30}^*, \quad \mathfrak{I}_{36}^* = \mathfrak{I}_{29}^* - \mathfrak{I}_{30}^*, \quad \mathfrak{I}_{37}^* = \mathfrak{I}_{22}^* - \mathfrak{I}_{25}^*, \quad \mathfrak{I}_{38}^* = \mathfrak{I}_{23}^* - \mathfrak{I}_{25}^*, \\ \mathfrak{I}_{39}^* &= \mathfrak{I}_{24}^* - \mathfrak{I}_{25}^*, \quad \mathfrak{I}_{40}^* = \mathfrak{I}_{34}^* \mathfrak{I}_{33}^* - \mathfrak{I}_{31}^* \mathfrak{I}_{36}^*, \quad \mathfrak{I}_{41}^* = \mathfrak{I}_{35}^* \mathfrak{I}_{33}^* - \mathfrak{I}_{32}^* \mathfrak{I}_{36}^*, \quad \mathfrak{I}_{42}^* = \mathfrak{I}_{37}^* \mathfrak{I}_{33}^* - \mathfrak{I}_{31}^* \mathfrak{I}_{39}^*, \\ \mathfrak{I}_{43}^* &= \mathfrak{I}_{38}^* \mathfrak{I}_{33}^* - \mathfrak{I}_{32}^* \mathfrak{I}_{39}^*, \quad \mathfrak{I}_{44}^* = \mathfrak{I}_{26}^* \mathfrak{I}_{33}^*, \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{C \mathfrak{I}_{41}^* \mathfrak{I}_{44}^* + \mathfrak{I}_{33}^* \mathfrak{I}_{43}^*}{\mathfrak{I}_{43}^* \mathfrak{I}_{40}^* - \mathfrak{I}_{41}^* \mathfrak{I}_{42}^*}, \quad C_2 = -\frac{\mathfrak{I}_{40}^*}{\mathfrak{I}_{41}^*} C_1, \quad C_3 = -\frac{1}{\mathfrak{I}_{33}^*} (\mathfrak{I}_{31}^* C_1 + \mathfrak{I}_{32}^* C_2), \quad C_4 = -(C_1 + C_2 + C_3),$$

$$D_1 = -(D_1 C_1 + D_2 C_2 + D_3 C_3 + D_4 C_4), \quad D_4 = C \mathfrak{I}_{21}^* + \mathfrak{I}_{17}^* C_1 + \mathfrak{I}_{18}^* C_2 + \mathfrak{I}_{19}^* C_3 + \mathfrak{I}_{20}^* C_4,$$

$$M_1 = C_1 \delta_1 D_1, \quad M_2 = C_2 \delta_2 D_2, \quad M_3 = C_3 \delta_3 D_3, \quad M_4 = C_4 \delta_4 D_4,$$

$$N_1 = C_1 A_1 \delta_1, \quad N_2 = C_2 A_2 \delta_2, \quad N_3 = C_3 A_3 \delta_3, \quad N_4 = C_4 A_4 \delta_4,$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{4\delta_1^2} \left(M_1^2 + \frac{N_1^2}{B^* Rm} \right), \quad T_2 = \frac{1}{4\delta_2^2} \left(M_2^2 + \frac{N_2^2}{B^* Rm} \right), \quad T_3 = \frac{1}{4\delta_3^2} \left(M_3^2 + \frac{N_3^2}{B^* Rm} \right), \\
T_4 &= \frac{1}{4\delta_4^2} \left(M_4^2 + \frac{N_4^2}{B^* Rm} \right), \quad T_5 = \left(M_1 M_2 + \frac{N_1 N_2}{B^* Rm} \right), \quad T_6 = \frac{2}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \left(M_1 M_3 + \frac{N_1 N_3}{B^* Rm} \right), \\
T_7 &= \frac{2}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \left(M_1 M_4 + \frac{N_1 N_4}{B^* Rm} \right), \quad T_8 = \frac{2}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \left(M_2 M_3 + \frac{N_2 N_3}{B^* Rm} \right), \\
T_9 &= \frac{2}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \left(M_2 M_4 + \frac{N_2 N_4}{B^* Rm} \right), \quad T_{10} = \left(M_3 M_4 + \frac{N_3 N_4}{B^* Rm} \right), \\
T_{11} &= \frac{2}{\delta_1^2} \frac{C N_1}{B^* Rm}, \quad T_{12} = \frac{2}{\delta_2^2} \frac{C N_2}{B^* Rm}, \quad T_{13} = \frac{2}{\delta_3^2} \frac{C N_3}{B^* Rm}, \quad T_{14} = \frac{2}{\delta_4^2} \frac{C N_4}{B^* Rm}, \quad T_{15} = \frac{C^2}{2B^* Rm}, \\
T_{16} &= T_1 \exp(2\delta_1) + T_2 \exp(2\delta_2) + T_3 \exp(2\delta_3) + T_4 \exp(2\delta_4) + \\
&+ T_6 \exp(\delta_1 + \delta_3) + T_7 \exp(\delta_1 + \delta_4) + T_8 \exp(\delta_2 + \delta_3) + T_9 \exp(\delta_2 + \delta_4) + \\
&+ T_{11} \exp(\delta_1) + T_{12} \exp(\delta_2) + T_{13} \exp(\delta_3) + T_{14} \exp(\delta_4) + T_5 + T_{10} + T_{15}, \\
D_7 &= - \left(D_8 + T_{16} + \frac{C}{Pr Ec} \right), \quad D_8 = - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14}).
\end{aligned}$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b = 0$, konstante su:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad \xi_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}} a, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} a, \\
\mathfrak{I}_3 &= \frac{\xi_1^2}{D^*} - 2, \quad \mathfrak{I}_4 = \frac{\xi_2^2}{D^*} - 2, \quad \mathfrak{I}_5 = \frac{2\xi_1}{D^*}, \quad \mathfrak{I}_6 = \frac{2\xi_2}{D^*}, \\
\mathfrak{I}_{45}^* &= \frac{1}{D^*} + \frac{2}{\xi_1^2}, \quad \mathfrak{I}_{46}^* = \frac{\xi_1}{D^*} - \frac{2}{\xi_1}, \quad \mathfrak{I}_{47}^* = \frac{1}{D^*} + \frac{2}{\xi_2^2}, \quad \mathfrak{I}_{48}^* = \frac{\xi_2}{D^*} - \frac{2}{\xi_2}, \quad \mathfrak{I}_{49}^* = \mathfrak{I}_{46}^* \exp(\xi_1), \\
\mathfrak{I}_{50}^* &= (\mathfrak{I}_{45}^* + \mathfrak{I}_{46}^*) \exp(\xi_1), \quad \mathfrak{I}_{51}^* = \mathfrak{I}_{48}^* \exp(\xi_2), \quad \mathfrak{I}_{52}^* = (\mathfrak{I}_{47}^* + \mathfrak{I}_{48}^*) \exp(\xi_2), \\
\mathfrak{I}_{53}^* &= (c\xi_1 + 1)(A + \mathfrak{I}_3), \quad \mathfrak{I}_{54}^* = \mathfrak{I}_5 (c\xi_1 + 1) + cA + c\mathfrak{I}_3, \quad \mathfrak{I}_{55}^* = (c\xi_2 + 1)(A + \mathfrak{I}_4), \\
\mathfrak{I}_{56}^* &= \mathfrak{I}_6 (c\xi_2 + 1) + cA + c\mathfrak{I}_4, \quad \mathfrak{I}_{57}^* = [(A + \mathfrak{I}_3)(c\xi_1 - 1)] \exp(\xi_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{58}^* &= [(A + \mathfrak{I}_3 + \mathfrak{I}_5)(c\xi_1 - 1) + cA + c\mathfrak{I}_3] \exp(\xi_1), \quad \mathfrak{I}_{59}^* = [(A + \mathfrak{I}_4)(c\xi_2 - 1)] \exp(\xi_2), \\
\mathfrak{I}_{60}^* &= [(A + \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{I}_6)(c\xi_2 - 1) + cA + c\mathfrak{I}_4] \exp(\xi_2), \quad \mathfrak{I}_{61}^* = c - 1, \quad \mathfrak{I}_{62}^* = \exp(\xi_1) - \exp(\xi_2), \\
\mathfrak{I}_{63}^* &= \mathfrak{I}_{46}^* - \mathfrak{I}_{48}^*, \quad \mathfrak{I}_{64}^* = \mathfrak{I}_{49}^* - \mathfrak{I}_{51}^*, \quad \mathfrak{I}_{65}^* = \mathfrak{I}_{53}^* - \mathfrak{I}_{55}^*, \quad \mathfrak{I}_{66}^* = \mathfrak{I}_{57}^* - \mathfrak{I}_{59}^*, \quad \mathfrak{I}_{67}^* = \mathfrak{I}_{64}^* - \mathfrak{I}_{63}^*, \\
\mathfrak{I}_{68}^* &= \mathfrak{I}_{50}^* - \mathfrak{I}_{45}^*, \quad \mathfrak{I}_{69}^* = \mathfrak{I}_{52}^* - \mathfrak{I}_{47}^*, \quad \mathfrak{I}_{70}^* = \mathfrak{I}_{66}^* + \mathfrak{I}_{65}^*, \quad \mathfrak{I}_{71}^* = \mathfrak{I}_{58}^* + \mathfrak{I}_{54}^*, \quad \mathfrak{I}_{72}^* = \mathfrak{I}_{60}^* - \mathfrak{I}_{56}^*, \\
\mathfrak{I}_{73}^* &= c + \mathfrak{I}_{61}^*, \quad \mathfrak{I}_{74}^* = \mathfrak{I}_{62}^* \exp(-\xi_2), \quad \mathfrak{I}_{75}^* = \exp(\xi_1 - \xi_2), \quad \mathfrak{I}_{76}^* = (\mathfrak{I}_{67}^* - \mathfrak{I}_{69}^* \mathfrak{I}_{74}^*), \\
\mathfrak{I}_{77}^* &= \mathfrak{I}_{68}^* - \mathfrak{I}_{69}^* \mathfrak{I}_{74}^*, \quad \mathfrak{I}_{78}^* = \mathfrak{I}_{70}^* - \mathfrak{I}_{72}^* \mathfrak{I}_{74}^*, \quad \mathfrak{I}_{79}^* = \mathfrak{I}_{71}^* - \mathfrak{I}_{72}^* \mathfrak{I}_{75}^*,
\end{aligned}$$

$$C_5 = \frac{C \mathfrak{I}_{73}^* \mathfrak{I}_{77}^* + \mathfrak{I}_{79}^*}{\mathfrak{I}_{79}^* \mathfrak{I}_{76}^* - \mathfrak{I}_{78}^* \mathfrak{I}_{77}^*}, \quad C_6 = \frac{1}{\mathfrak{I}_{77}^*} (1 - \mathfrak{I}_{76}^* C_5), \quad C_7 = -C_5, \quad C_8 = -\mathfrak{I}_{74}^* C_5 - \mathfrak{I}_{75}^* C_6,$$

$$D_2 = -(\mathfrak{I}_{63}^* C_5 + \mathfrak{I}_{45}^* C_6 + \mathfrak{I}_{47}^* C_8), \quad D_5 = -(\mathfrak{I}_{65}^* C_5 + \mathfrak{I}_{54}^* C_6 + \mathfrak{I}_{56}^* C_8 + cC),$$

$$M_5 = C_5 \mathfrak{I}_3 + C_6 \mathfrak{I}_5, \quad M_6 = C_7 \mathfrak{I}_4 + C_8 \mathfrak{I}_6, \quad M_7 = C_6 \mathfrak{I}_3, \quad M_8 = C_8 \mathfrak{I}_4,$$

$$N_5 = \xi_1 (AC_5 + \mathfrak{I}_3 C_5 + \mathfrak{I}_5 C_6) + C_6 (A + \mathfrak{I}_3), \quad N_6 = \xi_2 (AC_7 + \mathfrak{I}_4 C_7 + \mathfrak{I}_6 C_8) + C_8 (A + \mathfrak{I}_4),$$

$$N_7 = \xi_1 C_6 (A + \mathfrak{I}_3), \quad N_8 = \xi_2 C_8 (A + \mathfrak{I}_4),$$

$$T_{17} = M_5^2 + \frac{N_5^2}{B^* Rm}, \quad T_{18} = M_6^2 + \frac{N_6^2}{B^* Rm}, \quad T_{19} = 2 \left(M_5 M_6 + \frac{N_5 N_6}{B^* Rm} \right), \quad T_{20} = 2 \frac{CN_5}{B^* Rm}, \quad T_{21} = 2 \frac{CN_6}{B^* Rm},$$

$$T_{22} = M_7^2 + \frac{N_7^2}{B^* Rm}, \quad T_{23} = M_8^2 + \frac{N_8^2}{B^* Rm}, \quad T_{24} = 2 \left(M_7 M_8 + \frac{N_7 N_8}{B^* Rm} \right), \quad T_{25} = 2 \left(M_5 M_7 + \frac{N_5 N_7}{B^* Rm} \right),$$

$$T_{26} = 2 \left(M_6 M_8 + \frac{N_6 N_8}{B^* Rm} \right), \quad T_{27} = 2 \left(M_5 M_8 + M_6 M_7 + \frac{N_5 N_8 + N_6 N_7}{B^* Rm} \right), \quad T_{28} = 2 \frac{CN_7}{B^* Rm},$$

$$T_{29} = 2 \frac{CN_8}{B^* Rm}, \quad T_{30} = \frac{C^2}{B^* Rm}, \quad T_{30}^* = T_{19} + T_{30}, \quad T_{31} = \frac{1}{4\xi_1^2} \left(T_{17} + \frac{3}{2\xi_1^2} T_{22} - \frac{1}{\xi_1} T_{25} \right),$$

$$T_{32} = \frac{1}{4\xi_2^2} \left(T_{18} + \frac{3T_{23}}{2\xi_2^2} - \frac{T_{26}}{\xi_2} \right), \quad T_{34} = \frac{1}{\xi_1^2} \left(T_{20} - \frac{2}{\xi_1} T_{28} \right), \quad T_{35} = \frac{1}{\xi_2^2} \left(T_{21} - \frac{2}{\xi_2} T_{29} \right), \quad T_{36} = \frac{T_{22}}{4\xi_1^2},$$

$$T_{37} = \frac{T_{23}}{4\xi_2^2}, \quad T_{39} = \frac{1}{2\xi_1^2} \left(\frac{T_{25}}{2} - \frac{T_{22}}{\xi_1} \right), \quad T_{40} = \frac{1}{2\xi_2^2} \left(\frac{T_{26}}{2} - \frac{T_{23}}{\xi_2} \right), \quad T_{42} = \frac{T_{28}}{\xi_1^2}, \quad T_{43} = \frac{T_{29}}{\xi_2^2},$$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{44} = & (\mathsf{T}_{31} + \mathsf{T}_{36} + \mathsf{T}_{39}) \exp(2\xi_1) + (\mathsf{T}_{32} + \mathsf{T}_{37} + \mathsf{T}_{40}) \exp(2\xi_2) + (\mathsf{T}_{34} + \mathsf{T}_{42}) \exp(\xi_1) + \\ & + (\mathsf{T}_{35} + \mathsf{T}_{43}) \exp(\xi_2) + \frac{1}{2} \mathsf{T}_{30}^* + \frac{1}{6} \mathsf{T}_{27} + \frac{1}{12} \mathsf{T}_{24}, \end{aligned}$$

$$D_9 = -\left(\mathsf{T}_{44} + D_{10} + \frac{C}{\text{Pr } Ec} \right), \quad D_{10} = -(\mathsf{T}_{31} + \mathsf{T}_{32} + \mathsf{T}_{34} + \mathsf{T}_{35}).$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$, konstante su:

$$r_1^* = \frac{1}{2} \left(a + i\sqrt{4b - a^2} \right), \quad r_2^* = \frac{1}{2} \left(a - i\sqrt{4b - a^2} \right), \quad r_1^* = \alpha + i\beta, \quad r_2^* = \alpha - i\beta,$$

$$\frac{1}{2}a = \alpha, \quad \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} = \beta, \quad R^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \theta_1 = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \theta_2 = \arctg \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = -\theta_1,$$

$$\eta_1 = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} + i \sin \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \eta_2 = \sqrt{R} \left(-\cos \frac{\theta_1}{2} - i \sin \frac{\theta_1}{2} \right),$$

$$\eta_3 = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} - i \sin \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \eta_4 = \sqrt{R} \left(-\cos \frac{\theta_1}{2} + i \sin \frac{\theta_1}{2} \right),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{R} \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt{R} \sin \frac{\theta_1}{2},$$

$$\eta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_4 = -\alpha_1 + i\beta_1,$$

$$\mathfrak{T}_1 = \beta_1 \left(\frac{1}{D^*} + \frac{2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \mathfrak{T}_2 = \alpha_1 \left(\frac{1}{D^*} - \frac{2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \mathfrak{T}_7 = \alpha_1 \mathfrak{T}_2 - \beta_1 \mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_8 = \alpha_1 \mathfrak{T}_1 + \beta_1 \mathfrak{T}_2,$$

$$\mathsf{N}_9 = AC_9 + \mathfrak{T}_7 C_9 + \mathfrak{T}_8 C_{10}, \quad \mathsf{N}_{10} = AC_{10} + \mathfrak{T}_7 C_{10} - \mathfrak{T}_8 C_9,$$

$$\mathsf{N}_{11} = AC_{11} + \mathfrak{T}_7 C_{11} - \mathfrak{T}_8 C_{12}, \quad \mathsf{N}_{12} = AC_{12} + \mathfrak{T}_8 C_{11} + \mathfrak{T}_7 C_{12},$$

$$\mathfrak{T}_{80}^* = \cos \beta_1 \exp \alpha_1, \quad \mathfrak{T}_{81}^* = \sin \beta_1 \exp \alpha_1, \quad \mathfrak{T}_{82}^* = \cos \beta_1 \sin(-\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{83}^* = \sin \beta_1 \exp(-\alpha_1),$$

$$\mathfrak{T}_{84}^* = [-\mathfrak{T}_1 \sin(\beta_1) + \mathfrak{T}_2 \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{85}^* = [\mathfrak{T}_2 \sin(\beta_1) + \mathfrak{T}_1 \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1),$$

$$\mathfrak{T}_{86}^* = [\mathfrak{T}_1 \sin \beta_1 + \mathfrak{T}_2 \cos \beta_1] \exp(-\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{87}^* = [\mathfrak{T}_1 \cos \beta_1 - \mathfrak{T}_2 \sin \beta_1] \exp(-\alpha_1),$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{88}^* &= [(A + \mathfrak{T}_7)(c\alpha_1 + 1) - c\beta_1 \mathfrak{T}_8], \quad \mathfrak{T}_{89}^* = [\mathfrak{T}_8(c\alpha_1 + 1) + c\beta_1 A + c\beta_1 \mathfrak{T}_7], \\
\mathfrak{T}_{90}^* &= [(A + \mathfrak{T}_7)(1 - c\alpha_1) + c\beta_1 \mathfrak{T}_8], \quad \mathfrak{T}_{91}^* = [\mathfrak{T}_8(c\alpha_1 - 1) + c\beta_1 A + c\beta_1 \mathfrak{T}_7], \\
\mathfrak{T}_{92}^* &= [(\alpha_1 A + \alpha_1 \mathfrak{T}_7 - \beta_1 \mathfrak{T}_8) \cos(\beta_1) - (\beta_1 A + \beta_1 \mathfrak{T}_7 + \alpha_1 \mathfrak{T}_8) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \\
\mathfrak{T}_{93}^* &= [(\beta_1 A + \beta_1 \mathfrak{T}_7 + \alpha_1 \mathfrak{T}_8) \cos(\beta_1) + (\alpha_1 A + \alpha_1 \mathfrak{T}_7 - \beta_1 \mathfrak{T}_8) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \\
\mathfrak{T}_{94}^* &= [(\beta_1 \mathfrak{T}_8 - \alpha_1 A - \alpha_1 \mathfrak{T}_7) \cos(\beta_1) - (\beta_1 A + \beta_1 \mathfrak{T}_7 + \alpha_1 \mathfrak{T}_8) \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1), \\
\mathfrak{T}_{95}^* &= [(\beta_1 A + \beta_1 \mathfrak{T}_7 + \alpha_1 \mathfrak{T}_8) \cos(\beta_1) + (\beta_1 \mathfrak{T}_8 - \alpha_1 A - \alpha_1 \mathfrak{T}_7) \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1), \\
\mathfrak{T}_{96}^* &= [(A + \mathfrak{T}_7) \cos(\beta_1) - \mathfrak{T}_8 \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \quad \mathfrak{T}_{97}^* = [(A + \mathfrak{T}_7) \sin(\beta_1) + \mathfrak{T}_8 \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1), \\
\mathfrak{T}_{98}^* &= [(A + \mathfrak{T}_7) \cos(\beta_1) + \mathfrak{T}_8 \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1), \\
\mathfrak{T}_{99}^* &= [(A + \mathfrak{T}_8) \sin(\beta_1) - \mathfrak{T}_8 \cos(\beta_1)] \exp(-\alpha_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{100}^* &= c\mathfrak{T}_{92}^* - \mathfrak{T}_{96}^*, \quad \mathfrak{T}_{101}^* = c\mathfrak{T}_{93}^* - \mathfrak{T}_{97}^*, \quad \mathfrak{T}_{102}^* = c\mathfrak{T}_{94}^* - \mathfrak{T}_{98}^*, \quad \mathfrak{T}_{103}^* = c\mathfrak{T}_{95}^* - \mathfrak{T}_{99}^*, \quad \mathfrak{T}_{104}^* = c - 1, \\
\mathfrak{T}_{105}^* &= \mathfrak{T}_{80}^* - \mathfrak{T}_{82}^*, \quad \mathfrak{T}_{106}^* = \mathfrak{T}_{84}^* - \mathfrak{T}_{86}^*, \quad \mathfrak{T}_{107}^* = \mathfrak{T}_{88}^* - \mathfrak{T}_{90}^*, \quad \mathfrak{T}_{108}^* = \mathfrak{T}_{100}^* - \mathfrak{T}_{102}^*, \\
\mathfrak{T}_{109}^* &= \mathfrak{T}_{106}^* - 2\mathfrak{T}_2, \quad \mathfrak{T}_{110}^* = \mathfrak{T}_{85}^* - \mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_{111}^* = \mathfrak{T}_{87}^* - \mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_{112}^* = \mathfrak{T}_{108}^* + \mathfrak{T}_{107}^*, \quad \mathfrak{T}_{113}^* = \mathfrak{T}_{101}^* + \mathfrak{T}_{89}^*, \\
\mathfrak{T}_{114}^* &= \mathfrak{T}_{103}^* + \mathfrak{T}_{91}^*, \quad \mathfrak{T}_{115}^* = \mathfrak{T}_{104}^* + c, \quad \mathfrak{T}_{116}^* = \mathfrak{T}_{83}^* \mathfrak{T}_{109}^* - \mathfrak{T}_{111}^* \mathfrak{T}_{105}^*, \quad \mathfrak{T}_{117}^* = \mathfrak{T}_{83}^* \mathfrak{T}_{110}^* - \mathfrak{T}_{111}^* \mathfrak{T}_{81}^*, \\
\mathfrak{T}_{118}^* &= \mathfrak{T}_{83}^* \mathfrak{T}_{112}^* - \mathfrak{T}_{114}^* \mathfrak{T}_{105}^*, \quad \mathfrak{T}_{119}^* = \mathfrak{T}_{83}^* \mathfrak{T}_{113}^* - \mathfrak{T}_{114}^* \mathfrak{T}_{81}^*, \quad \mathfrak{T}_{120}^* = \mathfrak{T}_{115}^* \mathfrak{T}_{83}^*, \\
C_9 &= -\frac{\mathfrak{T}_{117}^*}{\mathfrak{T}_{116}^*} C_{10}, \quad C_{10} = \frac{C\mathfrak{T}_{120}^* \mathfrak{T}_{116}^* + \mathfrak{T}_{118}^* \mathfrak{T}_{83}^*}{\mathfrak{T}_{118}^* \mathfrak{T}_{117}^* - \mathfrak{T}_{119}^* \mathfrak{T}_{116}^*}, \quad C_{11} = -C_9, \quad C_{12} = -\frac{1}{\mathfrak{T}_{83}^*} (\mathfrak{T}_{105}^* C_9 + \mathfrak{T}_{81}^* C_{10}),
\end{aligned}$$

$$D_3 = -(2\mathfrak{T}_2 C_9 + \mathfrak{T}_1 C_{10} + \mathfrak{T}_1 C_{12}), \quad D_6 = -(\mathfrak{T}_{107}^* C_9 + \mathfrak{T}_{89}^* C_{10} \mathfrak{T}_8 + \mathfrak{T}_{91}^* C_{12} + cC),$$

$$\begin{aligned}
M_9 &= \mathfrak{T}_7 C_9 + \mathfrak{T}_8 C_{10}, \quad M_{10} = \mathfrak{T}_7 C_{10} - \mathfrak{T}_8 C_9, \quad M_{11} = \mathfrak{T}_7 C_{11} - \mathfrak{T}_8 C_{12}, \quad M_{12} = \mathfrak{T}_8 C_{11} + \mathfrak{T}_7 C_{12}, \\
N_{13} &= \alpha_1 N_{10} - \beta_1 N_9, \quad N_{14} = \alpha_1 N_9 + \beta_1 N_{10}, \quad N_{15} = -(\beta_1 N_{11} + \alpha_1 N_{12}), \quad N_{16} = \beta_1 N_{12} - \alpha_1 N_{11},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= M_9^2 + \frac{N_{14}^2}{B^* Rm}, \quad R_2 = M_{10}^2 + \frac{N_{13}^2}{B^* Rm}, \quad R_3 = M_{11}^2 + \frac{N_{16}^2}{B^* Rm}, \quad R_4 = M_{12}^2 + \frac{N_{15}^2}{B^* Rm}, \\
R_5 &= M_9 M_{10} + \frac{N_{13} N_{14}}{B^* Rm}, \quad R_6 = M_{11} M_{12} + \frac{N_{15} N_{16}}{B^* Rm}, \quad R_7 = 2 \left(M_9 M_{11} + \frac{N_{14} N_{16}}{B^* Rm} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_8 &= 2 \left(M_{10} M_{12} + \frac{N_{13} N_{15}}{B^* R m} \right), \quad R_9 = M_9 M_{12} + M_{10} M_{11} + \frac{N_{13} N_{16} + N_{14} N_{15}}{B^* R m}, \quad R_{10} = \frac{2C N_{13}}{B^* R m}, \\
R_{11} &= \frac{2C N_{14}}{B^* R m}, \quad R_{12} = \frac{2C N_{15}}{B^* R m}, \quad R_{13} = \frac{2C N_{16}}{B^* R m}, \quad R_{14} = \frac{1}{2} R_1 - \frac{1}{2} R_2, \quad R_{15} = \frac{1}{2} R_3 - \frac{1}{2} R_4, \\
R_{16} &= \frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_2, \quad R_{17} = \frac{1}{2} R_3 + \frac{1}{2} R_4, \quad R_{18} = \frac{1}{2} R_7 - \frac{1}{2} R_8, \quad R_{19} = \frac{1}{2} (R_7 + R_8) + \frac{C^2}{B^* R m}, \\
R_{20} &= \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{14}\alpha_1 - R_5\beta_1), \quad R_{21} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{14}\beta_1 + R_5\alpha_1), \\
R_{22} &= \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{15}\alpha_1 + R_6\beta_1), \quad R_{23} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{15}\beta_1 - R_6\alpha_1), \quad R_{24} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{10}\alpha_1 + R_{11}\beta_1), \\
R_{25} &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{11}\alpha_1 - R_{10}\beta_1), \quad R_{26} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{13}\beta_1 - R_{12}\alpha_1), \quad R_{27} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{13}\alpha_1 + R_{12}\beta_1), \\
R_{28} &= \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{20}\alpha_1 - R_{21}\beta_1), \quad R_{29} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{20}\beta_1 + R_{21}\alpha_1), \\
R_{30} &= \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{22}\alpha_1 - R_{23}\beta_1), \quad R_{31} = \frac{1}{2\alpha_1^2 + 2\beta_1^2} (R_{23}\alpha_1 + R_{22}\beta_1), \\
R_{32} &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{24}\alpha_1 + R_{25}\beta_1), \quad R_{33} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{25}\alpha_1 - R_{24}\beta_1), \quad R_{34} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{27}\alpha_1 - R_{26}\beta_1), \\
R_{35} &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (R_{26}\alpha_1 + R_{27}\beta_1), \quad R_{36} = \frac{R_{16}}{4\alpha_1^2}, \quad R_{37} = \frac{R_{17}}{4\alpha_1^2}, \quad R_{38} = \frac{R_{18}}{4\beta_1^2}, \quad R_{39} = \frac{R_9}{4\beta_1^2}, \\
R_{40} &= [R_{28} \cos(2\beta_1) + R_{29} \sin(2\beta_1) + R_{36}] \exp(2\alpha_1) + \\
&+ [R_{30} \cos(2\beta_1) - R_{31} \sin(2\beta_1) + R_{37}] \exp(-2\alpha_1) + \\
&+ [R_{32} \sin(\beta_1) + R_{33} \cos(\beta_1)] \exp(\alpha_1) + \\
&+ [R_{34} \cos(\beta_1) - R_{35} \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1) - \\
&- R_{38} \cos(2\beta_1) - R_{39} \sin(2\beta_1) + \frac{1}{2} R_{19}, \\
D_{11} &= -\frac{C}{\text{Pr } Ec} - R_{40} - D_{12}, \quad D_{12} = R_{38} - (R_{28} + R_{36} + R_{30} + R_{37} + R_{33} + R_{34}).
\end{aligned}$$

- VI poglavlje -

6. EMHD strujanje mikropolarnog fluida

6.1.

EMHD strujanja fluida

Ukoliko se istovremeno primeni magnetno polje upravno na električno polje u elektroprovodnom fluidu se generiše sila koja deluje na isti. Ovo predstavlja osnovni princip rada elektromagnetno hidrodinamičke (EMHD) pumpe. U hemijskoj i metalurškoj industriji EMHD pumpe se veoma često koriste. Njihovu prednost predstavlja mogućnost rada sa veoma agresivnim, hemijski reaktivnim fluidima veoma visoke temperature. Pored toga, EMHD pumpe nemaju pokretne mehaničke delove, nema potrebe za korišćenjem ležajeva, nije neophodno koristiti mehaničke zaptivače itd, pa je time izuzetno povećana njihova pouzdanost. Elektromagnetno upravljanje strujanjem u tehnološkim procesima se takođe koristi za stabilizaciju rastopina i njihove slobodne površine, proizvodnju veoma finih prahova, poluprovodnika, aluminijuma i super legura sa izuzetnim osobinama.

Nedavna istraživanja pokazala su da elektromagnetno hidrodinamička (EMHD) strujanja mogu da budu veoma pouzdan način za transportovanje slabo provodnih fluida u mikrosistemima [86, 87]. U ovakvim mikrofluidnim uređajima može se transportovati više fluida sa različitim ciljem. Na primer, povećanje brzine jednog fluida može se vršiti u njegovoj direktnoj interakciji sa drugim pokretljivijim, zatim se problem strujanja dva fluida može primeniti kod uređaja za prenos toplote, ili se može vršiti kontrolisano mešanje fluida.

Uticaj električnog i magnetnog polja na strujanje mikropolarnog fluida, takođe privlači dosta pažnje. Najčešće se vrši analiza uticaja elektromagnetno hidrodinamičkih efekata na strujanje biloških fluida, poput ljudske krvi. Tako je D. Triphati (2017) sa svojim saradnicima razmatrao EMHD strujanje biofluida u talasastom kanalu [88]. Oni su u radu razmatrali uticaj

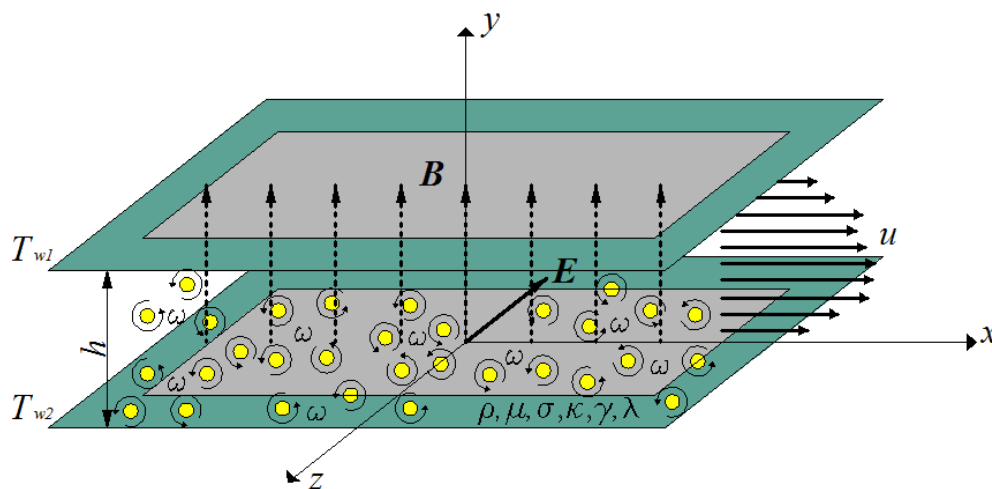
Hartmannovog magnetnog broja, kao i elektro-osmotskog parametra na profil brzine i zatim zapreminski protok. Takođe, Mithilesh Kumar Chaube i koautori [89] (2018) su radili na modelu koji se može koristiti za dizajniranje i inženjering peristaltičko-laboratorijskog čipa i mikro peristaltičke pumpe za primenu u biomedicini.

Imajući u vidu široku oblast praktičnog značaja EMHD strujanja, kao što je već pomenuto, cilj ovog poglavlja disertacije je istraživanje strujanja i prenosa toplote mikropolarnog fluida, uzimajući u obzir efekte spoljašnjeg električnog i magnetnog polja.

6.2.

Fizički i matematički model razmatranog problema

U ovom delu disertacije, razmatraće se model laminarnog i razvijenog EMHD strujanja mikropolarnog fluida između dve nepokretne ploče na odstojanju h , nagnute pod uglom α u odnosu na horizontalnu ravan. Uz pretpostavku da je strujanje pretežno u pravcu x ose, te da je Reynoldsov magnetni broj znatno manji od jedinice, posmatrani problem se dosta pojednostavljuje. Prilikom strujanja fluida, gornja i donja ploča se drže na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2} , respektivno, pri čemu se uzima da su te ploče elektroneprovodne. Prilikom strujanja na mikropolarni fluid deluje spoljašnje magnetno polje intenziteta B u pravcu y ose i spoljašnje električno polje intenziteta E u pravcu z ose. Napred definisani fizički model, dat je na slici 6.



6. Fizički model EMHD strujanja mikropolarnog fluida

Na početku razmatranja problema EMHD strujanja mikropolarnog fluida između ploča, moramo se osvrnuti na uticaj spoljašnjeg električnog polja, tj. na formiranje jednačina problema.

Kako je spoljašnje električno polje intenziteta E u pravcu z ose, magnetno polje intenziteta B u pravcu y ose, a potpuno razvijeno strujanje u pravcu ose x , vektori za brzinu, magnetno i električno polje dati su sledećim izrazima:

$$\mathbf{v} = u\vec{i}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{B} = B\vec{j}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{E} = E\vec{k}. \quad (6.3)$$

Vektor gustine struje određuje se na osnovu Ohmovog zakona, koji je definisan izrazom:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.4)$$

dok je sistem jednačina za strujanje mikropolarnog fluida, dat sledećim izrazima:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mu \Delta \mathbf{v} + (\varepsilon + \mu - \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda \Delta \mathbf{v} + 2\lambda \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}, \quad (6.6)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 2\lambda (\operatorname{rot} \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + (\gamma + \beta - \alpha) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + (\alpha + \beta) \Delta \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{g}, \quad (6.7)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \Phi + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (6.8)$$

Nakon uvedenih pretpostavki o strujanju, te definisanim izrazima za brzinu, magnetno i električno polje (6.1) - (6.3), dobija se sledeći sistem diferencijalnih jednačina za razmatrani problem:

$$(\mu + \lambda) \frac{d^2 u}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} + \rho g \beta (T - T_{w2}) \sin \alpha - \sigma B^2 u - \sigma E B - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (6.9)$$

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du}{dy} - 2\lambda \omega = 0, \quad (6.10)$$

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + (\mu + \lambda) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \sigma (E + uB)^2 = 0. \quad (6.11)$$

U jednačini (6.9) ugao α predstavlja nagib ploča u odnosu na horizontalnu ravan, ali ćemo nadalje najpre razmatrati problem kada je $\alpha = 0$, tj. kada su ploče horizontalne.

Da bi smo prethodni sistem jednačina (6.9) - (6.11) rešili, neophodno je da uvedemo odgovarajuće granične uslove. Na osnovu napred definisanog razmatranog problema, prvi uslov je uslov da nema klizanja, tj. da na pločama ne postoji klizanje mikropolarnog fluida, te stoga važi da su brzina i mikrorotacija mikropolarnog fluida na pločama jednake nuli:

$$\begin{aligned} u = 0, \omega = 0 \quad \text{za} \quad y = 0, \\ u = 0, \omega = 0 \quad \text{za} \quad y = h. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Što se tiče graničnih uslova za temperturu, usvojeni su izotermalni uslovi na osnovu kojih važi:

$$\begin{aligned} T = T_{w2} \quad \text{za} \quad y = 0, \\ T = T_{w1} \quad \text{za} \quad y = h. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ovako definisane jednačine razmatranog problema (6.9) - (6.11), kao i granične uslove date izrazima (6.12) i (6.13), neophodno je svesti na bezdimenzioni oblik radi daljeg rešavanja. Stoga uvodimo opšte poznate i napred već definisane transformacije, date sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} u^* = \frac{u}{U}, y^* = \frac{y}{h}, U = \frac{h^2 P}{\mu}, P = -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0 = \frac{U}{h}, \theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}, \\ K = \frac{\lambda}{\mu}, \Gamma = \frac{\gamma}{\mu h^2}, Ha = Bh \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, Pr = \frac{\mu c_p}{k}, Ec = \frac{U^2}{c_p (T_1 - T_2)}, Re = \frac{U_0 h}{\nu}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Pored ovih transformacija, definišu se još dva jako bitna bezdimenziona fakotora i to faktor opterećenja Q i Grashofov broj Gr , u sledećem obliku:

$$Q = \frac{E}{U_0 B}, Gr = \frac{g \beta h^3 (T - T_{w2})}{\nu^2}. \quad (6.15)$$

Nakon uvođenja ovih bezdimenzionih transformacija, sistem jednačina (6.9) - (6.11), dobija svoju bezdimenzionu formu:

$$(1+K)\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} + K\frac{d\omega^*}{dy^*} + \frac{Gr}{Re}\sin\alpha - Ha^2u^* - Ha^2Q + ReP = 0, \quad (6.16)$$

$$\Gamma\frac{d^2\omega^*}{dy^{*2}} - K\frac{du^*}{dy^*} - 2K\omega^* = 0, \quad (6.17)$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^{*2}} + (1+K)PrEc\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + PrEcHa^2(Q+u^*)^2 = 0, \quad (6.18)$$

dok granični uslovi postaju:

$$\begin{aligned} u^* = 0, \omega^* = 0, \theta = 0, \quad \text{za } y^* = 0, \\ u^* = 0, \omega^* = 0, \theta = 1, \quad \text{za } y^* = 1. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Prilikom rešavanja sistema (6.16) - (6.18), iz prve dve jednačine, nakon određenih matematičkih operacija, dobija se jednačina četvrtog reda za brzinu u sledećem obliku:

$$\frac{d^4u^*}{dy^{*4}} - a\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} + bu^* - d = 0, \quad (6.20)$$

gde su konstante a, b i d definisane kao:

$$a = B^* + E^* - A^*D^*, \quad b = E^*B^*, \quad d = E^*C^*, \quad (6.21)$$

dok su ostale konstante:

$$A^* = \frac{K}{1+K}, \quad B^* = \frac{Ha^2}{1+K}, \quad D^* = \frac{K}{\Gamma}, \quad E^* = \frac{2K}{\Gamma}, \quad C^* = \frac{1}{1+K}\left(ReP + \frac{Gr}{Re}\sin\alpha - Ha^2Q\right). \quad (6.22)$$

Diferencijalna jednačina četvrtog reda (6.20), odgovara jednačini koja je rešena u trećem poglavlju ove disertacije (3.30). Analiza rešenja i u ovom, kao i u više navrata do sada, pokazala bi da zavisno od korena karakteristične jednačine postoje tri moguća slučaja, a odgovarajuća rešenja su:

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b > 0$

$$u^* = C_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \exp(\delta_4 y^*) + \frac{d}{b}, \quad (6.23)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b = 0$

$$u^* = (C_5 + C_6 y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (C_7 + C_8 y^*) \exp(\xi_2 y^*) + \frac{d}{b}, \quad (6.24)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b < 0$

$$\begin{aligned} u^* = & \left[C_9 \cos(\beta_1 y^*) + C_{10} \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[C_{11} \cos(\beta_1 y^*) + C_{12} \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*) + \frac{d}{b}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Respektivno, dgovarajuća rešenja za mikrorotaciju data su sledećim izrazima:

$$\omega^* = C_1 \mathcal{D}_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \mathcal{D}_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \mathcal{D}_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \mathcal{D}_4 \exp(\delta_4 y^*), \quad (6.26)$$

$$\omega^* = (E_{13} + E_{14} y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (E_{15} + E_{16} y^*) \exp(\xi_2 y^*), \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \omega^* = & \left[P_3^* \sin(\beta_1 y^*) + P_4^* \cos(\beta_1 y^*) \right] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[P_5^* \sin(\beta_1 y^*) + P_6^* \cos(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Na kraju rešavanjem energijske jednačine (6.18), dobijamo rešenja za polje temperature u fluidu u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
\theta = -\Pr Ec & \left[\frac{1}{4\delta_1^2} {}^1C \exp(2\delta_1 y^*) + \frac{1}{4\delta_2^2} {}^2C \exp(2\delta_2 y^*) + \frac{1}{4\delta_3^2} {}^3C \exp(2\delta_3 y^*) + \right. \\
& + \frac{1}{4\delta_4^2} {}^4C \exp(2\delta_4 y^*) + \frac{1}{2} {}^1D y^{*2} + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \exp((\delta_1 + \delta_3) y^*) + \\
& + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \exp((\delta_1 + \delta_4) y^*) + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \exp((\delta_2 + \delta_3) y^*) + \\
& + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \exp((\delta_2 + \delta_4) y^*) + \frac{1}{2} {}^3E y^{*2} + \frac{1}{\delta_1^2} {}^1F \exp(\delta_1 y^*) + \frac{1}{\delta_2^2} {}^2F \exp(\delta_2 y^*) + \\
& \left. + \frac{1}{\delta_3^2} {}^3F \exp(\delta_3 y^*) + \frac{1}{\delta_4^2} {}^4F \exp(\delta_4 y^*) + \frac{1}{2} {}^5F y^{*2} + {}^1H_1 y^* + {}^1H_2 \right], \tag{6.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = -\Pr Ec & \left[(\Omega_{28} + \Omega_{29} y^* + \Omega_{30} y^{*2}) \exp(2\xi_1 y^*) + \right. \\
& + (\Omega_{31} + \Omega_{32} y^* + \Omega_{33} y^{*2}) \exp(2\xi_2 y^*) + (\Omega_{34}^* + \Omega_{35}^* y^*) \exp(\xi_1 y^*) + \\
& \left. + (\Omega_{36}^* + \Omega_{37}^* y^*) \exp(\xi_2 y^*) + \Omega_{38}^* y^{*2} + \Omega_{39}^* y^{*3} + \Omega_{40}^* y^{*4} + {}^2H_1 y^* + {}^2H_2 \right], \tag{6.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta = -\Pr Ec & \left\{ \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{47} - \chi_2 \Omega_{49}) \cos(2\beta_1 y^*) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{47} + \chi_1 \Omega_{49}) \sin(2\beta_1 y^*) \left. \right] \exp(2\alpha_1 y^*) + \\
& + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{48} + \chi_2 \Omega_{50}) \cos(2\beta_1 y^*) + \right. \\
& + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{48} - \chi_1 \Omega_{50}) \sin(2\beta_1 y^*) \left. \right] \exp(-2\alpha_1 y^*) - \\
& - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{51} \sin(2\beta_1 y^*) - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} \cos(2\beta_1 y^*) + \\
& + [(\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) \cos(\beta_1 y^*) + (\Omega_{53} \chi_2 + \Omega_{55} \chi_1) \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\
& + [(\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2) \cos(\beta_1 y^*) - (\Omega_{54} \chi_2 + \Omega_{56} \chi_1) \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + \\
& \left. + \frac{1}{2} \Omega_{57} y^{*2} + {}^3H_1 y^* + {}^3H_2 \right\}. \tag{6.31}
\end{aligned}$$

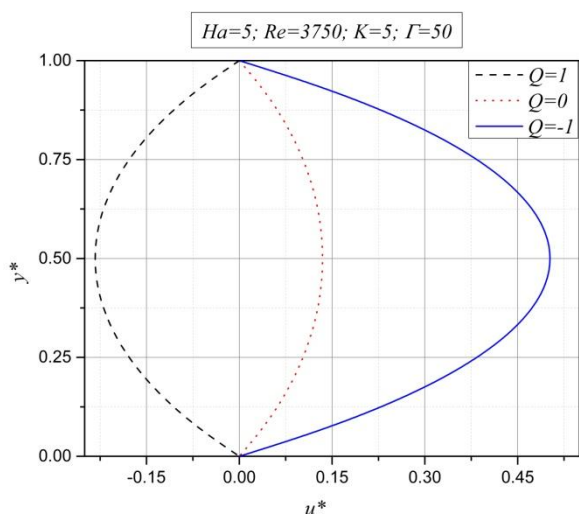
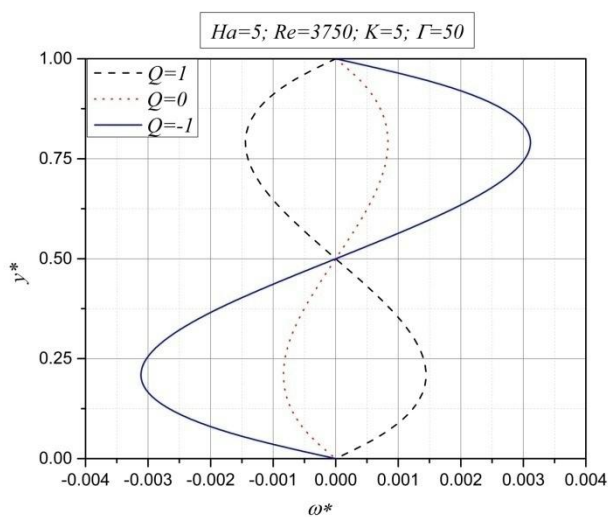
6.3.

Analiza rezultata razmatranog problema

Prilikom analize rezultata, posebno će se obratiti pažnja na uticaj električnog polja na strujanje mikropolarnog fluida. Stoga će se dati uticaj faktora opterećenja Q na polje brzine, mikrorotacije i temeperature. Pored toga urađena je analiza uticaja Hartmannovog broja Ha , parametra sprezanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na karakteristike strujanja mikropolarnog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog i električnog polja.

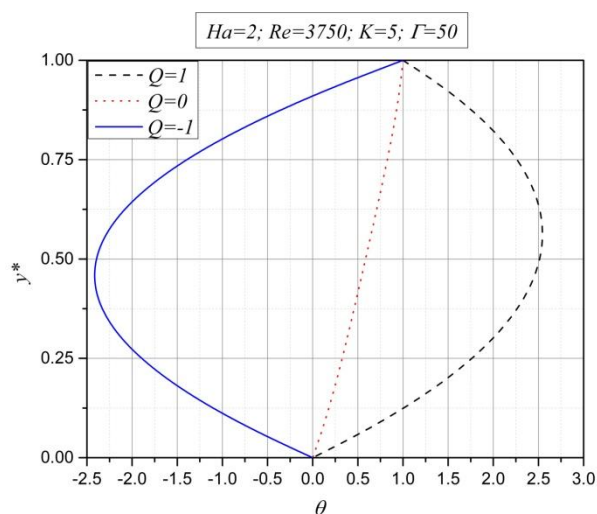
Prva tri grafika daće uticaj faktora opterećenja Q na polje brzine, mikrorotacije i temeperature. Za slučaj kada je $Q = 0$ ne postoji uticaj električnog polja, tzv. slučaj kratkog spoja, međutim od velikog značaja je analiza kada je faktor opterećenja različit od nule, $Q \neq 0$, a Hartmannov broj konstantan.

Na grafiku 6.1 dat je uticaj faktora opterećenja Q na profil brzine mikropolarnog fluida. Kako je već napred pomenuto, tokom promene vrednosti faktora opterećenja, Hartmannov broj je konstantan, kao i parametar sprezanja K , parametar viskoznosti mikrorotacije Γ i Reynoldsov broj Re .

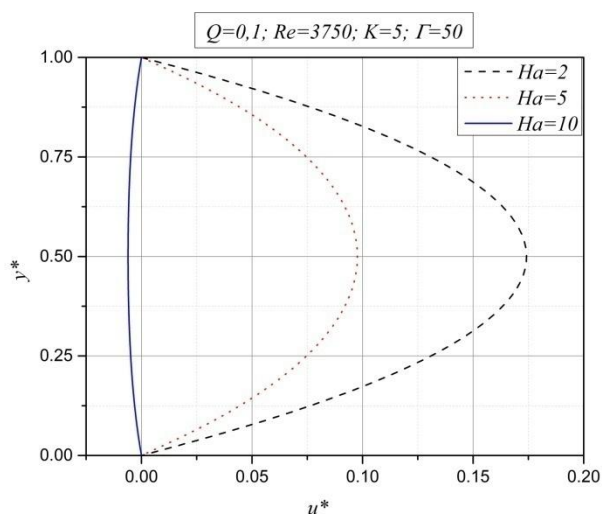
6.1 Uticaj faktora opterećenja Q na brzinu6.2 Uticaj faktora opterećenja Q na mikrorotaciju

Promena faktora opterećenja Q omogućava rad sistema u tri režima i to kao generator, merač protoka ili pumpa. Sa datog grafika 6.1 može se zaključiti da za vrednost $Q=1$ dolazi do promene smera strujanja, i to odgovara slučaju kada sistem radi kao pumpa, a promena smera strujanja je posledica toga što je spoljašnje električno polje E usvojeno u negativnom smeru z ose, dok za vrednost $Q=-1$, dolazi do izjednačavanja članova u Lorentzovoj sili (jer postoji doprinos od strane električnog E i magnetnog B polja), a to je slučaj kada se sistem ponaša kao merač protoka.

Sa sledećeg grafika 6.2, vidi se da je uticaj faktora opterećenja Q na mikrorotaciju isti kao i na profil brzine. Za $Q=1$ imamo promenu smera mikrorotacije u poređenju sa profilom mikrorotacije koji smo dobili za $Q=0$, dok za vrednost $Q=-1$ dolazi samo do povećanja intenziteta mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti. Povećanje električnog polja intenzivira svojstva mikrorotacije i osobina mikropolarnih fluida.



6.3 Uticaj faktora opterećenja Q na bezdimenzionu temperaturu

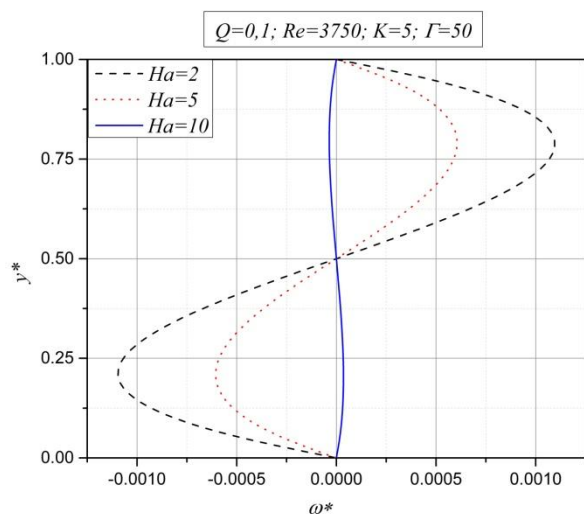


6.4 Uticaj Hartmannovog broja Ha na brzinu

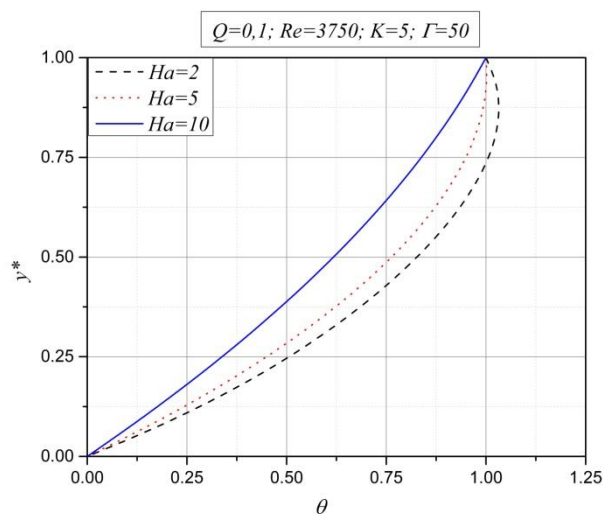
Sa grafika 6.3 uočava se da za vrednosti $-1 < Q < 0$, dolazi do pothlađivanja struje fluida, jer tada sistem funkcioniše u režimu merača protoka i hladi fluid na račun "odvedene" električne energije, dok za vrednosti $0 < Q < 1$ dolazi do porasta temperature u struji fluida, kao posledica viskoznog i unutrašnjeg zagrevanja (Jouleove toplote), pri čemu $Q=1$ odgovara pumpno režimu rada sistema.

U daljoj analizi razmatranog problema, daćemo uticaj Hartmannovog broja na polje brzine, mikrorotacije i temperature.

Na grafiku 6.4, predstavljena je promena profila brzine za različite vrednosti Hartmannovog broja Ha . Sa grafika se jasno vide očekivani rezultati, a to je da brzina opada sa povećanjem Hartmannovog broja Ha , sa tendencijom da fluid čak promeni smer strujanja. Ovo je posledica dejstva Lorentzove sile, na čiji intenzitet sada utiču i električno i magnetno polje, koja u ovom slučaju može da menja smer. Ako dobijene rezultate poredimo sa slučajem strujanja mikropolarnog fluida ali bez prisustva spoljašnjeg električnog polja, videće se da kada postoji spoljašnje električno polje i kada je faktor opterećenja Q pozitivan, $Q \geq 0$, uticaj Hartmannovog broj na polje brzine je izraženiji. Kako znamo da je Lorentzova sila $\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, a u slučaju kada postoji spoljašnje električno polje gustina struje je definisana izrazom (6.4), onda su dobijeni rezultati očekivani.



6.5 Uticaj Hartmannovog broja Ha na mikrorotaciju

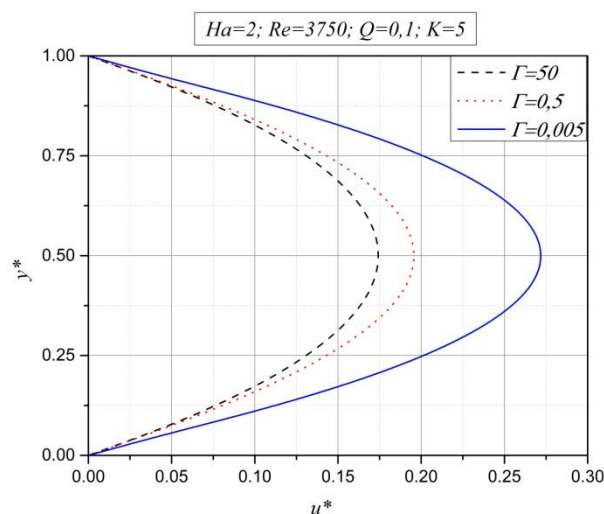


6.6 Uticaj Hartmannovog broja Ha na temperaturu

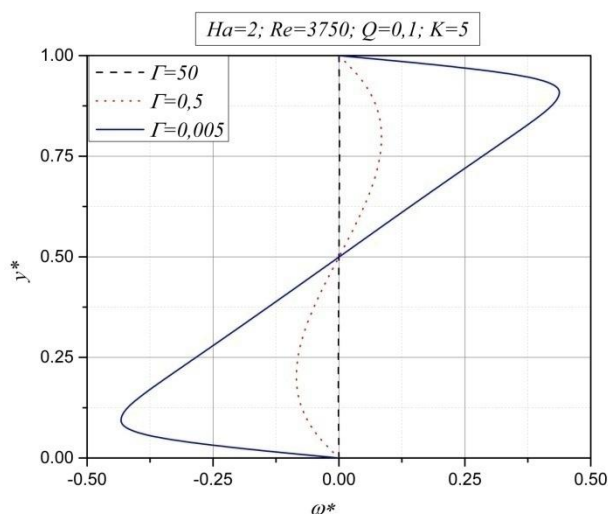
Slično promeni brzine, mikrorotacija se smanjuje u apsolutnoj vrednosti po čitavoj visini strujnog prostora sa povećanjem Hartmannovog broja Ha , što je prikazano na grafiku 6.5.

Sledeći grafik 6.6 pokazuje da povećanje Hartmannovog broja dovodi do toga da kondukcija bude dominantni prenos toplote kroz struju mikropolarnog fluida, dok je za manje

vrednosti Hartmannovog broja povećanje temperature u struji fluida posledica viskoznog zagrevanja.



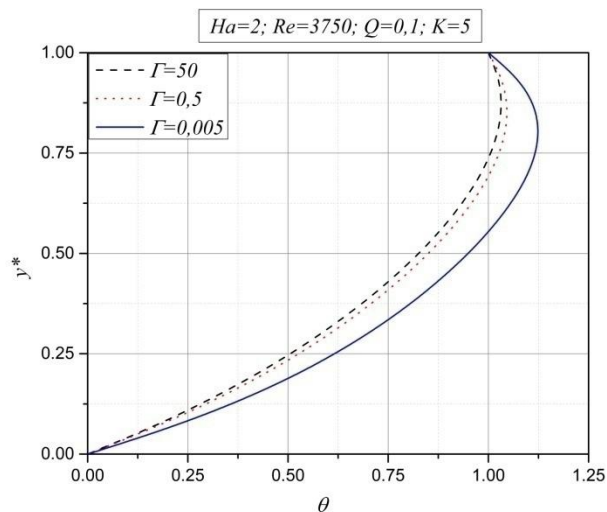
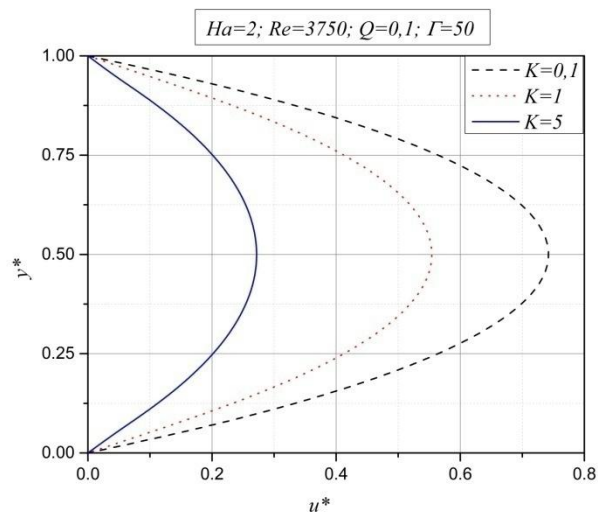
6.7 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na brzinu



6.8 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju

Sada ćemo preći na analizu uticaja fizičkih karakteristika mikropolararnog fluida, preko uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ i parametra sprezanja K , na brzinu, mikrorotaciju i temperaturu.

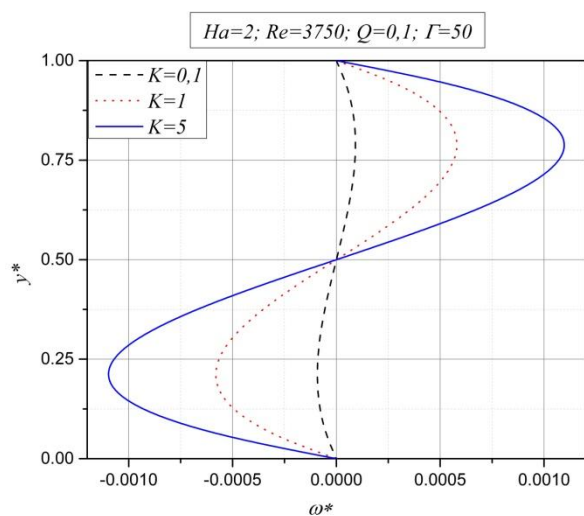
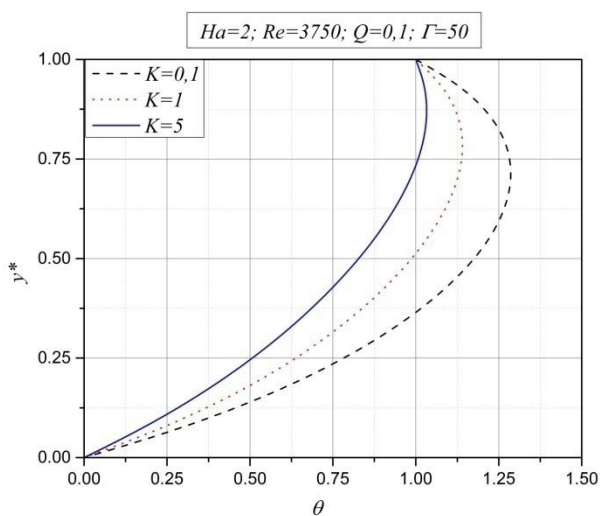
Ako prilikom analize uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na brzinu, mikrorotaciju i temperaturu razmatranog problema, dobijene rezultate poredimo sa rezultatima problema kod kog nismo razmatrali uticaj spoljašnjeg električnog polja, videćemo da je tendencija promene ovih fizičkih veličina sa promenom parametra viskoznosti mikrorotacije Γ potpuno ista, za slučaj kada je usvojeno $Q = 0,1$. Tako se sa grafika 6.7 i 6.8 uočava da usled povećanja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ dolazi do smanjenja brzine, kao i smanjenja mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti po celoj širini između ploča. Što se tiče uticaja promene parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na bezdimenzionu temperaturu, što je prikazano na grafiku 6.9, još jednom se potvrđuje činjenica da povećanje vrednosti parametra viskoznosti Γ dovodi do smanjenja količine energije transformisane iz strujne u toplotnu. Za slučaj kada bi se za vrednost faktora opterećenja Q usvojila neka negativna vrednost, tendencije promene fizičkih veličina sa promenom parametra viskoznosti mikrorotacije Γ bi ostale iste.

6.9 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na temperaturu6.10 Uticaj parametra sprezanja K na brzinu

Uticaj parametra sprezanja K na karakteristike strujanja mikropolarog fluida, dat je na graficima 6.10 - 6.12.

Na grafiku 6.10 dat je uticaj parametra sprezanja K na polje brzine. Sa grafika se može uočiti da povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja brzine fluida, što dovodi do zaključka da povećanje parametra K dovodi do povećanja otpora strujanja mikropolarog fluida.

Za razliku od brzine, intenzitet mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti raste sa porastom parametra sprezanja K . Ova promena prikazana je grafiku 6.11.

6.11 Uticaj parametra sprezanja K na mikrorotaciju6.12 Uticaj parametra sprezanja K na temperaturu

Grafik 6.12 predstavlja uticaj parametra sprezanja K na polje temperature. Povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja bezdimenzione temperature po celoj širini između ploča. Vidimo da pri znatno većem uticaju dopunske viskoznosti λ nad dinamičkom viskoznošću μ , odnosno pri izraženijim karakteristikama mikropolarnog fluida, dominantan prenos toplote postaje kondukcija. Poput i kod uticaja parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , tako i kod uticaja parametra sprezanja K , ukoliko bi se za vrednost faktora opterećenja Q usvojila neka negativna vrednost, tendencije promene fizičkih veličina sa promenom parametra sprezanja K bi ostale iste.

6.4.

*Dodatak - konstante kod razmatranog problema*Za slučaj kada je $a^2 - 4b > 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \delta_1 = +\sqrt{r_1}, \quad \delta_2 = -\sqrt{r_1}, \quad \delta_3 = +\sqrt{r_2}, \quad \delta_4 = -\sqrt{r_2},$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E^*} \left(\frac{B^*}{A^*} - D^* \right), \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{E^* A^*}, \quad \mathcal{D}_i = \delta_i (\mathfrak{I}_1 - \delta_i^2 \mathfrak{I}_2) \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$C_1 = -\frac{1}{\mathcal{D}_1} (\mathcal{D}_2 C_2 + \mathcal{D}_3 C_3 + \mathcal{D}_4 C_4), \quad C_2 = -\frac{1}{\mathfrak{R}_1} (\mathfrak{R}_2 C_3 + \mathfrak{R}_3 C_4),$$

$$C_3 = -\frac{1}{S_1} \left(S_2 C_4 + \frac{d}{b} \right), \quad C_4 = \frac{\mathcal{T}_1 - S_1}{\mathcal{T}_2 S_1 - \mathcal{T}_1 S_2} \frac{d}{b},$$

$$\mathcal{M}_i = 1 - \frac{\mathcal{D}_{i+1}}{\mathcal{D}_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{N}_i = \exp \delta_{i+1} - \frac{\mathcal{D}_{i+1}}{\mathcal{D}_i} \exp \delta_1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathfrak{R}_i = \mathcal{D}_{i+1} (\exp \delta_{i+1} - \exp \delta_1), \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{T}_i = \mathcal{N}_{i+1} - \frac{\mathcal{N}_1}{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_{i+1}, \quad i = 1, 2$$

$$S_i = \mathcal{M}_{i+1} - \frac{\mathcal{M}_1}{\mathfrak{R}_1} \mathfrak{R}_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} {}^1\mathcal{E}_1 &= \frac{{}^1C}{4\delta_1^2} + \frac{{}^2C}{4\delta_2^2} + \frac{{}^3C}{4\delta_3^2} + \frac{{}^4C}{4\delta_4^2} + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} + \\ &+ \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} + \frac{{}^1F}{\delta_1^2} + \frac{{}^2F}{\delta_2^2} + \frac{{}^3F}{\delta_3^2} + \frac{{}^4F}{\delta_4^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^1\mathcal{B}_2 &= \frac{1}{4\delta_1^2} {}^1C \exp(2\delta_1) + \frac{1}{4\delta_2^2} {}^2C \exp(2\delta_2) + \frac{1}{4\delta_3^2} {}^3C \exp(2\delta_3) + \frac{1}{4\delta_4^2} {}^4C \exp(2\delta_4) + \\
&+ \frac{1}{2} {}^1D + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \exp(\delta_1 + \delta_3) + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \exp(\delta_1 + \delta_4) + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \exp(\delta_2 + \delta_3) + \\
&+ \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \exp(\delta_2 + \delta_4) + \frac{1}{2} {}^3E + \frac{1}{\delta_1^2} {}^1F \exp(\delta_1) + \frac{1}{\delta_2^2} {}^2F \exp(\delta_2) + \frac{1}{\delta_3^2} {}^3F \exp(\delta_3) + \\
&+ \frac{1}{\delta_4^2} {}^4F \exp(\delta_4) + \frac{1}{2} {}^5F,
\end{aligned}$$

$${}^1H_2 = -{}^1\mathcal{B}_1, \quad {}^1H_1 = {}^1\mathcal{B}_1 - {}^1\mathcal{B}_2 - \frac{1}{\text{Pr } Ec},$$

$$\begin{aligned}
{}^iC &= C_i^2 \left[(1+K)\delta_i^2 + Ha^2 \right], \quad i=1,2,3,4, \quad {}^iD = 2C_1C_{i+1} \left[(1+K)\delta_i\delta_{i+1} + Ha^2 \right], \quad i=1,2,3, \\
{}^iE &= 2C_2C_{i+2} \left[(1+K)\delta_i\delta_{i+2} + Ha^2 \right], \quad i=1,2, \quad {}^3E = 2C_3C_4 \left[(1+K)\delta_3\delta_4 + Ha^2 \right],
\end{aligned}$$

$${}^iF = 2Ha^2C_i \left(Q + \frac{d}{b} \right), \quad i=1,2,3,4, \quad {}^5F = Ha^2 \left(Q + \frac{d}{b} \right)^2.$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b = 0$, konstante su:

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b} \right), \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} a, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} a,$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E^*} \left(\frac{B^*}{A^*} - D^* \right), \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{E^* A^*},$$

$$C_5 = -\left(C_7 + \frac{d}{b} \right), \quad C_6 = \frac{1}{F_1} (E_4 - E_3 C_7 - F_2 C_8), \quad C_7 = -\frac{1}{E_7} (E_8 C_8 + E_9), \quad C_8 = \frac{E_9 E_{10} - E_7 E_{12}}{E_7 E_{11} - E_8 E_{10}},$$

$$F_i = \mathfrak{I}_1 - 3\mathfrak{I}_2 \xi_i^2, \quad i=1,2, \quad E_i = \xi_i \left(\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \xi_i^2 \right), \quad i=1,2,$$

$$G_i = \xi_i \left(\mathfrak{I}_1 - \xi_i^2 \mathfrak{I}_2 \right) \exp \xi_i, \quad i=1,2, \quad H_i = [\mathfrak{I}_1 (1 + \xi_i) - \mathfrak{I}_2 \xi_i^2 (3 + \xi_i)] \exp \xi_i, \quad i=1,2,$$

$$E_3 = E_2 - E_1, \quad E_4 = E_1 \frac{d}{b}, \quad E_5 = \exp \xi_2 - \exp \xi_1, \quad E_6 = (1 - \exp \xi_1) \frac{d}{b}, \quad G_3 = G_2 - G_1, \quad G_4 = G_1 \frac{d}{b},$$

$$E_7 = E_5 - \frac{E_3}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_8 = \exp \xi_2 - \frac{F_2}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_9 = E_6 + \frac{E_4}{F_1} \exp \xi_1,$$

$$E_{10} = G_3 - \frac{H_1}{F_1} E_3, \quad E_{11} = H_2 - \frac{H_1}{F_1} F_2, \quad E_{12} = \frac{H_1}{F_1} E_4 - G_4,$$

$$E_{13} = E_1 C_5 + F_1 C_6, \quad E_{14} = E_1 C_6, \quad E_{15} = E_2 C_7 + F_2 C_8, \quad E_{16} = E_2 C_8,$$

$${}^2\mathcal{F}_1 = \Omega_{28} + \Omega_{31} + \Omega_{34}^* + \Omega_{36}^*,$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathcal{F}_2 = & (\Omega_{28} + \Omega_{29} + \Omega_{30}) \exp(2\xi_1) + (\Omega_{31} + \Omega_{32} + \Omega_{33}) \exp(2\xi_2) + \\ & + (\Omega_{34}^* + \Omega_{35}^*) \exp(\xi_1) + (\Omega_{36}^* + \Omega_{37}^*) \exp(\xi_2) + \Omega_{38}^* + \Omega_{39}^* + \Omega_{40}^*, \end{aligned}$$

$${}^2H_1 = {}^2\mathcal{F}_1 - {}^2\mathcal{F}_2 - \frac{1}{\text{Pr } Ec}, \quad {}^2H_2 = -{}^2\mathcal{F}_1,$$

$$\Omega_1 = (1+K)(C_6^2 + \xi_1^2 C_5^2 + 2C_5 C_6 \xi_1) + Ha^2 C_5^2, \quad \Omega_2 = (1+K)(2C_5 C_6 \xi_1^2 + 2\xi_1 C_6^2) + 2Ha^2 C_5 C_6,$$

$$\Omega_3 = (1+K)(\xi_1^2 C_6^2 + Ha^2 C_6^2), \quad \Omega_4 = (1+K)(C_8^2 + \xi_2^2 C_7^2 + 2\xi_2 C_7 C_8) + C_7^2 Ha^2,$$

$$\Omega_5 = (1+K)(2C_7 C_8 \xi_2^2 + 2\xi_2 C_8^2) + 2C_7 C_8 Ha^2, \quad \Omega_6 = (1+K)\xi_2^2 C_8^2 + C_8^2 Ha^2,$$

$$\Omega_7 = (1+K)(2C_6 C_8 + 2C_6 C_7 \xi_2 + 2C_5 C_8 \xi_1 + 2\xi_1 \xi_2 C_5 C_7) + 2C_5 C_7 Ha^2,$$

$$\Omega_8 = (1+K)(2C_6 C_8 \xi_2 + 2C_6 C_8 \xi_1 + 2\xi_1 \xi_2 C_6 C_7 + 2\xi_1 \xi_2 C_5 C_8) + 2Ha^2(C_6 C_7 + C_5 C_8),$$

$$\Omega_9 = (1+K)2\xi_1 \xi_2 C_6 C_8 + 2C_6 C_8 Ha^2, \quad \Omega_{10} = 2Ha^2 C_5 \left(Q + \frac{d}{b} \right), \quad \Omega_{11} = 2Ha^2 C_6 \left(Q + \frac{d}{b} \right),$$

$$\Omega_{12} = 2Ha^2 C_7 \left(Q + \frac{d}{b} \right), \quad \Omega_{13} = 2Ha^2 C_8 \left(Q + \frac{d}{b} \right), \quad \Omega_{14} = Ha^2 \left(Q + \frac{d}{b} \right)^2, \quad \Omega_{15} = \frac{\Omega_1}{2\xi_1} - \frac{\Omega_2}{4\xi_1^2} + \frac{\Omega_3}{4\xi_1^3},$$

$$\Omega_{16} = \frac{\Omega_2}{2\xi_1} - \frac{\Omega_3}{2\xi_1^2}, \quad \Omega_{17} = \frac{\Omega_3}{2\xi_1}, \quad \Omega_{18} = \frac{\Omega_4}{2\xi_2} - \frac{\Omega_5}{4\xi_2^2} + \frac{\Omega_6}{4\xi_2^3}, \quad \Omega_{19} = \frac{\Omega_5}{2\xi_2} - \frac{\Omega_6}{2\xi_2^2}, \quad \Omega_{20} = \frac{\Omega_6}{2\xi_2},$$

$$\Omega_{21}^* = \frac{\Omega_{10}}{\xi_1} - \frac{\Omega_{11}}{\xi_1^2}, \quad \Omega_{22}^* = \frac{\Omega_{11}}{\xi_1}, \quad \Omega_{23}^* = \frac{\Omega_{12}}{\xi_2} - \frac{\Omega_{13}}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{24}^* = \frac{\Omega_{13}}{\xi_2}, \quad \Omega_{28} = \frac{\Omega_{15}}{2\xi_1} - \frac{\Omega_{16}}{4\xi_1^2} + \frac{\Omega_{17}}{4\xi_1^3},$$

$$\Omega_{29} = \frac{\Omega_{16}}{2\xi_1} - \frac{\Omega_{17}}{2\xi_1^2}, \quad \Omega_{30} = \frac{\Omega_{17}}{2\xi_1}, \quad \Omega_{31} = \frac{\Omega_{18}}{2\xi_2} - \frac{\Omega_{19}}{4\xi_2^2} + \frac{\Omega_{20}}{4\xi_2^3}, \quad \Omega_{32} = \frac{\Omega_{19}}{2\xi_2} - \frac{\Omega_{20}}{2\xi_2^2}, \quad \Omega_{33} = \frac{\Omega_{20}}{2\xi_2},$$

$$\Omega_{34}^* = \frac{\Omega_{21}^*}{\xi_1} - \frac{\Omega_{22}^*}{\xi_1^2}, \quad \Omega_{35}^* = \frac{\Omega_{22}^*}{\xi_1}, \quad \Omega_{36}^* = \frac{\Omega_{23}^*}{\xi_2} - \frac{\Omega_{24}^*}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{37}^* = \frac{\Omega_{24}^*}{\xi_2}, \quad \Omega_{38}^* = \frac{\Omega_7 + \Omega_{14}}{2},$$

$$\Omega_{39}^* = \frac{\Omega_8}{6}, \quad \Omega_{40}^* = \frac{\Omega_9}{12}.$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$, konstante su:

$$r_{*1} = \frac{1}{2} \left(a + i\sqrt{4b - a^2} \right), \quad r_{*2} = \frac{1}{2} \left(a - i\sqrt{4b - a^2} \right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}a, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}, \quad R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha_1 = \sqrt{R} \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt{R} \sin \frac{\theta_1}{2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E^*} \left(\frac{B^*}{A^*} - D^* \right), \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{E^* A^*},$$

$$\eta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_4 = -\alpha_1 + i\beta_1,$$

$${}^3\mathcal{B}_1 = \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\Omega_{47}\chi_1 - \Omega_{49}\chi_2) \right] + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\Omega_{48}\chi_1 + \Omega_{50}\chi_2) \right] -$$

$$- \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} + (\Omega_{53}\chi_1 - \Omega_{55}\chi_2) + (\Omega_{54}\chi_1 - \Omega_{56}\chi_2),$$

$${}^3H_2 = -{}^3\mathcal{B}_1, \quad {}^3H_1 = {}^3\mathcal{B}_1 - {}^3\mathcal{B}_2 - \frac{1}{\text{Pr} Ec},$$

$${}^3\mathcal{B}_2 = \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{47} - \chi_2 \Omega_{49}) \cos(2\beta_1) + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{47} + \chi_1 \Omega_{49}) \sin(2\beta_1) \right] \exp(2\alpha_1) +$$

$$+ \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{48} + \chi_2 \Omega_{50}) \cos(2\beta_1) + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{48} - \chi_1 \Omega_{50}) \sin(2\beta_1) \right] \exp(-2\alpha_1) -$$

$$- \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{51} \sin(2\beta_1) - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} \cos(2\beta_1) + [(\Omega_{53}\chi_1 - \Omega_{55}\chi_2) \cos(\beta_1) +$$

$$+ (\Omega_{53}\chi_2 + \Omega_{55}\chi_1) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1) + [(\Omega_{54}\chi_1 - \Omega_{56}\chi_2) \cos(\beta_1) -$$

$$- (\Omega_{54}\chi_2 + \Omega_{56}\chi_1) \sin(\beta_1)] \exp(-\alpha_1) + \frac{1}{2} \Omega_{57},$$

$$\Omega_{41} = \alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9, \quad \Omega_{42} = \beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9, \quad \Omega_{43} = \beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11}, \quad \Omega_{44} = \alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11},$$

$$\Omega_{45} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[(1+K)(\Omega_{41}^2 + \Omega_{42}^2) + Ha^2 (C_9^2 + C_{10}^2) \right],$$

$$\Omega_{46} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[(1+K)(\Omega_{43}^2 + \Omega_{44}^2) + Ha^2 (C_{11}^2 + C_{12}^2) \right],$$

$$\Omega_{47} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{42}^2 - \Omega_{41}^2) + Ha^2 (C_9^2 - C_{10}^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{41}\Omega_{42} + Ha^2 C_9 C_{10} \right],$$

$$\Omega_{48} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{44}^2 - \Omega_{43}^2) + Ha^2 (C_{12}^2 - C_{11}^2) \right] + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{43}\Omega_{44} - Ha^2 C_{11} C_{12} \right],$$

$$\Omega_{49} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{41}\Omega_{42} + Ha^2 C_9 C_{10} \right] + \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{42}^2 - \Omega_{41}^2) + Ha^2 (C_9^2 - C_{10}^2) \right],$$

$$\Omega_{50} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{43}\Omega_{44} - Ha^2 C_{11} C_{12} \right] + \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{43}^2 - \Omega_{44}^2) + Ha^2 (C_{11}^2 - C_{12}^2) \right],$$

$$\Omega_{51} = \frac{1}{2\beta_1} \left[(1+K)(\Omega_{41}\Omega_{43} - \Omega_{42}\Omega_{44}) + Ha^2 (C_9 C_{12} + C_{10} C_{11}) \right],$$

$$\Omega_{52} = \frac{1}{2\beta_1} \left[(1+K)(\Omega_{42}\Omega_{43} - \Omega_{41}\Omega_{44}) + Ha^2 (C_9 C_{11} - C_{10} C_{12}) \right],$$

$$\Omega_{53} = 2 \left(Q + \frac{d}{b} \right) Ha^2 \left(C_9 \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - C_{10} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\Omega_{54} = 2 \left(Q + \frac{d}{b} \right) Ha^2 \left(C_{11} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + C_{12} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\Omega_{55} = 2 \left(Q + \frac{d}{b} \right) Ha^2 \left(C_9 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + C_{10} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\Omega_{56} = 2 \left(Q + \frac{d}{b} \right) Ha^2 \left(C_{11} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - C_{12} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\Omega_{57} = (1+K)(\Omega_{42}\Omega_{43} - \Omega_{41}\Omega_{44}) + Ha^2 \left(C_9 C_{11} + C_{10} C_{12} + \left(Q + \frac{d}{b} \right)^2 \right),$$

$$\chi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad \chi_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2},$$

$$P = (\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \alpha_1^2 + 3\mathfrak{I}_2 \beta_1^2) \alpha_1, \quad Q = (\mathfrak{I}_1 - 3\mathfrak{I}_2 \alpha_1^2 + \mathfrak{I}_2 \beta_1^2) \beta_1,$$

$$Q_1 = \cos \beta_1 \exp \alpha_1, \quad Q_2 = \sin \beta_1 \exp \alpha_1, \quad Q_3 = \cos \beta_1 \exp(-\alpha_1), \quad Q_4 = \sin \beta_1 \exp(-\alpha_1),$$

$$P_1 = \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \alpha_1^2 + \mathfrak{I}_2 \beta_1^2, \quad P_2 = 2\mathfrak{I}_2 \alpha_1 \beta_1, \quad P_3 = (P_1 \sin \beta_1 - P_2 \cos \beta_1) \exp(\alpha_1),$$

$$P_4 = (P_2 \sin \beta_1 + P_1 \cos \beta_1) \exp(\alpha_1), \quad P_5 = (P_1 \cos \beta_1 - P_2 \sin \beta_1) \exp(-\alpha_1),$$

$$P_6 = (P_1 \sin \beta_1 + P_2 \cos \beta_1) \exp(-\alpha_1),$$

$$Q_5 = P_3 \alpha_1 + P_4 \beta_1, \quad Q_6 = P_4 \alpha_1 - P_3 \beta_1, \quad Q_7 = P_5 \alpha_1 + P_6 \beta_1, \quad Q_8 = P_5 \beta_1 - P_6 \alpha_1, \quad Q_9 = \frac{P}{Q} \frac{d}{b}, \quad Q_9^* = \frac{2P}{Q},$$

$$Q_{10} = Q_3 - Q_1, \quad Q_{11} = (1 - Q_1) \frac{d}{b}, \quad Q_{12} = Q_6 + Q_7, \quad Q_{13} = Q_6 \frac{d}{b}, \quad Q_{14} = Q_4 - Q_2, \quad Q_{14}^* = Q_2 Q_9^* + Q_{10},$$

$$Q_{15} = Q_{11} + Q_2 Q_9, \quad Q_{16} = Q_8 - Q_5, \quad Q_{16}^* = Q_5 Q_9^* - Q_{12}, \quad Q_{17} = Q_5 Q_9 - Q_{13},$$

$$C_9 = -\left(C_{11} + \frac{d}{b}\right), \quad C_{10} = Q_9^* C_{11} + Q_9 - C_{12}, \quad C_{11} = -\frac{1}{Q_{14}^*} (Q_{14} C_{12} + Q_{15}), \quad C_{12} = \frac{Q_{16}^* Q_{15} - Q_{17} Q_{14}^*}{Q_{16} Q_{14}^* - Q_{16}^* Q_{14}},$$

$$P_3^* = P_1 (\alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9) + P_2 (\beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9), \quad P_4^* = P_1 (\beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9) - P_2 (\alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9),$$

$$P_5^* = -[P_1 (\alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11}) + P_2 (\beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11})], \quad P_6^* = P_1 (\beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11}) - P_2 (\alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11}).$$

- VII poglavlje -

7. MHD strujanje dva mikropolarna fluida

7.1.

Dva mikropolarna fluida koja se ne mešaju

Na samom početku disertacije analiziran je problem strujanja jednog mikropolarnog fluida u prisustvu magnetnog polja. Međutim, jedno od najnovijih polja proučavanja magnetne hidrodinamike su strujanje i prenos toplote dva fluida koji se ne mešaju. Veliki broj problema koji je vezan za naftnu industriju, geofizička istraživanja, plazma fiziku, hemijsku industriju i nuklearnu tehniku uključuju strujanje više fluida.

U prethodne dve decenije naučnici počinju da se bave eksperimentalnim i anačitičkim istraživanjem strujanja dva fluida. Identifikacija zona strujanja fluida, određivanje pada pritiska, odnosa frakcija, reakcije i koeficijenta prenosa toplote je od izuzetnog značaja za projektovanje sistema sa dva fluida. Hartmannovo strujanje elektroprovodnog i neprovodnog fluida razmatrao je u svom radu Shail [90] (1973). Na osnovu dobijenih rezultata donet je zaključak da se protok može povećati i do 30% izborom odgovarajućih odnosa visina fluida i njihovih viskoznosti. Strujanje jednog elektroprovodnog i jednog neprovodnog fluida između ploča izučavano je od strane Lohrasbia i Sahaia [91] (1988). Cilj tog istraživanja bilo je razumevanje efekta prisustva sloja šljake na karakteristike prenosa toplote MHD generatora.

Vrlo brzo prilikom analize strujanja dva fluida, javila se potreba za analizu strujanja mikropolarnih fluida. Tako su Kumar i saradnici [92] (2010) razmatrali problem potpuno razvijenog konventivnog strujanja mikropolarnog i viskoznog fluida u vertikalnom kanalu sa asimetričnim temperaturama zidova. Muthyraj i Srinivas [93] (2010) su analizirali potpuno razvijeno MHD strujanje mikropolarnog i viskoznog fluida u poroznoj sredini. Isti autori su kasnije sprovedi termodinamičku analizu strujanja dva mikropolarna fluida između paralelnih

ploča [94] (2015), kao i analizu strujanja dva mikropolarna fluida u poroznoj sredini [95] (2014). Ikbal, Chakravarty i Mandal [96] (2009) razmatrali su dvoslojno strujanje mikropolarnog fluida i plazme u arteriji krvotoka. Srinivas, Muthyraj i Chamkha [79] (2016) razmatrali su strujanje dva mikropolarna fluida koji se ne mešaju u nagnutom kanalu. Umavathi, Chamkha i Shekar [80] (2014) su u želji da postave što bolji model za opisivanje ponašanja ljudske krvi, analizirali strujanje dva mikropolarna fluida koji su razdvojeni viskozim slojem fluida.

Istraživanja MHD strujanja dva fluida pokazala su mogućnost transportovanja slabo provodnih fluida u mikrofluidnim uređajima, kao što je strujanje kroz mrežu mikrokanala. U mikrofluidnim uređajima postoji potreba za transportom više fluida iz različitih razloga. Na primer, moguće je povećati mobilnost jednog fluida uparivanjem sa pokretljivijim fluidom ili se može transportovati više fluida i zatim vršiti njihova emulzifikacija ili primena u procesima prenosa toplote. Danas se sve češće primenjuju mikro EMHD pumpe i to zbog njihove pouzdanosti, odsustva pokretnih delova, male potrebne snage, reverzibilnosti strujanja, mogućnosti rada sa rastvorima kiselina itd. Nezavisno od svrhe EMHD strujanja više fluida važno je u potpunosti razumeti dinamiku razdelne površi između fluida i njen uticaj na transportne karakteristike sistema.

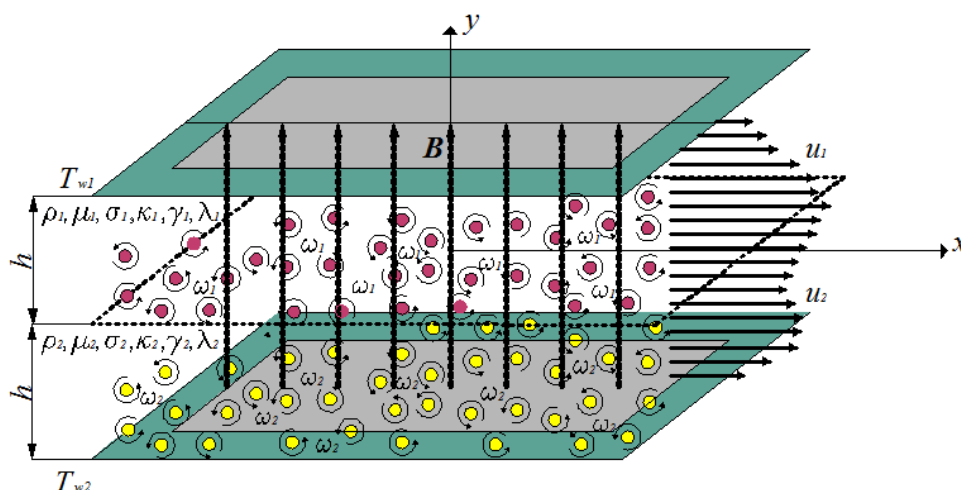
Uzimajući u obzir praktičnu primenu MHD strujanja dva elektroprovodna fluida, u ovom delu disertacije pažnja će biti posvećena strujanju dva mikropolarna fluida između nepokretnih ploča, kao i kombinovanom strujanju viskoznog i mikropolarnog fluida. Najpre će se kao i do sada formulisati fizički i odgovarajući matematički model, a onda pristupiti rešavanju i analizi dobijenih rezultata. Donešeni zaključci pomoći će u razumevanju problema strujanja dva fluida, a posebno u analizi ponašanja međusobne interakcije dva mikropolarna fluida, kao i viskoznog i mikropolarnog fluida.

7.2.

Fizički i matematički model razmatranog problema

Fizički model razmatranog problema laminarnog MHD strujanja dva mikropolarna fluida koji se ne mešaju između ploča, predstavljen je na slici 7.

Razmtra se potpuno razvijeno strujanje dva mikropolarna fluida između ploča, pri čemu je rastojanje između ploča $2h$, a uzeto je da su visine oba mikropolarna fluida iste i da iznose po h . Oba mikropolarna fluida su elektroprovodna i strujanje se obavlja u prisutvu spoljašnjeg magnetnog polja intenziteta B . Fizički model sastoji se od dve beskonačne ploče koje se protežu u pravcima x i z . Razmatrajući da je strujanje oba mikropolarna fluida posledica konstantnog pada pritiska duž x ose, te da je strujanje potpuno razvijeno, tj. da brzina ima samo komponentu u pravcu strujanja za oba fluida, $\mathbf{v} = u_i \vec{i}$, $i = 1, 2$, razmatrani problem se značajno pojednostavljuje i moguće je analitički rešiti odgovarajući matematički model. Uniformno spoljašnje magnetno polje intenziteta B prostire su u pravcu y ose. Tokom strujanja mikropolarnih fluida, gornja i donja ploča održavaju se na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2} , respektivno, pri čemu treba voditi računa da je $T_{w1} > T_{w2}$.



Slika 7. Fizički model razmatranog problema

Vektori brzina $\mathbf{v}$ i magnetnog polja $\mathbf{B}$ definisani su sledećim izrazima:

$$\mathbf{v}_i = u_i \vec{i}, \quad i = 1, 2, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{B} = B \vec{j}. \quad (7.2)$$

Ako i kod ovog problema uvedemo pretpostavku da se radi o bezindukcijskoj aproksimaciji, tj. da je Reynoldsov magnetni broj mnogo manji od jedinice, te kako nema dejstva spoljašnjeg električnog polja, to znači da se gustina struje može odrediti iz sledeće jednačine:

$$\mathbf{j}_i = \sigma_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}), i = 1, 2, \quad (7.3)$$

a za već definisane vektore brzina i magnetnog polja posmatranog problema, dobijamo:

$$\mathbf{j}_i = \sigma_i u_i \vec{Bk}, i = 1, 2. \quad (7.4)$$

Pošto znamo da je Lorentzova sila vektorski proizvod gustine struje i magnetnog polja $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, možemo definisati član za Lorentzovu silu koji će se naći u razvijenim Navier-Stokesovim jednačinama za pravac strujanja i on je dat sledećim izrazom:

$$\mathbf{j}_i \times \mathbf{B} = -\sigma_i B^2 u_i \vec{l}, i = 1, 2. \quad (7.5)$$

Na osnovu osnovnih jednačina izvedenih u drugom poglavlju disertacije za strujanje mikropolararnog fluida, a na osnovu uvedenih fizičkih uslova i pretpostavki razmatranog problema, sistem jednačina koji matematički definiše razmatrani fizički problem dat je u sledećem obliku:

$$(\mu_i + \lambda_i) \frac{d^2 u_i}{dy^2} + \lambda_i \frac{d\omega_i}{dy} - \sigma_i B^2 u_i - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (7.6)$$

$$\gamma_i \frac{d^2 \omega_i}{dy^2} - \lambda_i \frac{du_i}{dy} - 2\lambda_i \omega_i = 0, \quad (7.7)$$

$$k_i \frac{d^2 T_i}{dy^2} + (\mu_i + \lambda_i) \left(\frac{du_i}{dy} \right)^2 + \sigma_i B^2 u_i^2 = 0, i = 1, 2. \quad (7.8)$$

Uvedimo sada odgovarajuće granične uslove za razmatrani problem. Prvo, kako su ploče nepokretne i pretpostavljajući da nema klizanja na pločama, kao i uz pretpostavku da brzina kontinualna veličina na razdelnoj površini, granični uslovi za brzinu i mikrorotaciju na pločama imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0, \omega_1 = 0, \quad \text{za } y = h, \\
u_2 &= 0, \omega_2 = 0, \quad \text{za } y = -h, \\
u_1 &= u_2, \omega_1 = \omega_2, \quad \text{za } y = 0.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Što se tiče graničnih uslova za temperaturu, pretpostavljeno je da se radi o izotermalnim uslovima, tj. da su temperature mikropolarnih fluida na granici sa pločama jednake temperaturama ploča, kao i da su temperature fluida međusobno jednake na razdelnoj površini:

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_{w1} \quad \text{za } y = h, \\
T_2 &= T_{w2} \quad \text{za } y = -h, \\
T_1 &= T_2 \quad \text{za } y = 0.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Pored ovih uslova, uzeto je da su tangencijalni napon, toplotni fluks i kontinuitet mikrorotacije, međusobno jednaki na razdelnoj površini, odnosno:

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + \lambda_1) \frac{du_1}{dy} + \lambda_1 \omega_1 &= (\mu_2 + \lambda_2) \frac{du_2}{dy} + \lambda_2 \omega_2 \quad \text{za } y = 0, \\
k_1 \frac{dT_1}{dy} &= k_2 \frac{dT_2}{dy} \quad \text{za } y = 0, \\
\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dy} &= \lambda_2 \frac{d\omega_2}{dy} \quad \text{za } y = 0.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Da bi smo prethodni sistem jednačina rešili, prvo moramo preći na bezdimenzioni oblik tih jednačina i usput uvesti karakteristične bezdimenzione veličine, na osnovu kojih ćemo analizirati karakteristike strujanja mikropolarnog fluida.

Definišimo prvo bezdimenzionu brzinu, mikrorotaciju i poprečnu koordinatu:

$$u_i^* = \frac{u_i}{U}, \quad \omega_i^* = \frac{\omega_i}{U} h, \quad y_i^* = \frac{y_i}{h}, \tag{7.12}$$

gde u izrazu za bezdimenzionu brzinu u^* , U predstavlja referentnu brzinu, koja se definiše na sledeći način:

$$U = \frac{\mu_1}{\rho_1 P h_1}, \quad (7.13)$$

pri čemu P predstavlja:

$$P = -\frac{dp}{dx} = \text{const.} \quad (7.14)$$

Sledeći korak je da definišemo bezdimenzione karakteristične veličine za svaki od fluida kao što su Reynoldsov, Hartmannov, Prantlov i Eckertov broj:

$$\text{Re}_i = \frac{\rho_i h U}{\mu_i}, \quad \text{Ha}_i = Bh \sqrt{\frac{\sigma_i}{\mu_i}}, \quad \text{Pr}_i = \frac{\mu_i c_p}{k_i}, \quad E_{c_i} = \frac{U^2}{c_{p_i} (T_{w1} - T_{w2})}, \quad (7.15)$$

kao i dva nova parametra koji uzimaju uticaj dopunskih viskoznosti na karakteristike strujanja mikropolarnih fluida. U prethodnom poglavlju smo ta dva parametra definisali kao parametar sprežanja K i parametar viskoznosti mikrorotacije Γ koji su za posmatrani problem definisani izrazima:

$$K_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad \Gamma_i = \frac{\gamma_i}{\mu_i h^2}, \quad (7.16)$$

pri čemu se indeks i odnosi na prvi, odnosno drugi fluid između ploča.

Na kraju, neophodno je uvesti i bezdimenzionu temperturu koja je data izrazom:

$$\theta_i = \frac{T_i - T_{w2}}{T_{w1} - T_{w2}}. \quad (7.17)$$

Nakon definisanja karakterističnih bezdimenzionih veličina, sistem jednačina (7.6) - (7.8) u bezdimenzionom obliku dobija sledeću formu:

$$(1 + K_i) \frac{d^2 u_i^*}{dy^{*2}} + K_i \frac{d \omega_i^*}{dy^*} - \text{Ha}_i^2 u_i^* + \text{Re}_i P = 0, \quad (7.18)$$

$$\Gamma_i \frac{d^2 \omega_i^*}{dy^{*2}} - K_i \frac{du_i^*}{dy^*} - 2K_i \omega_i^* = 0, \quad (7.19)$$

$$\frac{d^2 \theta_i}{dy^{*2}} + (1 + K_i) \text{Pr}_i \text{Ec}_i \left(\frac{du_i^*}{dy^*} \right)^2 + \text{Ec}_i \text{Pr}_i \text{Ha}_i^2 u_i^{*2} = 0. \quad (7.20)$$

Sada napred definisani granični uslovi sistema (7.9) i (7.10) svedeni na bezdimenzionu formu imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} u_1^* &= 0, \omega_1^* = 0, \theta_1 = 1 \quad \text{za} \quad y^* = 1, \\ u_2^* &= 0, \omega_2^* = 0, \theta_2 = 0 \quad \text{za} \quad y^* = -1, \\ u_1^* &= u_2^*, \omega_1^* = \omega_2^*, \theta_1 = \theta_2 \quad \text{za} \quad y^* = 0, \end{aligned} \quad (7.21)$$

dok granični uslovi (7.11) imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} (1 + K_1) \frac{du_1^*}{dy^*} + K_1 \omega_1^* &= h^* \mu^* (1 + K_2) \frac{du_2^*}{dy^*} + h^* \mu^* K_2 \omega_2^* \quad \text{za} \quad y^* = 0, \\ \frac{d\theta_1}{dy^*} &= h^* k^* \frac{d\theta_2}{dy^*} \quad \text{za} \quad y^* = 0, \\ \frac{d\omega_1^*}{dy^*} &= h^{*2} \lambda^* \frac{d\omega_2^*}{dy^*} \quad \text{za} \quad y^* = 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

U bezdimenzionim graničnim uslovima (7.22) sa h^*, μ^*, k^* i λ^* definisani su sledeći odnosi karakterističnih parametra fluida:

$$h^* = \frac{h_1}{h_2}, \mu^* = \frac{\mu_2}{\mu_1}, k^* = \frac{k_2}{k_1}, \lambda^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (7.23)$$

Vratimo se sada na bezdimenzioni sistem jednačina koji opisuje razmatrani problem. Jednačine (7.18) i (7.19) rešavaju se simultano, kao kod razmatranih problema u trećem i šestom poglavlju, tako da se uz pomoć određenih matematičkih operacija iz pomenutih jednačina dobija sledeća jednačina četvrtog reda:

$$\frac{d^4 u_i^*}{dy^{*4}} - a_i \frac{d^2 u_i^*}{dy^{*2}} + b_i u_i^* - d_i = 0, \quad (7.24)$$

gde su a_i, b_i, d_i novouvedene konstante date izrazima:

$$a_i = B_i^* + E_i - A_i D_i^*, \quad b_i = E_i B_i^*, \quad d_i = E_i C_i, \quad (7.25)$$

u kojima su konstante $A_i, B_i^*, C_i, D_i^*, E_i$ date izrazima:

$$A_i = \frac{K_i}{1+K_i}, B_i^* = \frac{Ha_i^2}{1+K_i}, C_i = \frac{\text{Re}_i G}{1+K_i}, D_i^* = \frac{K_i}{\Gamma_i}, E_i = \frac{2K_i}{\Gamma_i}. \quad (7.26)$$

Prilikom rešavanja diferencijalne jednačine (7.24), kao u prethodnom poglavlju, odnosno trećem poglavlju, analizom je utvrđeno da postoje tri moguća rešenja zavisno od vrednosti korena karakteristične jednačine i da su sva tri rešenja fizički moguća.

Tri moguća rešenja za brzinu, diferencijalne jednačine (7.24), data su u sledećem obliku:

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b > 0$

$$u_i^* = C_{1i} \exp(\delta_{1i} y^*) + C_{2i} \exp(\delta_{2i} y^*) + C_{3i} \exp(\delta_{3i} y^*) + C_{4i} \exp(\delta_{4i} y^*) + \frac{d_i}{b_i}, \quad (7.27)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b = 0$

$$u_i^* = (C_{5i} + C_{6i} y^*) \exp(\xi_{1i} y^*) + (C_{7i} + C_{8i} y^*) \exp(\xi_{2i} y^*) + \frac{d_i}{b_i}, \quad (7.28)$$

- za slučaj kada je: $a^2 - 4b < 0$

$$u_i^* = [C_{9i} \cos(\beta_{1i} y^*) + C_{10i} \sin(\beta_{1i} y^*)] \exp(\alpha_{1i} y^*) + [C_{11i} \cos(\beta_{1i} y^*) + C_{12i} \sin(\beta_{1i} y^*)] \exp(-\alpha_{1i} y^*) + \frac{d_i}{b_i}. \quad (7.29)$$

Na osnovu rešenja za brzinu, sada je moguće naći rešenja za mikrorotaciju. Tri moguća rešenja za mikrorotaciju data su respektivno sledećim izrazima:

$$\omega_i^* = C_{1i} \mathcal{D}_{1i} \exp(\delta_{1i} y^*) + C_{2i} \mathcal{D}_{2i} \exp(\delta_{2i} y^*) + C_{3i} \mathcal{D}_{3i} \exp(\delta_{3i} y^*) + C_{4i} \mathcal{D}_{4i} \exp(\delta_{4i} y^*), \quad (7.30)$$

$$\omega_i^* = (E_{13i} + E_{14i}y^*)\exp(\xi_{1i}y^*) + (E_{15i} + E_{16i}y^*)\exp(\xi_{2i}y^*), \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \omega_i^* = & \left[P_{1i} \sin(\beta_{1i}y^*) - P_{2i} \cos(\beta_{1i}y^*) \right] (\alpha_{1i}C_{10i} - \beta_{1i}C_{9i}) + \\ & + \left[P_{1i} \cos(\beta_{1i}y^*) + P_{2i} \sin(\beta_{1i}y^*) \right] (\beta_{1i}C_{10i} + \alpha_{1i}C_{9i}) \} \exp(\alpha_{1i}y^*) + \\ & + \left\{ \left[P_{1i} \cos(\beta_{1i}y^*) - P_{2i} \sin(\beta_{1i}y^*) \right] (\beta_{1i}C_{12i} - \alpha_{1i}C_{11i}) - \right. \\ & \left. - \left[P_{1i} \sin(\beta_{1i}y^*) + P_{2i} \cos(\beta_{1i}y^*) \right] (\beta_{1i}C_{11i} + \alpha_{1i}C_{12i}) \right\} \exp(-\alpha_{1i}y^*). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Sada rešavanjem energijske jednačine (7.20) dobijamo rešenja za temperaturu:

$$\begin{aligned} \theta_i = & -Pr_i Ec_i \left[\frac{L_{1i}}{4\delta_{1i}^2} \exp(2\delta_{1i}y^*) + \frac{L_{2i}}{4\delta_{2i}^2} \exp(2\delta_{2i}y^*) + \right. \\ & + \frac{L_{3i}}{4\delta_{3i}^2} \exp(2\delta_{3i}y^*) + \frac{L_{4i}}{4\delta_{4i}^2} \exp(2\delta_{4i}y^*) + \frac{M_{2i}}{(\delta_{1i} + \delta_{3i})^2} \exp((\delta_{1i} + \delta_{3i})y^*) + \\ & + \frac{M_{3i}}{(\delta_{1i} + \delta_{4i})^2} \exp((\delta_{1i} + \delta_{4i})y^*) + \frac{N_{1i}}{(\delta_{2i} + \delta_{3i})^2} \exp((\delta_{2i} + \delta_{3i})y^*) + \\ & + \frac{N_{2i}}{(\delta_{2i} + \delta_{4i})^2} \exp((\delta_{2i} + \delta_{4i})y^*) + \frac{F_{1i}}{\delta_{1i}^2} \exp(\delta_{1i}y^*) + \frac{F_{2i}}{\delta_{2i}^2} \exp(\delta_{2i}y^*) + \\ & + \frac{F_{3i}}{\delta_{3i}^2} \exp(\delta_{3i}y^*) + \frac{F_{4i}}{\delta_{4i}^2} \exp(\delta_{4i}y^*) + \\ & \left. + \frac{M_{1i}}{2} y^{*2} + \frac{N_{3i}}{2} y^{*2} + \frac{F_{5i}}{2} y^{*2} + {}^1H_{1i}y^* + {}^1H_{2i} \right], \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} \theta_i = & -Pr_i Ec_i \left[(\Omega_{28i} + \Omega_{29i}y^* + \Omega_{30i}y^{*2}) \exp(2\xi_{1i}y^*) + \right. \\ & + (\Omega_{31i} + \Omega_{32i}y^* + \Omega_{33i}y^{*2}) \exp(2\xi_{2i}y^*) + \\ & + (\Omega_{34i} + \Omega_{35i}y^* + \Omega_{36i}y^{*2}) \exp((\xi_{1i} + \xi_{2i})y^*) + \\ & + (\Omega_{37i} + \Omega_{38i}y^*) \exp(\xi_{1i}y^*) + (\Omega_{39i} + \Omega_{40i}y^*) \exp(\xi_{2i}y^*) + \\ & \left. + \frac{\Omega_{14i}}{2} y^{*2} + {}^2H_{1i}y^* + {}^2H_{2i} \right], \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned}
\theta_i = -\Pr_i Ec_i \left\{ \left[\frac{1}{2\alpha_{1i}} \Omega_{45i} + \frac{1}{2} (\chi_{1i} \Omega_{47i} - \chi_{2i} \Omega_{49i}) \cos(2\beta_{1i} y^*) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2} (\chi_{2i} \Omega_{47i} + \chi_{1i} \Omega_{49i}) \sin(2\beta_{1i} y^*) \right] \exp(2\alpha_{1i} y^*) + \right. \\
\left. + \left[\frac{1}{2\alpha_{1i}} \Omega_{46i} - \frac{1}{2} (\chi_{1i} \Omega_{48i} + \chi_{2i} \Omega_{50i}) \cos(2\beta_{1i} y^*) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2} (\chi_{2i} \Omega_{48i} - \chi_{1i} \Omega_{50i}) \sin(2\beta_{1i} y^*) \right] \exp(-2\alpha_{1i} y^*) - \frac{1}{2\beta_{1i}} \Omega_{51i} \sin(2\beta_{1i} y^*) - \right. \\
\left. - \frac{1}{2\beta_{1i}} \Omega_{52i} \cos(2\beta_{1i} y^*) + \left[(\Omega_{53i} \chi_{1i} - \Omega_{55i} \chi_{2i}) \cos(\beta_{1i} y^*) + \right. \right. \\
\left. \left. + (\Omega_{53i} \chi_{2i} + \Omega_{55i} \chi_{1i}) \sin(\beta_{1i} y^*) \right] \exp(\alpha_{1i} y^*) + \left[(\Omega_{54i} \chi_{1i} - \Omega_{56i} \chi_{2i}) \cos(\beta_{1i} y^*) - \right. \right. \\
\left. \left. - (\Omega_{54i} \chi_{2i} + \Omega_{56i} \chi_{1i}) \sin(\beta_{1i} y^*) \right] \exp(-\alpha_{1i} y^*) + \frac{1}{2} \Omega_{57i} y^{*2} + {}^3H_{1i} y^* + {}^3H_{2i} \right\}. \quad (7.35)
\end{aligned}$$

7.3.

Analiza rezultata razmatranog problema

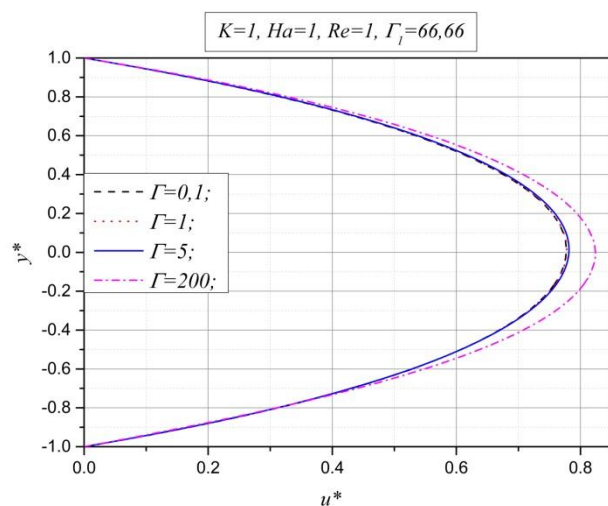
U prethodnom delu VII poglavlja, definisali smo matematički model razmatranog problema strujanja dva mikropolarna fluida između ploča i našli rešenja za polje brzine, mikrorotacije i temperature. Sada će dobijena rešenja biti analizirana u funkciji bezdimenzionih veličina i to Hartmannovog Ha i Reynoldsovog broja Re , kao i veličina koje pre svega karakterišu mikropolarne fluide: parametra sprezanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ . Deo ovih rezultata već je izložen na kongresu Srpskog društva za mehaniku 2017. godine [97].

Iako su svi efekti predstavljeni istovremeno, kretanje je posledica gradijenta pritiska, dok je pad pritiska posledica dejstva viskoznih sila, koje su izražene preko μ , uticaj dopunskih spregnutih napona izražen je preko γ , a λ predstavlja sprezanje karakteristika mikrostrukture sa poljem brzine mikropolarnog fluida.

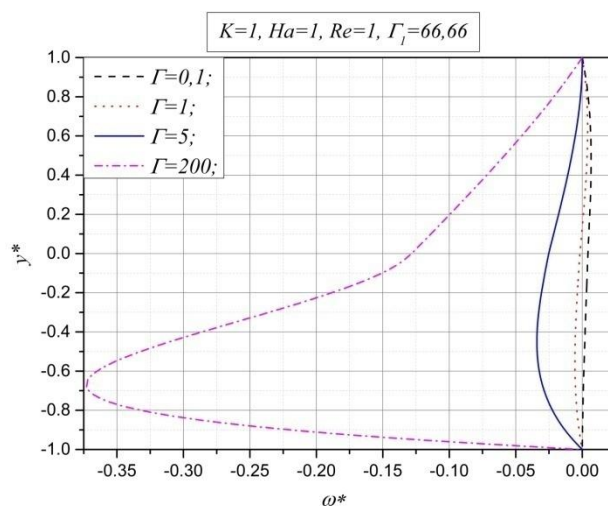
Treba naglastiti da je u slučaju razmatranja uticaja karakterističnih parametara analiza vršena za promenu parametara jednog fluida, dok je vrednost parametara drugog fluida bila konstantna. Tačnije, analiza je vršena za promenu vrednosti Γ, K, Ha i Re , koje u ovom slučaju predstavljaju odnose:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}; \quad K = \frac{K_1}{K_2}, \quad Ha = \frac{Ha_1}{Ha_2}; \quad Re = \frac{Re_1}{Re_2}.$$

Prva tri grafika predstavljaju uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , na polje brzine, mikrorotacije i temperature.



7.1 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na profil brzine

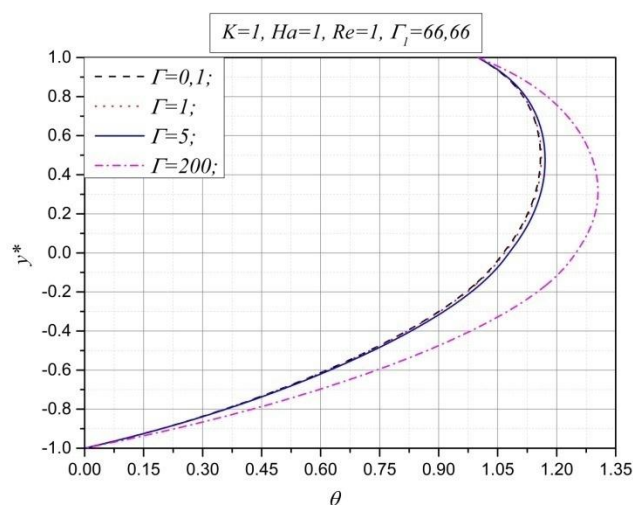


7.2 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju

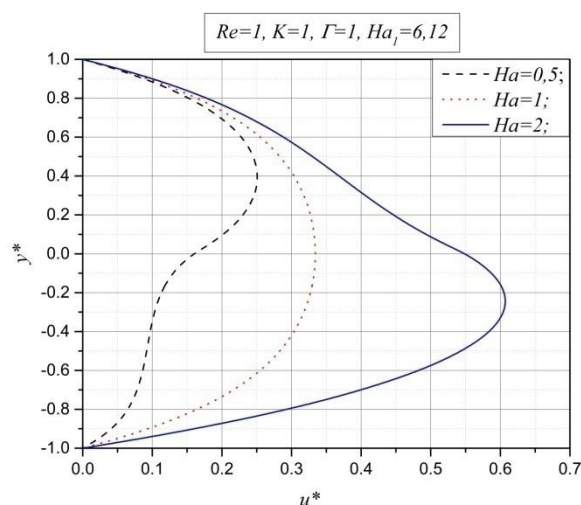
Na grafiku 7.1 prikazan je uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na brzinu, koji ukazuje da se brzina povećava kako se povećava odnos parametra viskoznosti mikrorotacije dva mikropolarna fluida. Povećanje odnosa parametra viskoznosti mikrorotacije Γ postignuto je smanjenjem parametra viskoznosti mikrorotacije drugog fluida Γ_2 . Značajnije povećanje brzine postignuto je tek za jako malu vrednost parametra viskoznosti mikrorotacije drugog fluida Γ_2 , tj. u tom slučaju vrednost odnosa parametra viskoznosti mikrorotacije Γ postaje jako velika. U tom slučaju, kada je vrednost parametra viskoznosti mikrorotacije drugog fluida Γ_2 mala, viskozni efekti pri strujanju fluida su daleko veći od efekata dopunskih spregnutih napona izraženih preko γ , pa u slučaju kada $\gamma \rightarrow 0$ dolazimo do modela MHD strujanja viskoznog fluida.

Ova činjenica dovodi do zaključka da povećanje dopunske viskoznosti mikrorotacije γ , smanjuje protok u poređenju sa slučajem viskozne tečnosti.

Na narednom grafiku 7.2 dat je uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na mikrorotaciju. Sa grafika se vidi da gornji fluid (ili prvi) zadržava konstantnu vrednost parametra viskoznosti mikrorotacije Γ_1 , dok je vrednost parametra viskoznosti mikrorotacije Γ_2 donjeg fluida (ili drugog) promenjiva. Na osnovu ovoga, sve promene koje se dešavaju u gornjem delu kanala, gde struji prvi fluid, posledica su promene parametra viskoznosti mikrorotacije Γ_2 mikropolarnog fluida u donjem delu kanala. Iz donjeg dela kanala može se primetiti da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ_2 dovodi do smanjenja apsolutnih vrednosti mikrorotacije.



7.3 Uticaj parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na profil temperature



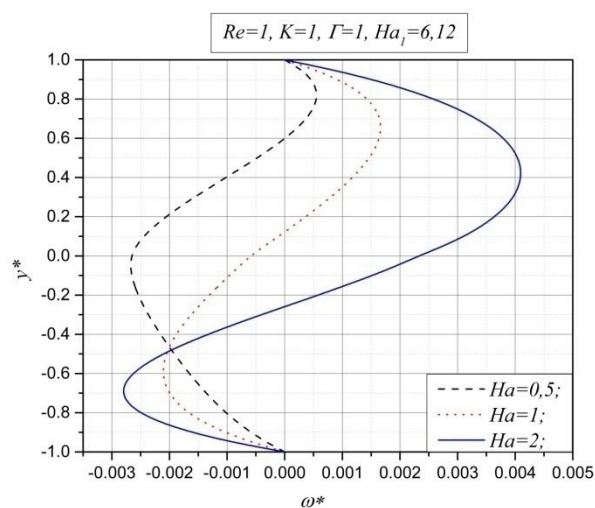
7.4 Uticaj Hartmannovog broja Ha na brzinu

Naredni grafik 7.3 predstavlja uticaj odnosa parametara viskoznosti mikrorotacije Γ na profil bezdimenzione temperature. Povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije drugog fluida Γ_2 dovodi do smanjenja vrednosti odnosa parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , a ujedno i do smanjenja vrednosti bezdimenzione temperature po celoj visini između ploča. Sledi zaključak da povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije jednog od fluida, dovodi do smanjenja energije transformisane unutar samog fluida.

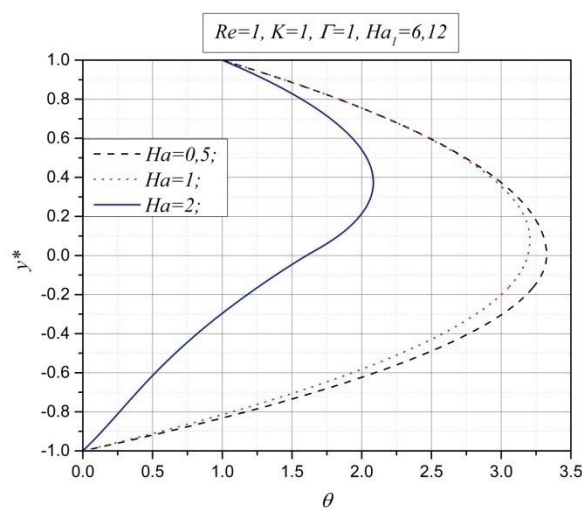
Sada prelazimo na uticaj Hartmannovog broja na polje brzine, mikrorotacije i temperature.

Grafik 7.4 prikazuje uticaj odnosa Hartmannovih brojeva dva mikropolarna fluida, na polje brzine strujanja ta dva fluida. Sa porastom vrednosti Hartmannovog broja donjeg fluida Ha_2 dolazi do smanjenja vrednosti brzine u donjem delu kanala, ali kao posledica toga i do delimičnog smanjenja brzine prvog fluida u zoni blizu razdelne površine. Ovi rezultati su u potpunosti očekivani, jer što je veći intenzitet spoljašnjeg magnetnog polja, to je veća i vrednost Hartmannovog broja, ali i uticaj Lorentzove sile koja se suprotstavlja strujanju fluida. Slično ovome vrednost mikrorotacije se takođe smanjuje sa povećanjem vrednosti Hartmannovog broja, što je prikazano na grafiku 7.5. Ovo vodi ka zaključku da magnetno polje umanjuje karakteristike mikropolarnih fluida, a sa grafika 7.5 se takođe vidi da veći uticaj magnetnog polja ima tendenciju promene smeru mikrorotacije.

Za niže vrednosti Hartmannovog broja, viskozna disipacija povećava temperaturu fluida između ploča, dok prilikom povećanja intenziteta magnetnog polja samo efekat Jouleove toplote povećava temperaturu u sredini kanala, što je i prikazano na grafiku 7.6.



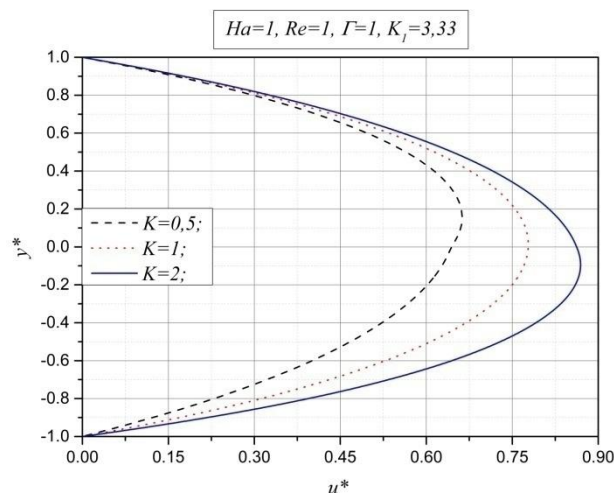
7.5 Uticaj Hartmannovog broja Ha na profil mikrorotacije



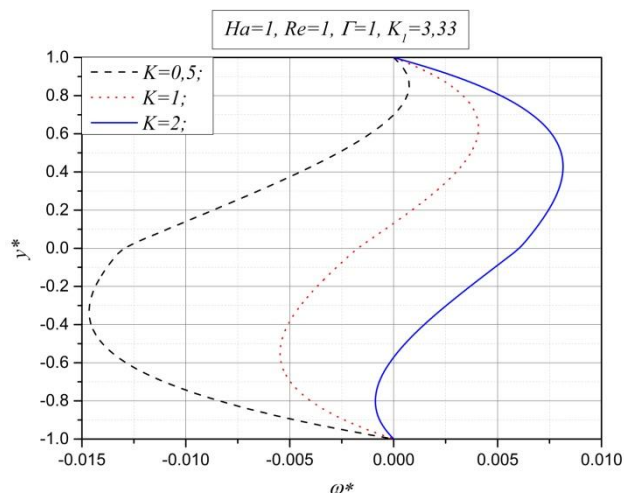
7.6 Uticaj Hartmannovog broja Ha na temperaturu

Pored parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , čiji smo uticaj analizirali kroz grafike 7.1 - 7.3, još jedan parametar posebno karakteriše strujanje mikropolarnih fluida. Taj parametar predstavlja odnos dopunske viskoznosti λ , koja je svojstvena samo mikropolarnim fluidima, i dinamičke viskoznosti μ i koja je nazvana parametar sprezanja K . Uticaj ovog parametra na

brzinu, mikrorotaciju i temperaturu kod strujanja dva mikropolarna fluida između ploča, dat je na graficima 7.7 - 7.9.



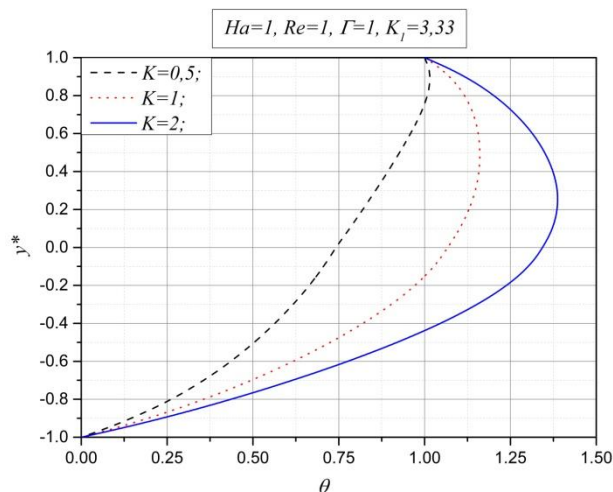
7.7 Uticaj parametra sprezanja K na profil brzine



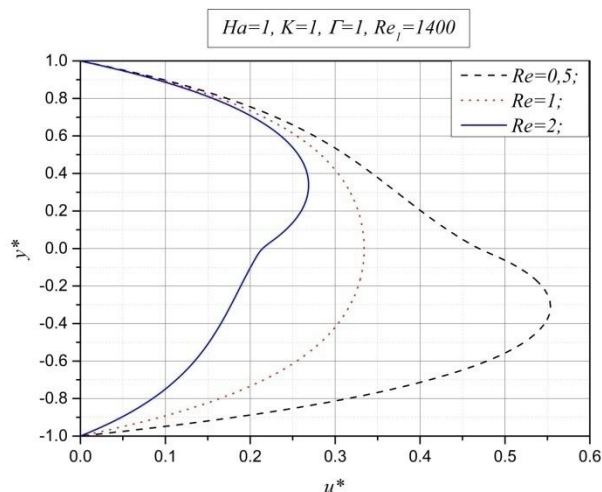
7.8 Uticaj parametra sprezanja K na mikrorotaciju

Na grafiku 7.7 predstavljen je uticaj parametra sprezanja K na profil brzine strujanja fluida. Sa ovog grafika, lako se uočava da povećanje vrednosti parametra sprezanja K_2 , drugog fluida koji struji u donjem delu kanala, dovodi do smanjenja intenziteta brzine. Ovo znači da se otpor fluida strujanju povećava sa povećavanjem vrednosti parametra sprezanja, odnosno sa povećanjem vrednosti dopunske viskoznosti λ naspram dinamičke viskoznosti μ . U slučaju kada parametar sprezanja $K \rightarrow 0$, dobijeni rezultati odgovaraju strujanju viskoznog fluida.

Sa grafika 7.8 vidimo da se apsolutna vrednost mikrorotacije blizu donje ploče povećava sa povećanjem parametra sprezanja K_2 , pri čemu uz to vektor mikrorotacije pokazuje tendenciju promene smera. Naravno smanjenje vrednosti mikrorotacije uz gornju ploču, je posledica promene parametra sprezanja K_2 u donjem delu kanala, jer parametar sprezanja K_1 uzima istu konstantu vrednost u sva tri slučaja. Ove tendencije jasno pokazuju uticaj donjeg fluida na gornji, tj. uticaj uslova na razdelnoj površi.



7.9 Uticaj parametra sprezanja K na bezdimenzionu temperaturu

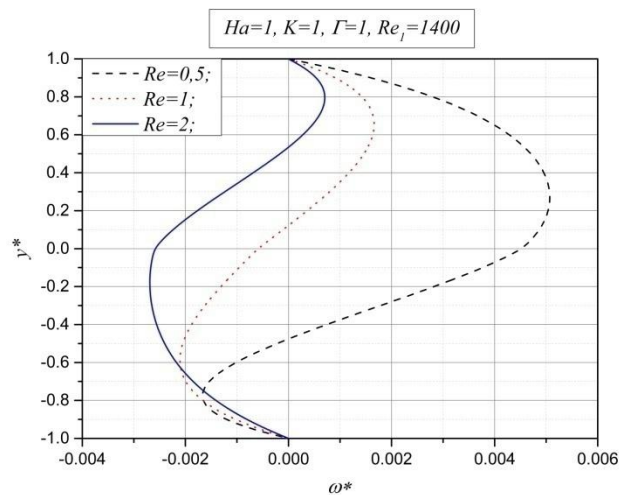
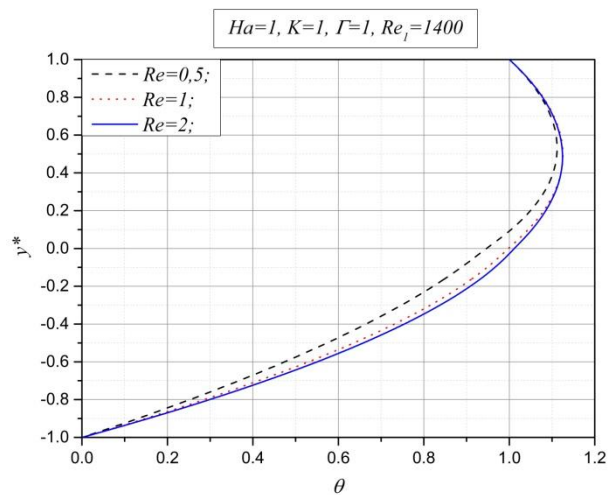


7.10 Uticaj Reynoldsovog broja Re na brzinu

Sledeći grafik 7.9 pokazuje uticaj parametra sprezanja K na bezdimenzionu temperaturu, gde se sa grafika jasno može videti da povećanje parametra sprezanja K_2 dovodi do smanjenja temperature po celoj širini kanala. Za očekivati je da pri većim vrednostima odnosa parametra sprezanja K , dominantan prenos toplote u struji mikropolarnih fluida bude kondukcija.

Na kraju, ostalo je da razmotrimo i uticaj Reynoldsovog broja Re na polje brzine, mikrorotacije i temperaure dva mikropolarna fluida između ploča.

Prvo razmotrimo uticaj Reynoldsovog broja Re na brzinu, što je dato na grafiku 7.10. Sa ovog grafika jasno se može uočiti da za veće vrednosti Reynoldsovog broja Re_2 drugog fluida, dolazi do povećanja brzine strujanja tog fluida, što je bilo i za očekivati jer sa povećanjem Reynoldsovog broja dolazi i do porasta odnosa inercijalnih i viskoznih sila.

7.11 Reynoldsovog broja Re na mikrorotaciju7.12 Uticaj Reynoldsovog broja Re na bezdimenzionu temperaturu

Sa grafika 7.11 vidimo da se mikrorotacija u donjem delu kanala smanjuje sa smanjenjem Reynoldsovog broja drugog fluida Re_2 . Smanjenjem Reynoldsovog broja viskozne sile postaju dominantne u odnosu na inercijalne, pa drugi član jednačine (7.19) proporcionalan gradijentu brzine dovodi do smanjenja vrednosti mikrorotacije uz tendenciju da promeni smer rotacije.

Na kraju, grafik 7.12 pokazuje uticaj Reynoldsovog broja na polje bezdimenzione temperature. Povećanje Reynoldsovog broja drugog fluida Re_2 u donjem delu kanala, dovodi do intenziviranja prenosa toplote između dva mikropolarna fluida, a samim tim vodi ka uniformnijem rasporedu temperature unutar dva mikropolarna fluida između ploča.

7.4.

*Dodatak - konstante kod razmatranog problema*Za slučaj kada je $a^2 - 4b > 0$, konstante su:

$$r_{1,i} = \frac{1}{2} \left(a_i + \sqrt{a_i^2 - 4b_i} \right) \quad i = 1, 2, \quad r_{2,i} = \frac{1}{2} \left(a_i - \sqrt{a_i^2 - 4b_i} \right) \quad i = 1, 2,$$

$$\delta_{1,i} = \sqrt{r_{1,i}}, \quad \delta_{2,i} = -\sqrt{r_{1,i}}, \quad \delta_{3,i} = \sqrt{r_{2,i}}, \quad \delta_{4,i} = -\sqrt{r_{2,i}}, \quad i = 1, 2,$$

$$L_{ii} = \frac{1}{E_i} \left(\frac{B_i^*}{A_i} - D_i^* \right), \quad i = 1, 2, \quad L_{iii} = \frac{1}{E_i A_i}, \quad i = 1, 2, \quad D_{ji} = \delta_{ji} \left(L_{ii} - L_{iii} \delta_{ji}^2 \right), \quad j = 1, \dots, 4; \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha_1 = \exp(\delta_{11}), \quad \alpha_2 = \exp(\delta_{21}), \quad \alpha_3 = \exp(\delta_{31}), \quad \alpha_4 = \exp(\delta_{41}), \quad \alpha_5 = \frac{d_1}{b_1}, \quad \alpha_6 = D_{11} \exp(\delta_{11}),$$

$$\alpha_7 = D_{21} \exp(\delta_{21}), \quad \alpha_8 = D_{31} \exp(\delta_{31}), \quad \alpha_9 = D_{41} \exp(\delta_{41}), \quad \alpha_{10} = \exp(-\delta_{12}), \quad \alpha_{11} = \exp(-\delta_{22}),$$

$$\alpha_{12} = \exp(-\delta_{32}), \quad \alpha_{13} = \exp(-\delta_{42}), \quad \alpha_{14} = \frac{d_2}{b_2}, \quad \alpha_{15} = D_{12} \exp(-\delta_{12}), \quad \alpha_{16} = D_{22} \exp(-\delta_{22}),$$

$$\alpha_{17} = D_{32} \exp(-\delta_{32}), \quad \alpha_{18} = D_{42} \exp(-\delta_{42}), \quad \alpha_{19} = \delta_{11} + \varepsilon_1 K_1 \delta_{11} + \varepsilon_1 K_1 D_{11},$$

$$\alpha_{20} = \delta_{21} + \varepsilon_1 K_1 \delta_{21} + \varepsilon_1 K_1 D_{21}, \quad \alpha_{21} = \delta_{31} + \varepsilon_1 K_1 \delta_{31} + \varepsilon_1 K_1 D_{31}, \quad \alpha_{22} = \delta_{41} + \varepsilon_1 K_1 \delta_{41} + \varepsilon_1 K_1 D_{41},$$

$$\alpha_{23} = h^* \mu^* (\delta_{12} + \varepsilon_2 K_2 \delta_{12} + \varepsilon_2 K_2 D_{12}), \quad \alpha_{24} = h^* \mu^* (\delta_{22} + \varepsilon_2 K_2 \delta_{22} + \varepsilon_2 K_2 D_{22}),$$

$$\alpha_{25} = h^* \mu^* (\delta_{32} + \varepsilon_2 K_2 \delta_{32} + \varepsilon_2 K_2 D_{32}), \quad \alpha_{26} = h^* \mu^* (\delta_{42} + \varepsilon_2 K_2 \delta_{42} + \varepsilon_2 K_2 D_{42}), \quad \alpha_{27} = \varepsilon_1 D_{11} \delta_{11},$$

$$\alpha_{28} = \varepsilon_1 D_{21} \delta_{21}, \quad \alpha_{29} = \varepsilon_1 D_{31} \delta_{31}, \quad \alpha_{30} = \varepsilon_1 D_{41} \delta_{41}, \quad \alpha_{31} = \varepsilon_2 \lambda^* h^{*2} D_{12} \delta_{12}, \quad \alpha_{32} = \varepsilon_2 \lambda^* h^{*2} D_{22} \delta_{22},$$

$$\alpha_{33} = \varepsilon_2 \lambda^* h^{*2} D_{32} \delta_{32}, \quad \alpha_{34} = \varepsilon_2 \lambda^* h^{*2} D_{42} \delta_{42}, \quad \alpha_{35} = \alpha_1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_9} \alpha_6, \quad \alpha_{36} = \alpha_2 - \frac{\alpha_4}{\alpha_9} \alpha_7, \quad \alpha_{37} = \alpha_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_9} \alpha_8,$$

$$\alpha_{38} = \alpha_{10} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{18}} \alpha_{15}, \quad \alpha_{39} = \alpha_{11} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{18}} \alpha_{16}, \quad \alpha_{40} = \alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{18}} \alpha_{17}, \quad \alpha_{41} = 1 - \frac{\alpha_6}{\alpha_9}, \quad \alpha_{42} = 1 - \frac{\alpha_7}{\alpha_9},$$

$$\alpha_{43} = 1 - \frac{\alpha_8}{\alpha_9}, \quad \alpha_{44} = 1 - \frac{\alpha_{15}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{45} = 1 - \frac{\alpha_{16}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{46} = 1 - \frac{\alpha_{17}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{47} = D_{11} - D_{41} \frac{\alpha_6}{\alpha_9}, \quad \alpha_{48} = D_{21} - D_{41} \frac{\alpha_7}{\alpha_9},$$

$$\alpha_{49} = D_{31} - D_{41} \frac{\alpha_8}{\alpha_9}, \quad \alpha_{50} = D_{12} - D_{42} \frac{\alpha_{15}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{51} = D_{22} - D_{42} \frac{\alpha_{16}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{52} = D_{32} - D_{42} \frac{\alpha_{17}}{\alpha_{18}},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{53} &= \alpha_{19} - \alpha_{22} \frac{\alpha_6}{\alpha_9}, \quad \alpha_{54} = \alpha_{20} - \alpha_{22} \frac{\alpha_7}{\alpha_9}, \quad \alpha_{55} = \alpha_{21} - \alpha_{22} \frac{\alpha_8}{\alpha_9}, \quad \alpha_{56} = \alpha_{23} - \alpha_{26} \frac{\alpha_{15}}{\alpha_{18}}, \\
\alpha_{57} &= \alpha_{24} - \alpha_{26} \frac{\alpha_{16}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{58} = \alpha_{25} - \alpha_{26} \frac{\alpha_{17}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{59} = \alpha_{27} - \alpha_{30} \frac{\alpha_6}{\alpha_9}, \quad \alpha_{60} = \alpha_{28} - \alpha_{30} \frac{\alpha_7}{\alpha_9}, \\
\alpha_{61} &= \alpha_{29} - \alpha_{30} \frac{\alpha_8}{\alpha_9}, \quad \alpha_{62} = \alpha_{31} - \alpha_{34} \frac{\alpha_{15}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{63} = \alpha_{32} - \alpha_{34} \frac{\alpha_{16}}{\alpha_{18}}, \quad \alpha_{64} = \alpha_{33} - \alpha_{34} \frac{\alpha_{17}}{\alpha_{18}}, \\
\alpha_{65} &= \alpha_{41} - \alpha_{43} \frac{\alpha_{35}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{66} = \alpha_{42} - \alpha_{43} \frac{\alpha_{36}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{67} = \alpha_5 - \alpha_{43} \frac{\alpha_5}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{68} = \alpha_{44} - \alpha_{46} \frac{\alpha_{38}}{\alpha_{40}}, \\
\alpha_{69} &= \alpha_{45} - \alpha_{46} \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}}, \quad \delta_{70} = \alpha_{14} - \alpha_{46} \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{71} = \alpha_{47} - \alpha_{49} \frac{\alpha_{35}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{72} = \alpha_{48} - \alpha_{49} \frac{\alpha_{36}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{73} = \alpha_5 \frac{\alpha_{49}}{\alpha_{37}}, \\
\alpha_{74} &= \alpha_{50} - \alpha_{52} \frac{\alpha_{38}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{75} = \alpha_{51} - \alpha_{52} \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{76} = \alpha_{14} \frac{\alpha_{52}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{77} = \alpha_{53} - \alpha_{55} \frac{\alpha_{35}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{78} = \alpha_{54} - \alpha_{55} \frac{\alpha_{36}}{\alpha_{37}}, \\
\alpha_{79} &= \alpha_5 \frac{\alpha_{55}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{80} = \alpha_{56} - \alpha_{58} \frac{\alpha_{38}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{81} = \alpha_{57} - \alpha_{58} \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{82} = \alpha_{14} \frac{\alpha_{58}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{83} = \alpha_{59} - \alpha_{61} \frac{\alpha_{35}}{\alpha_{37}}, \\
\alpha_{84} &= \alpha_{60} - \alpha_{61} \frac{\alpha_{36}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{85} = \alpha_5 \frac{\alpha_{61}}{\alpha_{37}}, \quad \alpha_{86} = \alpha_{62} - \alpha_{64} \frac{\alpha_{38}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{87} = \alpha_{63} - \alpha_{64} \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}}, \quad \alpha_{88} = \alpha_{14} \frac{\alpha_{64}}{\alpha_{40}}, \\
\alpha_{89} &= \alpha_{70} - \alpha_{67}, \quad \alpha_{90} = \alpha_{73} - \alpha_{76}, \quad \alpha_{91} = \alpha_{79} - \alpha_{82}, \quad \alpha_{92} = \alpha_{85} - \alpha_{88}, \quad \alpha_{93} = \alpha_{72} - \alpha_{66} \frac{\alpha_{71}}{\alpha_{65}}, \\
\alpha_{94} &= \alpha_{68} \frac{\alpha_{71}}{\alpha_{65}} - \alpha_{74}, \quad \alpha_{95} = \alpha_{69} \frac{\alpha_{71}}{\alpha_{65}} - \alpha_{75}, \quad \alpha_{96} = \alpha_{90} - \frac{\alpha_{71}}{\alpha_{65}} \alpha_{89}, \quad \alpha_{97} = \alpha_{78} - \frac{\alpha_{77}}{\alpha_{65}} \alpha_{66}, \\
\alpha_{98} &= \alpha_{68} \frac{\alpha_{77}}{\alpha_{65}} - \alpha_{80}, \quad \alpha_{99} = \alpha_{69} \frac{\alpha_{77}}{\alpha_{65}} - \alpha_{81}, \quad \alpha_{100} = \alpha_{91} - \frac{\alpha_{77}}{\alpha_{65}} \alpha_{89}, \quad \alpha_{101} = \alpha_{84} - \frac{\alpha_{83}}{\alpha_{65}} \alpha_{66}, \\
\alpha_{102} &= \alpha_{68} \frac{\alpha_{83}}{\alpha_{65}} - \alpha_{86}, \quad \alpha_{103} = \alpha_{69} \frac{\alpha_{83}}{\alpha_{65}} - \alpha_{87}, \quad \alpha_{104} = \alpha_{92} - \frac{\alpha_{83}}{\alpha_{65}} \alpha_{89}, \quad \alpha_{105} = \alpha_{98} - \frac{\alpha_{97}}{\alpha_{93}} \alpha_{94}, \\
\alpha_{106} &= \alpha_{99} - \frac{\alpha_{97}}{\alpha_{93}} \alpha_{95}, \quad \alpha_{107} = \alpha_{100} - \frac{\alpha_{97}}{\alpha_{93}} \alpha_{96}, \quad \alpha_{108} = \alpha_{102} - \frac{\alpha_{101}}{\alpha_{93}} \alpha_{94}, \quad \alpha_{109} = \alpha_{103} - \frac{\alpha_{101}}{\alpha_{93}} \alpha_{95}, \\
\alpha_{110} &= \alpha_{104} - \frac{\alpha_{101}}{\alpha_{93}} \alpha_{96}, \quad \alpha_{111} = \alpha_{109} - \frac{\alpha_{106}}{\alpha_{105}} \alpha_{108}, \quad \alpha_{112} = \alpha_{110} - \frac{\alpha_{107}}{\alpha_{105}} \alpha_{108},
\end{aligned}$$

$$C_{11} = \frac{1}{\alpha_{65}}(\alpha_{89} - C_{21}\alpha_{66} + C_{12}\alpha_{68} + C_{22}\alpha_{69}), \quad C_{21} = -\frac{1}{\alpha_{93}}(C_{12}\alpha_{94} + C_{22}\alpha_{95} - \alpha_{96}),$$

$$C_{31} = -\frac{1}{\alpha_{37}}(C_{11}\alpha_{35} + C_{21}\alpha_{36} + \alpha_5), \quad C_{41} = -\frac{1}{\alpha_9}(C_{11}\alpha_6 + C_{21}\alpha_7 + C_{31}\alpha_8), \quad C_{12} = \frac{\alpha_{107}}{\alpha_{105}} - \frac{\alpha_{106}}{\alpha_{105}}C_{22},$$

$$C_{22} = \frac{\alpha_{112}}{\alpha_{111}}, \quad C_{32} = -\frac{1}{\alpha_{40}}(C_{12}\alpha_{38} + C_{22}\alpha_{39} + \alpha_{14}), \quad C_{42} = -\frac{1}{\alpha_{18}}(C_{12}\alpha_{15} + C_{22}\alpha_{16} + C_{32}\alpha_{17}),$$

$$L_{ji} = C_{ji}^2 \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \delta_{ji}^2 + Ha_i^2 \right], \quad j=1, \dots, 4; i=1, 2,$$

$$M_{ji} = 2C_{1i}C_{j+1,i} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \delta_{1i} \delta_{j+1,i} + Ha_i^2 \right], \quad j=1, \dots, 3; i=1, 2,$$

$$N_{j,i} = 2C_{2i}C_{j+2,i} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \delta_{2i} \delta_{j+2,i} + Ha_i^2 \right], \quad j=1, 2; i=1, 2,$$

$$N_{3i} = 2C_{3i}C_{4i} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \delta_{3i} \delta_{4i} + Ha_i^2 \right], \quad i=1, 2,$$

$$F_{ji} = 2Ha_i^2 \frac{d_i}{b_i} C_{ji}, \quad j=1, \dots, 4; i=1, 2, \quad F_{5i} = Ha_i^2 \frac{d_i^2}{b_i^2}, \quad i=1, 2,$$

$$\mathbb{B}_{11} = \text{Pr}_1 \text{Ec}_1 \left[\frac{L_{11}}{4\delta_{11}^2} + \frac{L_{21}}{4\delta_{21}^2} + \frac{L_{31}}{4\delta_{31}^2} + \frac{L_{41}}{4\delta_{41}^2} + \frac{M_{21}}{(\delta_{11} + \delta_{31})^2} + \frac{M_{31}}{(\delta_{11} + \delta_{41})^2} + \right. \\ \left. + \frac{N_{11}}{(\delta_{21} + \delta_{31})^2} + \frac{N_{21}}{(\delta_{21} + \delta_{41})^2} + \frac{F_{11}}{\delta_{11}^2} + \frac{F_{21}}{\delta_{21}^2} + \frac{F_{31}}{\delta_{31}^2} + \frac{F_{41}}{\delta_{41}^2} \right],$$

$$\mathbb{B}_{21} = \frac{L_{11}}{4\delta_{11}^2} \exp(2\delta_{11}) + \frac{L_{21}}{4\delta_{21}^2} \exp(2\delta_{21}) + \frac{L_{31}}{4\delta_{31}^2} \exp(2\delta_{31}) + \\ + \frac{L_{41}}{4\delta_{41}^2} \exp(2\delta_{41}) + \frac{M_{11}}{2} + \frac{M_{21}}{(\delta_{11} + \delta_{31})^2} \exp(\delta_{11} + \delta_{31}) + \frac{M_{31}}{(\delta_{11} + \delta_{41})^2} \exp(\delta_{11} + \delta_{41}) + \\ + \frac{N_{11}}{(\delta_{21} + \delta_{31})^2} \exp(\delta_{21} + \delta_{31}) + \frac{N_{21}}{(\delta_{21} + \delta_{41})^2} \exp(\delta_{21} + \delta_{41}) + \frac{N_{31}}{2} + \frac{F_{11}}{\delta_{11}^2} \exp(\delta_{11}) + \\ + \frac{F_{21}}{\delta_{21}^2} \exp(\delta_{21}) + \frac{F_{31}}{\delta_{31}^2} \exp(\delta_{31}) + \frac{F_{41}}{\delta_{41}^2} \exp(\delta_{41}) + \frac{F_{51}}{2},$$

$$\mathbb{B}_{12} = \text{Pr}_2 \text{Ec}_2 \left[\frac{L_{12}}{4\delta_{12}^2} + \frac{L_{22}}{4\delta_{22}^2} + \frac{L_{32}}{4\delta_{32}^2} + \frac{L_{42}}{4\delta_{42}^2} + \frac{M_{22}}{(\delta_{12} + \delta_{32})^2} + \frac{M_{32}}{(\delta_{12} + \delta_{42})^2} + \right. \\ \left. + \frac{N_{12}}{(\delta_{22} + \delta_{32})^2} + \frac{N_{22}}{(\delta_{22} + \delta_{42})^2} + \frac{F_{12}}{\delta_{12}^2} + \frac{F_{22}}{\delta_{22}^2} + \frac{F_{32}}{\delta_{32}^2} + \frac{F_{42}}{\delta_{42}^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{22} = & \frac{L_{12}}{4\delta_{12}^2} \exp(-2\delta_{12}) + \frac{L_{22}}{4\delta_{22}^2} \exp(-2\delta_{22}) + \frac{L_{32}}{4\delta_{32}^2} \exp(-2\delta_{32}) + \\
& + \frac{L_{42}}{4\delta_{42}^2} \exp(-2\delta_{42}) + \frac{M_{12}}{2} + \frac{M_{22}}{(\delta_{12} + \delta_{32})^2} \exp(-(\delta_{12} + \delta_{32})) + \frac{M_{32}}{(\delta_{12} + \delta_{42})^2} \exp(-(\delta_{12} + \delta_{42})) + \\
& + \frac{N_{12}}{(\delta_{22} + \delta_{32})^2} \exp(-(\delta_{22} + \delta_{32})) + \frac{N_{22}}{(\delta_{22} + \delta_{42})^2} \exp(-(\delta_{22} + \delta_{42})) + \frac{N_{32}}{2} + \frac{F_{12}}{\delta_{12}^2} \exp(-\delta_{12}) + \\
& + \frac{F_{22}}{\delta_{22}^2} \exp(-\delta_{22}) + \frac{F_{32}}{\delta_{32}^2} \exp(-\delta_{32}) + \frac{F_{42}}{\delta_{42}^2} \exp(-\delta_{42}) + \frac{F_{52}}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{11} = \Pr_1 \text{Ec}_1 \left[\frac{L_{11}}{2\delta_{11}} + \frac{L_{21}}{2\delta_{21}} + \frac{L_{31}}{2\delta_{31}} + \frac{L_{41}}{2\delta_{41}} + \frac{M_{21}}{(\delta_{11} + \delta_{31})} + \frac{M_{31}}{(\delta_{11} + \delta_{41})} + \right. \\
\left. + \frac{N_{11}}{(\delta_{21} + \delta_{31})} + \frac{N_{21}}{(\delta_{21} + \delta_{41})} + \frac{F_{11}}{\delta_{11}} + \frac{F_{21}}{\delta_{21}} + \frac{F_{31}}{\delta_{31}} + \frac{F_{41}}{\delta_{41}} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{12} = \Pr_2 h^* k^* \text{Ec}_2 \left[\frac{L_{12}}{2\delta_{12}} + \frac{L_{22}}{2\delta_{22}} + \frac{L_{32}}{2\delta_{32}} + \frac{L_{42}}{2\delta_{42}} + \frac{M_{22}}{(\delta_{12} + \delta_{32})} + \frac{M_{32}}{(\delta_{12} + \delta_{42})} + \right. \\
\left. + \frac{N_{12}}{(\delta_{22} + \delta_{32})} + \frac{N_{22}}{(\delta_{22} + \delta_{42})} + \frac{F_{12}}{\delta_{12}} + \frac{F_{22}}{\delta_{22}} + \frac{F_{32}}{\delta_{32}} + \frac{F_{42}}{\delta_{42}} \right],
\end{aligned}$$

$$a_1 = -\left(\frac{1}{\Pr_1 \text{Ec}_1} + \mathfrak{B}_{21} \right), \quad a_2 = -\mathfrak{B}_{22}, \quad a_3 = \mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{B}_{11}, \quad a_4 = h^* k^* \Pr_2 \text{Ec}_2, \quad a_5 = H_{12} - H_{11},$$

$$a_6 = \text{Ec}_1 \Pr_1 a_1 - a_5, \quad a_7 = a_3 + \text{Ec}_2 \Pr_2 a_2, \quad {}^1H_{11} = a_1 - {}^1H_{21}, \quad {}^1H_{12} = \frac{a_6 - a_7}{\text{Ec}_2 \Pr_2 + a_4},$$

$${}^1H_{21} = \frac{1}{\text{Ec}_1 \Pr_1} [a_6 - a_4 {}^1H_{12}], \quad {}^1H_{22} = a_2 + {}^1H_{12}.$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b = 0$, konstante su:

$$r_{1,i} = r_{2,i} = \frac{1}{2} a_i, \quad i = 1, 2, \quad \xi_{1,i} = \sqrt{\frac{1}{2} a_i}, \quad \xi_{2,i} = -\sqrt{\frac{1}{2} a_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$L_{ii} = \frac{1}{E_i} \left(\frac{B_i^*}{A_i} - D_i^* \right), \quad i = 1, 2, \quad L_{iii} = \frac{1}{E_i A_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$E_{1i} = \xi_{1i} (\mathbf{L}_{1i} - \xi_{1i}^2 \mathbf{L}_{11i}), \quad i=1,2, \quad F_{1i} = (\mathbf{L}_{1i} - 3\xi_{1i}^2 \mathbf{L}_{11i}), \quad i=1,2, \quad E_{2i} = \xi_{2i} (\mathbf{L}_{2i} - \xi_{2i}^2 \mathbf{L}_{22i}), \quad i=1,2,$$

$$F_{2i} = (\mathbf{L}_{2i} - 3\xi_{2i}^2 \mathbf{L}_{22i}), \quad i=1,2, \quad E_{13i} = C_{5i} E_{1i} + C_{6i} F_{1i}, \quad i=1,2, \quad E_{14i} = C_{6i} E_{1i}, \quad i=1,2,$$

$$E_{15i} = C_{7i} E_{2i} + C_{8i} F_{2i}, \quad i=1,2, \quad E_{16i} = C_{8i} E_{2i}, \quad i=1,2,$$

$$\beta_1 = \exp(\xi_{11}), \quad \beta_2 = \exp(\xi_{11}), \quad \beta_3 = \exp(\xi_{21}), \quad \beta_4 = \exp(\xi_{21}), \quad \beta_5 = \frac{d_1}{b_1}, \quad \beta_6 = E_{11} \exp(\xi_{11}),$$

$$\beta_7 = (F_{11} + E_{11}) \exp(\xi_{11}), \quad \beta_8 = E_{21} \exp(\delta_{21}), \quad \beta_9 = (F_{21} + E_{21}) \exp(\xi_{21}), \quad \beta_{10} = \exp(-\xi_{12}),$$

$$\beta_{11} = \exp(-\xi_{12}), \quad \beta_{12} = \exp(-\xi_{22}), \quad \beta_{13} = \exp(-\delta_{22}), \quad \beta_{14} = \frac{d_2}{b_2}, \quad \beta_{15} = E_{12} \exp(-\xi_{12}),$$

$$\beta_{16} = (F_{12} - E_{12}) \exp(-\xi_{12}), \quad \beta_{17} = E_{22} \exp(-\xi_{22}), \quad \beta_{18} = (F_{22} - E_{22}) \exp(-\xi_{22}),$$

$$\beta_{19} = \xi_{11} + \varepsilon_1 K_1 \xi_{11} + \varepsilon_1 K_1 E_{11}, \quad \beta_{20} = 1 + \varepsilon_1 K_1 + \varepsilon_1 K_1 F_{11}, \quad \beta_{21} = \xi_{21} + \varepsilon_1 K_1 \xi_{21} + \varepsilon_1 K_1 E_{21},$$

$$\beta_{22} = 1 + \varepsilon_1 K_1 + \varepsilon_1 K_1 F_{21}, \quad \beta_{23} = h^* \mu^* (\xi_{12} + \varepsilon_2 K_2 \xi_{12} + \varepsilon_2 K_2 E_{12}), \quad \beta_{24} = h^* \mu^* (1 + \varepsilon_2 K_2 + \varepsilon_2 K_2 F_{12}),$$

$$\beta_{25} = h^* \mu^* (\xi_{22} + \varepsilon_2 K_2 \xi_{22} + \varepsilon_2 K_2 E_{22}), \quad \beta_{26} = h^* \mu^* (1 + \varepsilon_2 K_2 + \varepsilon_2 K_2 F_{22}), \quad \beta_{27} = E_{11} \xi_{11},$$

$$\beta_{28} = E_{11} + \xi_{11} F_{11}, \quad \beta_{29} = E_{21} \xi_{21}, \quad \beta_{30} = E_{21} + \xi_{21} F_{21}, \quad \beta_{31} = \lambda^* h^{*2} E_{12} \xi_{12}, \quad \beta_{32} = \lambda^* h^{*2} E_{12} + \lambda^* h^{*2} \xi_{12} F_{12},$$

$$\beta_{33} = \lambda^* h^{*2} E_{22} \xi_{22}, \quad \beta_{34} = \lambda^* h^{*2} E_{22} + \lambda^* h^{*2} \xi_{22} F_{22}, \quad \beta_{35} = \beta_2 - \frac{\beta_7}{\beta_6} \beta_1, \quad \beta_{36} = \beta_3 - \frac{\beta_8}{\beta_6} \beta_1,$$

$$\beta_{37} = \beta_4 - \frac{\beta_9}{\beta_6} \beta_1, \quad \beta_{38} = \beta_{11} + \frac{\beta_{16}}{\beta_{15}} \beta_{10}, \quad \beta_{39} = \beta_{12} - \frac{\beta_{16}}{\beta_{15}} \beta_{10}, \quad \beta_{40} = \beta_{13} + \frac{\beta_{18}}{\beta_{15}} \beta_{10}, \quad \beta_{41} = \frac{\beta_7}{\beta_6},$$

$$\beta_{42} = 1 - \frac{\beta_8}{\beta_6}, \quad \beta_{43} = \frac{\beta_9}{\beta_6}, \quad \beta_{44} = \frac{\beta_{16}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{45} = 1 - \frac{\beta_{17}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{46} = \frac{\beta_{18}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{47} = F_{11} - E_{11} \frac{\beta_7}{\beta_6},$$

$$\beta_{48} = E_{21} - E_{11} \frac{\beta_8}{\beta_6}, \quad \beta_{49} = F_{21} - E_{11} \frac{\beta_9}{\beta_6}, \quad \beta_{50} = F_{12} - E_{12} \frac{\beta_{16}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{51} = E_{22} - E_{12} \frac{\beta_{17}}{\beta_{15}},$$

$$\beta_{52} = F_{22} - E_{12} \frac{\beta_{18}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{53} = \beta_{20} - \beta_{19} \frac{\beta_7}{\beta_6}, \quad \beta_{54} = \beta_{21} - \beta_{19} \frac{\beta_8}{\beta_6}, \quad \beta_{55} = \beta_{22} - \beta_{19} \frac{\beta_9}{\beta_6},$$

$$\beta_{56} = \beta_{24} - \beta_{23} \frac{\beta_{16}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{57} = \beta_{25} - \beta_{23} \frac{\beta_{17}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{58} = \beta_{26} - \beta_{23} \frac{\beta_{18}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{59} = \beta_{28} - \beta_{27} \frac{\beta_7}{\beta_6},$$

$$\beta_{60} = \beta_{29} - \beta_{27} \frac{\beta_8}{\beta_6}, \quad \beta_{61} = \beta_{30} - \beta_{27} \frac{\beta_9}{\beta_6}, \quad \beta_{62} = \beta_{32} - \beta_{31} \frac{\beta_{16}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{63} = \beta_{33} - \beta_{31} \frac{\beta_{17}}{\beta_{15}},$$

$$\begin{aligned}
\beta_{64} &= \beta_{34} - \beta_{31} \frac{\beta_{18}}{\beta_{15}}, \quad \beta_{65} = \beta_{42} + \beta_{41} \frac{\beta_{36}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{66} = \beta_{41} \frac{\beta_{37}}{\beta_{35}} - \beta_{43}, \quad \beta_{67} = \beta_5 \left(1 + \frac{\beta_{41}}{\beta_{35}} \right), \\
\beta_{68} &= \beta_{45} - \beta_{44} \frac{\beta_{39}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{69} = \beta_{44} \frac{\beta_{40}}{\beta_{38}} - \beta_{46}, \quad \beta_{70} = \beta_{14} \left(1 - \frac{\beta_{44}}{\beta_{38}} \right), \quad \beta_{71} = \beta_{48} - \beta_{47} \frac{\beta_{36}}{\alpha_{35}}, \\
\beta_{72} &= \beta_{49} - \beta_{47} \frac{\beta_{36}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{73} = \beta_5 \frac{\beta_{47}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{74} = \beta_{51} + \beta_{50} \frac{\beta_{39}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{75} = \beta_{52} - \beta_{50} \frac{\beta_{40}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{76} = \beta_{14} \frac{\beta_{50}}{\beta_{38}}, \\
\beta_{77} &= \beta_{54} - \beta_{53} \frac{\beta_{36}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{78} = \beta_{55} - \beta_{53} \frac{\beta_{37}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{79} = \beta_5 \frac{\beta_{53}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{80} = \beta_{57} + \beta_{56} \frac{\beta_{39}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{81} = \beta_{58} - \beta_{56} \frac{\beta_{40}}{\beta_{38}}, \\
\beta_{82} &= \beta_{14} \frac{\beta_{56}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{83} = \beta_{60} - \beta_{59} \frac{\beta_{36}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{84} = \beta_{61} - \beta_{59} \frac{\beta_{37}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{85} = \beta_5 \frac{\beta_{59}}{\beta_{35}}, \quad \beta_{86} = \beta_{63} + \beta_{62} \frac{\beta_{39}}{\beta_{38}}, \\
\beta_{87} &= \beta_{64} - \beta_{62} \frac{\beta_{40}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{88} = \beta_{14} \frac{\beta_{62}}{\beta_{38}}, \quad \beta_{89} = \beta_{67} - \beta_{70}, \quad \beta_{90} = \beta_{73} + \beta_{76}, \quad \beta_{91} = \beta_{79} + \beta_{82}, \\
\beta_{92} &= \beta_{85} + \beta_{88}, \quad \beta_{93} = \beta_{72} - \beta_{71} \frac{\beta_{66}}{\beta_{65}}, \quad \beta_{94} = \beta_{68} \frac{\beta_{71}}{\beta_{65}} - \beta_{74}, \quad \beta_{95} = \beta_{69} \frac{\beta_{71}}{\beta_{65}} - \beta_{75}, \quad \beta_{96} = \beta_{90} + \frac{\beta_{71}}{\beta_{65}} \beta_{89}, \\
\beta_{97} &= \beta_{78} - \frac{\beta_{77}}{\beta_{65}} \beta_{66}, \quad \beta_{98} = \beta_{68} \frac{\beta_{77}}{\beta_{65}} - \beta_{80}, \quad \beta_{99} = \beta_{69} \frac{\beta_{77}}{\beta_{65}} - \beta_{81}, \quad \beta_{100} = \beta_{91} + \frac{\beta_{77}}{\beta_{65}} \beta_{89}, \\
\beta_{101} &= \beta_{84} - \frac{\beta_{83}}{\beta_{65}} \beta_{66}, \quad \beta_{102} = \beta_{68} \frac{\beta_{83}}{\beta_{65}} - \beta_{86}, \quad \beta_{103} = \beta_{69} \frac{\beta_{83}}{\beta_{65}} - \beta_{87}, \quad \beta_{104} = \beta_{92} + \frac{\beta_{83}}{\beta_{65}} \beta_{89}, \\
\beta_{105} &= \beta_{98} - \frac{\beta_{97}}{\beta_{93}} \beta_{94}, \quad \beta_{106} = \beta_{99} - \frac{\beta_{97}}{\beta_{93}} \beta_{95}, \quad \beta_{107} = \beta_{100} - \frac{\beta_{97}}{\beta_{93}} \beta_{96}, \quad \beta_{108} = \beta_{102} - \frac{\beta_{101}}{\beta_{93}} \beta_{94}, \\
\beta_{109} &= \beta_{103} - \frac{\beta_{101}}{\beta_{93}} \beta_{95}, \quad \beta_{110} = \beta_{104} - \frac{\beta_{101}}{\beta_{93}} \beta_{96}, \quad \beta_{111} = \beta_{109} - \frac{\beta_{106}}{\beta_{105}} \beta_{108}, \quad \beta_{112} = \beta_{110} - \frac{\beta_{107}}{\beta_{105}} \beta_{108}, \\
C_{51} &= -\frac{1}{\beta_6} (C_{61} \beta_7 + C_{71} \beta_8 + C_{81} \beta_9), \quad C_{61} = -\frac{1}{\beta_{35}} (C_{71} \beta_{36} + C_{81} \beta_{37} + \beta_5), \\
C_{71} &= \frac{1}{\beta_{65}} (-C_{81} \beta_{66} + C_{72} \beta_{68} + C_{82} \beta_{69} - \beta_{89}), \quad C_{81} = \frac{1}{\beta_{93}} (\beta_{96} - C_{72} \beta_{94} - C_{82} \beta_{95}), \\
C_{52} &= -\frac{1}{\beta_{15}} (C_{62} \beta_{16} + C_{72} \beta_{17} + C_{82} \beta_{18}), \quad C_{62} = \frac{1}{\beta_{38}} (C_{72} \beta_{39} - C_{82} \beta_{40} + \beta_{14}), \\
C_{72} &= \frac{1}{\beta_{105}} (\beta_{107} - C_{82} \beta_{106}), \quad C_{82} = \frac{\beta_{112}}{\beta_{111}},
\end{aligned}$$

$$\Omega_{1i} = (1 + \varepsilon_i K_i) (C_{6i}^2 + \xi_{1i}^2 C_{5i}^2 + 2C_{5i} C_{6i} \xi_{1i}) + Ha_i^2 C_{5i}^2, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{2i} = (1 + \varepsilon_i K_i) (2C_{5i} C_{6i} \xi_{1i}^2 + 2C_{6i}^2 \xi_{1i}) + Ha_i^2 2C_{5i} C_{6i}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{3i} = (1 + \varepsilon_i K_i) C_{6i}^2 \xi_{1i}^2 + Ha_i^2 C_{6i}^2, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{4i} = (1 + \varepsilon_i K_i) (C_{8i}^2 + \xi_{2i}^2 C_{7i}^2 + 2C_{7i} C_{8i} \xi_{2i}) + Ha_i^2 C_{7i}^2, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{5i} = (1 + \varepsilon_i K_i) (2C_{7i} C_{8i} \xi_{2i}^2 + 2C_{8i}^2 \xi_{2i}) + Ha_i^2 2C_{7i} C_{8i}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{6i} = (1 + \varepsilon_i K_i) C_{8i}^2 \xi_{2i}^2 + Ha_i^2 C_{8i}^2, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{7i} = (1 + \varepsilon_i K_i) (2C_{6i} C_{8i} + 2C_{6i} C_{7i} \xi_{2i} + 2C_{8i} C_{5i} \xi_{1i} + 2\xi_{1i} \xi_{2i} C_{5i} C_{7i}) + Ha_i^2 2C_{7i} C_{5i}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{8i} = (1 + \varepsilon_i K_i) (2C_{6i} C_{8i} \xi_{2i} + 2C_{8i} C_{6i} \xi_{1i} + 2\xi_{1i} \xi_{2i} C_{6i} C_{7i} + 2\xi_{1i} \xi_{2i} C_{5i} C_{8i}) +$$

$$+ Ha_i^2 (2C_{6i} C_{7i} + 2C_{5i} C_{8i}), \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{9i} = (1 + \varepsilon_i K_i) 2\xi_{1i} \xi_{2i} C_{6i} C_{8i} + Ha_i^2 2C_{6i} C_{8i}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{10i} = 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i^2 C_{5i}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{11i} = 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i^2 C_{6i}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{12i} = 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i C_{7i}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{13i} = 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i C_{8i}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{14i} = \frac{d_i^2}{b_i^2} Ha_i^2, \quad i=1,2, \quad \Omega_{15i} = \frac{\Omega_{1i}}{2\xi_{1i}} - \frac{\Omega_{2i}}{4\xi_{1i}^2} + \frac{\Omega_{3i}}{4\xi_{1i}^3}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{16i} = \frac{\Omega_{2i}}{2\xi_{1i}} - \frac{\Omega_{3i}}{2\xi_{1i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{17i} = \frac{\Omega_{3i}}{2\xi_{1i}}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{18i} = \frac{\Omega_{4i}}{2\xi_{2i}} - \frac{\Omega_{5i}}{4\xi_{2i}^2} + \frac{\Omega_{6i}}{4\xi_{2i}^3}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{19i} = \frac{\Omega_{5i}}{2\xi_{2i}} - \frac{\Omega_{6i}}{2\xi_{2i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{20i} = \frac{\Omega_{6i}}{2\xi_{2i}^2}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{21i} = \frac{\Omega_{7i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})} - \frac{\Omega_{8i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})^2} + \frac{2\Omega_{9i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})^3}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{22i} = \frac{\Omega_{8i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})} - \frac{2\Omega_{9i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})^2}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{23i} = \frac{\Omega_{9i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{24i} = \frac{\Omega_{10i}}{\xi_{1i}} - \frac{\Omega_{11i}}{\xi_{1i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{25i} = \frac{\Omega_{11i}}{\xi_{1i}}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{26i} = \frac{\Omega_{12i}}{\xi_{2i}} - \frac{\Omega_{13i}}{\xi_{2i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{27i} = \frac{\Omega_{13i}}{\xi_{2i}}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{28i} = \frac{\Omega_{15i}}{2\xi_{1i}} - \frac{\Omega_{16i}}{4\xi_{1i}^2} + \frac{\Omega_{17i}}{4\xi_{1i}^3}, \quad i=1,2,$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{29i} &= \frac{\Omega_{16i}}{2\xi_{1i}} - \frac{\Omega_{17i}}{2\xi_{1i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{30i} = \frac{\Omega_{17i}}{2\xi_{1i}}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{31i} = \frac{\Omega_{18i}}{2\xi_{2i}} - \frac{\Omega_{19i}}{4\xi_{2i}^2} + \frac{\Omega_{20i}}{4\xi_{2i}^3}, \quad i=1,2, \\
\Omega_{32i} &= \frac{\Omega_{19i}}{2\xi_{2i}} - \frac{\Omega_{20i}}{2\xi_{2i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{33i} = \frac{\Omega_{20i}}{2\xi_{2i}}, \quad i=1,2, \\
\Omega_{34i} &= \frac{\Omega_{21i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})} - \frac{\Omega_{22i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})^2} + \frac{2\Omega_{23i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})^3}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{35i} = \frac{\Omega_{22i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})} - \frac{2\Omega_{23i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})^2}, \quad i=1,2, \\
\Omega_{36i} &= \frac{\Omega_{23i}}{(\xi_{1i} + \xi_{2i})}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{37i} = \frac{\Omega_{24i}}{\xi_{1i}} - \frac{\Omega_{25i}}{\xi_{1i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{38i} = \frac{\Omega_{25i}}{\xi_{1i}}, \quad i=1,2, \\
\Omega_{39i} &= \frac{\Omega_{26i}}{\xi_{2i}} - \frac{\Omega_{27i}}{\xi_{2i}^2}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{40i} = \frac{\Omega_{27i}}{\xi_{2i}}, \quad i=1,2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2\mathcal{B}_{11} &= (\Omega_{281} + \Omega_{191} + \Omega_{301})\exp(2\xi_{11}) + (\Omega_{311} + \Omega_{321} + \Omega_{331})\exp(2\xi_{21}) + \\
&+ (\Omega_{341} + \Omega_{351} + \Omega_{361})\exp(\xi_{11} + \xi_{21}) + (\Omega_{371} + \Omega_{381})\exp(\xi_{11}) + \\
&+ (\Omega_{391} + \Omega_{401})\exp(\xi_{21}) + \frac{\Omega_{141}}{2},
\end{aligned}$$

$${}^2\mathcal{B}_{21} = \Pr_1 EC_1 (\Omega_{281} + \Omega_{311} + \Omega_{341} + \Omega_{371} + \Omega_{391}),$$

$$\begin{aligned}
{}^2\mathcal{B}_{12} &= (\Omega_{282} - \Omega_{192} + \Omega_{302})\exp(-2\xi_{12}) + (\Omega_{312} - \Omega_{322} + \Omega_{332})\exp(-2\xi_{22}) + \\
&+ (\Omega_{342} - \Omega_{352} + \Omega_{362})\exp(-(\xi_{12} + \xi_{22})) + (\Omega_{372} - \Omega_{382})\exp(-\xi_{12}) + \\
&+ (\Omega_{392} - \Omega_{402})\exp(-\xi_{22}) + \frac{\Omega_{142}}{2},
\end{aligned}$$

$${}^2\mathcal{B}_{22} = \Pr_2 EC_2 (\Omega_{282} + \Omega_{312} + \Omega_{342} + \Omega_{372} + \Omega_{392}),$$

$${}^2\mathcal{H}_{11} = \Pr_1 EC_1 (\Omega_{151} + \Omega_{181} + \Omega_{211} + \Omega_{241} + \Omega_{261}),$$

$${}^2\mathcal{H}_{12} = \Pr_2 EC_2 (\Omega_{152} + \Omega_{182} + \Omega_{212} + \Omega_{242} + \Omega_{262}),$$

$$b_1 = -\frac{1}{\Pr_1 EC_1} - {}^2\mathcal{B}_{11}, \quad b_2 = {}^2\mathcal{B}_{12}, \quad b_3 = {}^2\mathcal{B}_{22} - {}^2\mathcal{B}_{11},$$

$$b_4 = h^* k^* {}^2\mathcal{H}_{12} - {}^2\mathcal{H}_{11}, \quad b_5 = b_4 - EC_1 \Pr_1 b_1, \quad b_6 = b_3 - EC_2 \Pr_2 b_2,$$

$${}^2H_{11} = b_1 - {}^2H_{21}, \quad {}^2H_{12} = -\frac{b_5 + b_6}{Ec_2 Pr_2 (1 + h^* k^*)}, \quad {}^2H_{21} = \frac{b_6 + Pr_2 Ec_2 {}^2H_{12}}{Ec_1 Pr_1}, \quad {}^2H_{22} = {}^2H_{12} - b_2.$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$, konstante su:

$$r_{1,i}^* = \frac{1}{2} \left(a_i + i\sqrt{4b_i^2 - a_i^2} \right), \quad i = 1, 2, \quad r_{2,i}^* = \frac{1}{2} \left(a_i - i\sqrt{4b_i^2 - a_i^2} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} a_i, \quad i = 1, 2, \quad \beta_i = \frac{1}{2} \sqrt{4b_i^2 - a_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad r_{1,i}^* = \alpha_1 + i\beta_i, \quad i = 1, 2, \quad r_{2,i}^* = \alpha_1 - i\beta_i, \quad i = 1, 2,$$

$$R_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_{1i} = \sqrt{R_i} \cos \frac{\theta_{1i}}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \beta_{1i} = \sqrt{R_i} \sin \frac{\theta_{1i}}{2}, \quad i = 1, 2,$$

$$\eta_{1i} = \alpha_{1i} + i\beta_{1i}, \quad \eta_{2i} = -\alpha_{1i} - i\beta_{1i}, \quad \eta_{3i} = \alpha_{1i} - i\beta_{1i}, \quad \eta_{4i} = -\alpha_{1i} + i\beta_{1i},$$

$$L_{ii} = \frac{1}{E_i} \left(\frac{B_i^*}{A_i} - D_i^* \right), \quad i = 1, 2, \quad L_{iii} = \frac{1}{E_i A_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$P_{ii} = L_{ii} - L_{iii} \alpha_{1i}^2 + L_{iii} \beta_{1i}^2, \quad i = 1, 2, \quad P_{2i} = 2L_{iii} \alpha_{1i} \beta_{1i}, \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma_1 = \cos(\beta_{11}) \exp(\alpha_{11}), \quad \gamma_2 = \sin(\beta_{11}) \exp(\alpha_{11}), \quad \gamma_3 = \cos(\beta_{11}) \exp(-\alpha_{11}),$$

$$\gamma_4 = \sin(\beta_{11}) \exp(-\alpha_{11}), \quad \gamma_5 = \frac{d_1}{b_1},$$

$$\gamma_6 = \left[\alpha_{11} (P_{11} \cos(\beta_{11}) + P_{21} \sin(\beta_{11})) - \beta_{11} (P_{11} \sin(\beta_{11}) - P_{21} \cos(\beta_{11})) \right] \exp(\alpha_{11}),$$

$$\gamma_7 = \left[\alpha_{11} (P_{11} \sin(\beta_{11}) - P_{21} \cos(\beta_{11})) + \beta_{11} (P_{11} \cos(\beta_{11}) + P_{21} \sin(\beta_{11})) \right] \exp(\alpha_{11}),$$

$$\gamma_8 = \left[-\alpha_{11} (P_{11} \cos(\beta_{11}) - P_{21} \sin(\beta_{11})) - \beta_{11} (P_{11} \sin(\beta_{11}) + P_{21} \cos(\beta_{11})) \right] \exp(-\alpha_{11}),$$

$$\gamma_9 = \left[\beta_{11} (P_{11} \cos(\beta_{11}) - P_{21} \sin(\beta_{11})) - \alpha_{11} (P_{11} \sin(\beta_{11}) + P_{21} \cos(\beta_{11})) \right] \exp(-\alpha_{11}),$$

$$\gamma_{10} = \cos(-\beta_{12}) \exp(-\alpha_{12}), \quad \gamma_{11} = \sin(-\beta_{12}) \exp(-\alpha_{12}), \quad \gamma_{12} = \cos(-\beta_{12}) \exp(\alpha_{12}),$$

$$\gamma_{13} = \sin(-\beta_{12}) \exp(\alpha_{12}), \quad \gamma_{14} = \frac{d_2}{b_2},$$

$$\gamma_{15} = \left[\alpha_{12} (P_{12} \cos(-\beta_{12}) + P_{22} \sin(-\beta_{12})) - \beta_{12} (P_{12} \sin(-\beta_{12}) - P_{22} \cos(-\beta_{12})) \right] \exp(-\alpha_{12}),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{16} &= \left[\alpha_{12} (P_{12} \sin(-\beta_{12}) - P_{22} \cos(-\beta_{12})) + \beta_{12} (P_{12} \cos(-\beta_{12}) + P_{22} \sin(-\beta_{12})) \right] \exp(-\alpha_{12}), \\
\gamma_{17} &= \left[-\alpha_{12} (P_{12} \cos(-\beta_{12}) - P_{22} \sin(-\beta_{12})) - \beta_{12} (P_{12} \sin(-\beta_{12}) + P_{22} \cos(-\beta_{12})) \right] \exp(\alpha_{12}), \\
\gamma_{18} &= \left[\beta_{12} (P_{12} \cos(-\beta_{12}) - P_{22} \sin(-\beta_{12})) - \alpha_{12} (P_{12} \sin(-\beta_{12}) + P_{22} \cos(-\beta_{12})) \right] \exp(\alpha_{12}), \\
\gamma_{19} &= \alpha_{11} P_{11} + \beta_{11} P_{21}, \quad \gamma_{20} = \beta_{11} P_{11} - \alpha_{11} P_{21}, \quad \gamma_{21} = \alpha_{12} P_{12} + \beta_{12} P_{22}, \quad \gamma_{22} = \beta_{12} P_{12} - \alpha_{12} P_{22}, \\
\gamma_{23} &= \alpha_{11} (1 + \varepsilon_1 K_1) + \beta_{11} P_{21} \varepsilon_1 K_1 + \alpha_{11} P_{11} \varepsilon_1 K_1, \quad \gamma_{24} = \beta_{11} (1 + \varepsilon_1 K_1) - \alpha_{11} P_{21} \varepsilon_1 K_1 + \beta_{11} P_{11} \varepsilon_1 K_1, \\
\gamma_{25} &= \alpha_{12} h^* \mu^* (1 + \varepsilon_2 K_2) + \alpha_{12} P_{12} h^* \mu^* \varepsilon_2 K_2 + \beta_{12} P_{22} h^* \mu^* \varepsilon_2 K_2, \\
\gamma_{26} &= \beta_{12} h^* \mu^* (1 + \varepsilon_2 K_2) - \alpha_{12} P_{22} h^* \mu^* \varepsilon_2 K_2 + \beta_{12} P_{12} h^* \mu^* \varepsilon_2 K_2, \quad \gamma_{27} = \alpha_{11}^2 P_{11} - \beta_{11}^2 P_{11} + 2\alpha_{11} \beta_{11} P_{21}, \\
\gamma_{28} &= \beta_{11}^2 P_{21} - \alpha_{11}^2 P_{21} + 2\alpha_{11} \beta_{11} P_{11}, \quad \gamma_{29} = h^{*2} \lambda^* \left[\alpha_{12}^2 P_{12} - \beta_{12}^2 P_{12} + 2\alpha_{12} \beta_{12} P_{22} \right], \\
\gamma_{30} &= h^{*2} \lambda^* \left[\beta_{12}^2 P_{22} - \alpha_{12}^2 P_{22} + 2\alpha_{12} \beta_{12} P_{12} \right], \quad \gamma_{31} = \gamma_2 - \frac{\gamma_7}{\gamma_6} \gamma_1, \quad \gamma_{32} = \gamma_3 - \frac{\gamma_8}{\gamma_6} \gamma_1, \quad \gamma_{33} = \gamma_4 - \frac{\gamma_9}{\gamma_6} \gamma_1, \\
\gamma_{34} &= \gamma_{11} - \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{15}} \gamma_{10}, \quad \gamma_{35} = \gamma_{12} - \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{15}} \gamma_{10}, \quad \gamma_{36} = \gamma_{13} - \frac{\gamma_{18}}{\gamma_{15}} \gamma_{10}, \quad \gamma_{37} = \frac{\gamma_7}{\gamma_6}, \quad \gamma_{38} = 1 - \frac{\gamma_8}{\gamma_6}, \quad \gamma_{39} = \frac{\gamma_9}{\gamma_6}, \\
\gamma_{40} &= \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{41} = 1 - \frac{\gamma_{17}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{42} = \frac{\gamma_{18}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{43} = \gamma_{20} - \gamma_{19} \frac{\gamma_7}{\gamma_6}, \quad \gamma_{44} = \gamma_{19} + \gamma_{19} \frac{\gamma_8}{\gamma_6}, \quad \gamma_{45} = \gamma_{20} - \gamma_{19} \frac{\gamma_9}{\gamma_6}, \\
\gamma_{46} &= \gamma_{22} - \gamma_{21} \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{47} = \gamma_{21} + \gamma_{21} \frac{\gamma_{17}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{48} = \gamma_{22} - \gamma_{21} \frac{\gamma_{18}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{49} = \gamma_{24} - \gamma_{23} \frac{\gamma_7}{\gamma_6}, \quad \gamma_{50} = \gamma_{23} + \gamma_{23} \frac{\gamma_8}{\gamma_6}, \\
\gamma_{51} &= \gamma_{24} - \gamma_{23} \frac{\gamma_9}{\gamma_6}, \quad \gamma_{52} = \gamma_{26} - \gamma_{25} \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{53} = \gamma_{25} + \gamma_{25} \frac{\gamma_{17}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{54} = \gamma_{26} - \gamma_{25} \frac{\gamma_{18}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{55} = \gamma_{28} - \gamma_{27} \frac{\gamma_7}{\gamma_6}, \\
\gamma_{56} &= \gamma_{27} - \gamma_{27} \frac{\gamma_8}{\gamma_6}, \quad \gamma_{57} = \gamma_{28} + \gamma_{27} \frac{\gamma_9}{\gamma_6}, \quad \gamma_{58} = \gamma_{30} - \gamma_{29} \frac{\gamma_{16}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{59} = \gamma_{29} - \gamma_{29} \frac{\gamma_{17}}{\gamma_{15}}, \quad \gamma_{60} = \gamma_{30} + \gamma_{29} \frac{\gamma_{18}}{\gamma_{15}}, \\
\gamma_{61} &= \gamma_{38} + \gamma_{37} \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{62} = \gamma_{37} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{31}} - \gamma_{39}, \quad \gamma_{63} = \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\gamma_{37}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{64} = \gamma_{41} + \gamma_{40} \frac{\gamma_{35}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{65} = \gamma_{36} \frac{\gamma_{40}}{\gamma_{34}} - \gamma_{42}, \\
\gamma_{66} &= \gamma_{14} + \gamma_{14} \frac{\gamma_{40}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{67} = \gamma_{44} + \gamma_{43} \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{68} = \gamma_{45} - \gamma_{43} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{69} = \gamma_5 \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{70} = \gamma_{47} + \gamma_{46} \frac{\gamma_{35}}{\gamma_{34}}, \\
\gamma_{71} &= \gamma_{48} - \gamma_{46} \frac{\gamma_{36}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{72} = \gamma_{14} \frac{\gamma_{46}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{73} = \gamma_{50} + \gamma_{49} \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{74} = \gamma_{51} - \gamma_{49} \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{75} = \gamma_5 \frac{\gamma_{49}}{\gamma_{31}}, \\
\gamma_{76} &= \gamma_{53} + \gamma_{52} \frac{\gamma_{35}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{77} = \gamma_{54} - \gamma_{52} \frac{\gamma_{36}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{78} = \gamma_{14} \frac{\gamma_{52}}{\gamma_{34}}, \quad \gamma_{79} = \gamma_{56} - \gamma_{55} \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{31}}, \quad \gamma_{80} = \gamma_{57} + \gamma_{55} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{31}},
\end{aligned}$$

$$\gamma_{81} = \gamma_5 \frac{\gamma_{55}}{\gamma_{31}}, \gamma_{82} = \gamma_{59} - \gamma_{58} \frac{\gamma_{35}}{\gamma_{34}}, \gamma_{83} = \gamma_{60} + \gamma_{58} \frac{\gamma_{36}}{\gamma_{34}}, \gamma_{84} = \gamma_{14} \frac{\gamma_{58}}{\gamma_{34}}, \gamma_{85} = \gamma_{63} - \gamma_{66}, \gamma_{86} = \gamma_{72} - \gamma_{69},$$

$$\gamma_{87} = \gamma_{78} - \gamma_{75}, \gamma_{88} = \gamma_{84} - \gamma_{81}, \gamma_{89} = \gamma_{68} + \gamma_{67} \frac{\gamma_{62}}{\gamma_{61}}, \gamma_{90} = \gamma_{70} - \frac{\gamma_{64}}{\gamma_{61}} \gamma_{67}, \gamma_{91} = \gamma_{71} + \frac{\gamma_{65}}{\gamma_{61}} \gamma_{67},$$

$$\gamma_{92} = \gamma_{86} + \gamma_{85} \frac{\gamma_{67}}{\gamma_{61}}, \gamma_{93} = \gamma_{74} + \gamma_{73} \frac{\gamma_{62}}{\gamma_{61}}, \gamma_{94} = \gamma_{76} - \frac{\gamma_{64}}{\gamma_{61}} \gamma_{73}, \gamma_{95} = \gamma_{77} + \frac{\gamma_{65}}{\gamma_{61}} \gamma_{73}, \gamma_{96} = \gamma_{87} + \frac{\gamma_{73}}{\gamma_{61}} \gamma_{85},$$

$$\gamma_{97} = \gamma_{80} + \frac{\gamma_{62}}{\gamma_{61}} \gamma_{79}, \gamma_{98} = \frac{\gamma_{64}}{\gamma_{61}} \gamma_{79} - \gamma_{82}, \gamma_{99} = \gamma_{83} + \frac{\gamma_{65}}{\gamma_{61}} \gamma_{79}, \gamma_{100} = \gamma_{88} - \frac{\gamma_{85}}{\gamma_{61}} \gamma_{79}, \gamma_{101} = \gamma_{94} - \frac{\gamma_{90}}{\gamma_{89}} \gamma_{93},$$

$$\gamma_{102} = \frac{\gamma_{91}}{\gamma_{89}} \gamma_{93} - \gamma_{95}, \gamma_{103} = \gamma_{96} - \frac{\gamma_{92}}{\gamma_{89}} \gamma_{93}, \gamma_{104} = \gamma_{98} + \frac{\gamma_{90}}{\gamma_{89}} \gamma_{97}, \gamma_{105} = \gamma_{99} - \frac{\gamma_{91}}{\gamma_{89}} \gamma_{97},$$

$$\gamma_{106} = \gamma_{100} + \frac{\gamma_{92}}{\gamma_{89}} \gamma_{97}, \gamma_{107} = \gamma_{105} - \frac{\gamma_{102}}{\gamma_{101}} \gamma_{104}, \gamma_{108} = \frac{\gamma_{103}}{\gamma_{101}} \gamma_{104} - \gamma_{106},$$

$$C_{91} = -\frac{1}{\gamma_6} (C_{101} \gamma_7 + C_{111} \gamma_8 + C_{121} \gamma_9), \quad C_{101} = -\frac{1}{\gamma_{31}} (C_{111} \gamma_{32} + C_{121} \gamma_{33} + \gamma_5),$$

$$C_{111} = -\frac{1}{\gamma_{61}} (C_{121} \gamma_{62} - C_{112} \gamma_{64} - C_{122} \gamma_{65} + \gamma_{85}), \quad C_{121} = -\frac{1}{\gamma_{89}} (C_{112} \gamma_{90} - C_{122} \gamma_{91} + \gamma_{92}),$$

$$C_{92} = -\frac{1}{\gamma_{15}} (C_{102} \gamma_{16} + C_{112} \gamma_{17} + C_{122} \gamma_{18}), \quad C_{102} = -\frac{1}{\gamma_{34}} (C_{112} \gamma_{35} + C_{122} \gamma_{36} + \gamma_{14}),$$

$$C_{112} = -\frac{1}{\gamma_{101}} (C_{122} \gamma_{102} + \gamma_{103}), \quad C_{122} = \frac{\gamma_{108}}{\gamma_{107}},$$

$$\Omega_{41i} = \alpha_{1i} C_{10i} - \beta_{1i} C_{9i}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{42i} = \beta_{1i} C_{10i} + \alpha_{1i} C_{9i}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{43i} = \beta_{1i} C_{12i} - \alpha_{1i} C_{11i}, \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{44i} = \alpha_{1i} C_{12i} + \beta_{1i} C_{11i}, \quad i=1,2, \quad \Omega_{45i} = \frac{1}{4\alpha_{1i}} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{41i}^2 + \Omega_{42i}^2) + Ha_i^2 (C_{9i}^2 + C_{10i}^2) \right], \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{46i} = \frac{1}{4\alpha_{1i}} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{43i}^2 + \Omega_{44i}^2) + Ha_i^2 (C_{11i}^2 + C_{12i}^2) \right], \quad i=1,2,$$

$$\Omega_{47i} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{42i}^2 + \Omega_{41i}^2) + Ha_i^2 (C_{9i}^2 - C_{10i}^2) \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\beta_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \Omega_{41i} \Omega_{42i} + Ha_i^2 C_{9i} C_{10i} \right], \quad i=1,2,$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{48i} &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{44i}^2 - \Omega_{43i}^2) + Ha_i^2 (C_{12i}^2 - C_{11i}^2) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\beta_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \Omega_{43i} \Omega_{44i} - Ha_i^2 C_{11i} C_{12i} \right], \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{49i} &= \frac{1}{4} \frac{\beta_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{42i}^2 - \Omega_{41i}^2) + Ha_i^2 (C_{9i}^2 - C_{10i}^2) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\alpha_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \Omega_{41i} \Omega_{42i} - Ha_i^2 C_{9i} C_{10i} \right], \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{50i} &= \frac{1}{4} \frac{\beta_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{43i}^2 - \Omega_{44i}^2) + Ha_i^2 (C_{11i}^2 - C_{12i}^2) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\alpha_{1i}}{(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2)} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) \Omega_{43i} \Omega_{44i} - Ha_i^2 C_{11i} C_{12i} \right], \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{51i} &= \frac{1}{2\beta_{1i}} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{41i} \Omega_{43i} - \Omega_{42i} \Omega_{44i}) + Ha_i^2 (C_{9i} C_{12i} + C_{10i} C_{11i}) \right], \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{52i} &= \frac{1}{2\beta_{1i}} \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{42i} \Omega_{43i} - \Omega_{41i} \Omega_{44i}) + Ha_i^2 (C_{9i} C_{11i} - C_{10i} C_{12i}) \right], \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{53i} &= 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i^2 \left(C_{9i} \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} - C_{10i} \frac{\beta_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} \right), \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{54i} &= 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i^2 \left(C_{11i} \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} + C_{12i} \frac{\beta_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} \right), \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{55i} &= 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i^2 \left(C_{9i} \frac{\beta_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} + C_{10i} \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} \right), \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{56i} &= 2 \frac{d_i}{b_i} Ha_i^2 \left(C_{11i} \frac{\beta_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} - C_{12i} \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2} \right), \quad i = 1, 2, \\
\Omega_{57i} &= \left[(1 + \varepsilon_i K_i) (\Omega_{42i} \Omega_{43i} - \Omega_{41i} \Omega_{44i}) + Ha_i^2 \left(\frac{d_i^2}{b_i^2} + C_{9i} C_{11i} + C_{10i} C_{12i} \right) \right], \quad i = 1, 2, \\
\chi_{1i} &= \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2}, \quad i = 1, 2, \quad \chi_{2i} = \frac{\beta_{1i}}{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{21} = & \left\{ \left[\frac{\Omega_{451}}{2\alpha_{11}} + \frac{1}{2}(\chi_{11}\Omega_{471} - \chi_{21}\Omega_{491})\cos(2\beta_{11}) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}(\chi_{21}\Omega_{471} + \chi_{11}\Omega_{491})\sin(2\beta_{11}) \left. \right] \exp(2\alpha_{11}) + \\
& + \left[\frac{\Omega_{461}}{2\alpha_{11}} - \frac{1}{2}(\chi_{11}\Omega_{481} + \chi_{21}\Omega_{501})\cos(2\beta_{11}) + \right. \\
& + \frac{1}{2}(\chi_{21}\Omega_{481} - \chi_{11}\Omega_{501})\sin(2\beta_{11}) \left. \right] \exp(-2\alpha_{11}) - \frac{1}{2\beta_{11}}\Omega_{511}\sin(2\beta_{11}) - \\
& - \frac{1}{2\beta_{11}}\Omega_{521}\cos(2\beta_{11}) + [(\Omega_{531}\chi_{11} - \Omega_{551}\chi_{21})\cos(\beta_{11}) + \\
& + (\Omega_{531}\chi_{21} + \Omega_{551}\chi_{11})\sin(\beta_{11})] \exp(\alpha_{11}) + [(\Omega_{541}\chi_{11} - \Omega_{561}\chi_{21})\cos(\beta_{11}) - \\
& - (\Omega_{541}\chi_{21} + \Omega_{561}\chi_{11})\sin(\beta_{11})] \exp(-\alpha_{11}) + \frac{1}{2}\Omega_{571} \left. \right\}, \\
\mathfrak{B}_{22} = & \left\{ \left[\frac{\Omega_{452}}{2\alpha_{12}} + \frac{1}{2}(\chi_{12}\Omega_{472} - \chi_{22}\Omega_{492})\cos(2\beta_{12}) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}(\chi_{22}\Omega_{472} + \chi_{12}\Omega_{492})\sin(2\beta_{12}) \left. \right] \exp(-2\alpha_{12}) + \\
& + \left[\frac{\Omega_{462}}{2\alpha_{12}} - \frac{1}{2}(\chi_{12}\Omega_{482} + \chi_{22}\Omega_{502})\cos(2\beta_{12}) - \right. \\
& - \frac{1}{2}(\chi_{22}\Omega_{482} - \chi_{12}\Omega_{502})\sin(2\beta_{12}) \left. \right] \exp(2\alpha_{12}) + \frac{1}{2\beta_{12}}\Omega_{512}\sin(2\beta_{12}) - \\
& - \frac{1}{2\beta_{12}}\Omega_{522}\cos(2\beta_{12}) + [(\Omega_{532}\chi_{12} - \Omega_{552}\chi_{22})\cos(\beta_{12}) - \\
& - (\Omega_{532}\chi_{22} + \Omega_{552}\chi_{12})\sin(\beta_{12})] \exp(-\alpha_{12}) + [(\Omega_{542}\chi_{12} - \Omega_{562}\chi_{22})\cos(\beta_{12}) + \\
& + (\Omega_{542}\chi_{22} + \Omega_{562}\chi_{12})\sin(\beta_{12})] \exp(\alpha_{12}) + \frac{1}{2}\Omega_{572} \left. \right\}, \\
\mathfrak{B}_{11} = & \Pr_1 Ec_1 \left[\frac{\Omega_{451}}{2\alpha_{11}} + \frac{1}{2}(\Omega_{471}\chi_{11} - \Omega_{491}\chi_{21}) + \frac{\Omega_{461}}{2\alpha_{11}} - \frac{1}{2}(\Omega_{481}\chi_{11} + \Omega_{501}\chi_{21}) - \right. \\
& - \frac{\Omega_{521}}{2\beta_{11}} + (\Omega_{531}\chi_{11} - \Omega_{551}\chi_{21}) + (\Omega_{541}\chi_{11} - \Omega_{561}\chi_{21}) \left. \right],
\end{aligned}$$

$${}^3\mathbf{B}_{12} = \text{Pr}_2 \text{Ec}_2 \left[\frac{\Omega_{452}}{2\alpha_{22}} + \frac{1}{2}(\Omega_{472}\chi_{12} - \Omega_{492}\chi_{22}) + \frac{\Omega_{462}}{2\alpha_{12}} - \frac{1}{2}(\Omega_{482}\chi_{12} + \Omega_{502}\chi_{22}) - \right. \\ \left. - \frac{\Omega_{522}}{2\beta_{12}} + (\Omega_{532}\chi_{12} - \Omega_{552}\chi_{22}) + (\Omega_{542}\chi_{12} - \Omega_{562}\chi_{22}) \right],$$

$${}^3\mathbf{H}_{11} = \text{Pr}_1 \text{Ec}_1 (\Omega_{451} - \Omega_{461} + \Omega_{471} + \Omega_{481} - \Omega_{511} + \Omega_{531} - \Omega_{541}),$$

$${}^3\mathbf{H}_{12} = \text{Pr}_2 \text{Ec}_2 (\Omega_{452} - \Omega_{462} + \Omega_{472} + \Omega_{482} - \Omega_{512} + \Omega_{532} - \Omega_{542}),$$

$$c_1 = -\frac{1}{\text{Pr}_1 \text{Ec}_1} - {}^3\mathbf{B}_{21}, \quad c_2 = {}^3\mathbf{B}_{22}, \quad c_3 = {}^3\mathbf{B}_{12} - {}^3\mathbf{B}_{11},$$

$$c_4 = h^* k^* {}^3\mathbf{H}_{12} - {}^3\mathbf{H}_{11}, \quad c_5 = c_4 - \text{Ec}_1 \text{Pr}_1 c_1, \quad c_6 = c_3 - \text{Ec}_2 \text{Pr}_2 c_2,$$

$${}^3H_{11} = c_1 - {}^3H_{21}, \quad {}^3H_{12} = -\frac{c_5 + c_6}{\text{Ec}_2 \text{Pr}_2 (1 + h^* k^*)}, \quad {}^3H_{21} = \frac{c_6 + \text{Pr}_2 \text{Ec}_2 {}^2H_{12}}{\text{Ec}_1 \text{Pr}_1}, \quad {}^3H_{22} = {}^3H_{12} - c_2.$$

- VIII poglavlje -

8. MHD strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida između nagnutih ploča

8.1. Fizički i matematički model razmatranog problema

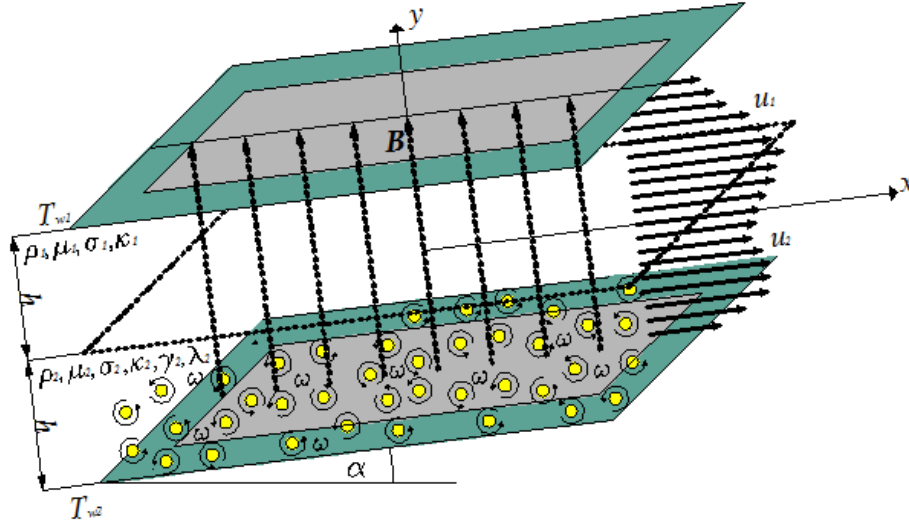
Kako je analiza strujanja dva mikropolarna fluida izvršena u jednom od prethodnih poglavlja, interesantno je razmatrati karakteristike strujanja dva raznorodna fluida koji se ne mešaju. Tako u ovom poglavlju analiziramo strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida, uz činjenicu da strujni prostor između ploča, kao i same ploče, može biti nagnut pod proizvoljnim uglom α u odnosu na horizontalnu ravan. Dati problem je predstavljen na slici 8.

Kao i do sada, neke osnovne pretpostavke su uvedene kako bi se razmatrni problem pojednostavio i mogao da reši. Pre svega razmatra se potpuno razvijeno strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida između ploča, usled konstantnog pada pritiska duž x ose. Rastojanje između ploča je $2h$, pri čemu su i viskozni i mikropolarni sloj tečnosti iste visine h . Ploče između kojih se vrši strujanje fluida protežu se u beskonačnost duž pravaca x i z ose. Oba fluida su elektroprovodna i strujanje se obavlja u prisutvu spoljašnjeg magnetnog polja intenziteta B . Strujanje ovih fluida razmatra se u bezindukcijskoj aproksimaciji, tj. uzima se da je Reynoldsov magnetni broj značajno manji od jedinice. Uniformno spoljašnje magnetno polje intenziteta B prostire su u pravcu y ose. Tokom strujanja viskoznog i mikropolarnog fluida, gornja i donja ploča održavaju se na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2} , respektivno, pri čemu treba voditi računa da je $T_{w1} > T_{w2}$. Za ovako definisani problem, vektori brzina $\mathbf{v}$ i magnetnog polja $\mathbf{B}$ definisani su sledećim izrazima:

$$\mathbf{v}_i = u_i \vec{i}, \quad i = 1, 2, \quad (8.1)$$

$$\mathbf{B} = B\vec{j}. \quad (8.2)$$

Shodno napred definisanom fizičkom problemu, sada je moguće definisati odgovarajući sistem jednačina koji opisuje razmatrani problem.



Slika 8. Fizički model razmatranog problema

Jednačine za gornji, viskozni, sloj tečnosti date su sledećim zapisom:

$$\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} + \rho_1 g \beta_1 (T_1 - T_{w2}) \sin \alpha - \sigma_1 B^2 u_1 - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (8.3)$$

$$k_1 \frac{d^2 T_1}{dy^2} + \mu_1 \left(\frac{du_1}{dy} \right)^2 + \sigma_1 B^2 u_1^2 = 0, \quad (8.4)$$

dok jednačine koje opisuju strujanje donjeg mikropolarnog fluida, glase:

$$(\mu_2 + \lambda) \frac{d^2 u_2}{dy^2} + \lambda \frac{d\omega}{dy} + \rho_2 g \beta_2 (T_2 - T_{w2}) \sin \alpha - \sigma_2 B^2 u_2 - \frac{dp}{dx} = 0, \quad (8.5)$$

$$\gamma \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \lambda \frac{du_2}{dy} - 2\lambda \omega = 0, \quad (8.6)$$

$$k_2 \frac{d^2 T_2}{dy^2} + (\mu_2 + \lambda) \left(\frac{du_2}{dy} \right)^2 + \sigma_2 B^2 u_2^2 = 0. \quad (8.7)$$

Uvedimo sad odgovarajuće granične uslove za brzinu, mikrorotaciju i temperaturu na pločama i razdelnoj površi, kao i granične uslove za tangencijalni napon i toplotni fluks na graničnoj površi između viskoznog i mikropolarnog fluida. Pomenuti granični uslovi dati su u sledećem zapisu:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0, T_1 = T_{w1}, \quad \text{za } y = h, \\ u_2 &= 0, T_2 = T_{w2}, \omega = 0, \quad \text{za } y = -h, \\ u_1 &= u_2, T_1 = T_2, \omega = 0, \\ \mu_1 \frac{du_1}{dy} &= (\mu_2 + \lambda) \frac{du_2}{dy} + \lambda \omega, \\ k_1 \frac{dT_1}{dy} &= k_2 \frac{dT_2}{dy}, \end{aligned} \right\} \quad \text{za } y = 0. \quad (8.8)$$

Da bi smo prethodni sistem jednačina (8.3) - (8.7) rešili, prvo moramo preći na bezdimenzioni oblik tih jednačina, kao i bezdimenzioni oblik graničnih uslova (8.8), za šta je neophodno uvesti karakteristične bezdimenzione veličine na osnovu kojih ćemo analizirati karakteristike strujanja mikropolarnog fluida.

Uvodimo sledeće bezdimenzione veličine:

$$\begin{aligned} u_i^* &= \frac{u_i}{U}, \omega^* = \frac{\omega}{U} h, y^* = \frac{y}{h}, U = \frac{\mu_1}{\rho_1 P h}, P = -\frac{dp}{dx} = \text{const}, \\ \theta_1 &= \frac{T_1 - T_{w2}}{T_{w1} - T_{w2}}, \theta_2 = \frac{T_2 - T_{w2}}{T_{w1} - T_{w2}}, \text{Re}_1 = \frac{U_0 h}{\nu_1}, \text{Re}_2 = \frac{U_0 h}{\nu_2}, \\ Ha_1 &= Bh \sqrt{\frac{\sigma_1}{\mu_1}}, Ha_2 = Bh \sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}}, \text{Pr}_1 = \frac{\mu_1 c_{p1}}{k_1}, \text{Pr}_2 = \frac{\mu_2 c_{p2}}{k_2}, \\ Ec_1 &= \frac{U^2}{c_{p1} (T_{w1} - T_{w2})}, Ec_2 = \frac{U^2}{c_{p2} (T_{w1} - T_{w2})}, Gr_1 = \frac{g \beta_1 h^3 (T_1 - T_{w2})}{\nu_1^2}, \\ Gr_2 &= \frac{g \beta_2 h^3 (T_2 - T_{w2})}{\nu_2^2}, K = \frac{\lambda}{\mu_2}, \Gamma = \frac{\gamma}{\mu_2 h^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Sada, nakon uvedenih bezdimenzionih veličina, sistem jednačina (8.3) - (8.7) u bezdimenzionom obliku glasi:

- *gornji sloj - viskozni fluid*:

$$\frac{d^2 u_1^*}{dy^{*2}} + \frac{Gr_1}{Re_1} \sin \alpha - Ha_1^2 u_1^* + Re_1 P = 0, \quad (8.10)$$

$$\frac{d^2 \theta_1}{dy^{*2}} + Pr_1 Ec_1 \left(\frac{du_1^*}{dy^*} \right)^2 + Ha_1^2 Pr_1 Ec_1 u_1^{*2} = 0, \quad (8.11)$$

- *donji sloj - mikropolarni fluid*:

$$(1+K) \frac{d^2 u_2^*}{dy^{*2}} + K \frac{d\omega^*}{dy^*} + \frac{Gr_2}{Re_2} \sin \alpha - Ha_2^2 u_2^* - Re_2 \rho^* P = 0, \quad (8.12)$$

$$\Gamma \frac{d^2 \omega^*}{dy^{*2}} - K \frac{du_2^*}{dy^*} - 2K\omega^* = 0, \quad (8.13)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dy^{*2}} + (1+K) Pr_2 Ec_2 \left(\frac{du_2^*}{dy^*} \right)^2 + Ha_2^2 Ec_2 Pr_2 u_2^{*2} = 0. \quad (8.14)$$

Dok napred definisani granični uslovi (8.8) u bezdimenzionom obliku glase:

$$\begin{aligned} u_1^* &= 0, \theta_1 = 1, \quad \text{za } y^* = 1, \\ u_2^* &= 0, \theta_2 = 0, \omega^* = 0, \quad \text{za } y^* = -1, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= u_2^*, \theta_1 = \theta_2, \omega^* = 0, \\ \mu_1 \frac{du_1^*}{dy^*} &= (\mu_2 + \lambda) \frac{du_2^*}{dy^*} + \lambda \omega^*, \\ k_1 \frac{d\theta_1}{dy^*} &= k_2 \frac{d\theta_2}{dy^*}, \end{aligned} \right\} \quad \text{za } y^* = 0.$$

Rešavanjem jednačina (8.10) i (8.11), dobijamo rešenja za bezdimenzionu brzinu i temperaturu za viskozni fluid u sledećem obliku:

$$u_1^* = A \exp(\lambda_1 y^*) + B \exp(\lambda_2 y^*) + \frac{B}{A}, \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = & M_1 \exp(2\lambda_1 y^*) + M_3 \exp(2\lambda_2 y^*) + M_4 \exp(\lambda_1 y^*) + \\ & + M_5 \exp(\lambda_2 y^*) - \left(\frac{N+J}{2} \right) y^{*2} + C_1^* y^* + C_2^*. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Što se tiče rešavanja sistema jednačina (8.12) - (8.14), za mikropolarni fluid, kao i u prethodnim slučajevima, tako i u ovom slučaju iz jednačina (8.12) i (8.13) dobijamo jednačinu četvrtog reda za bezdimenzionu brzinu, koja glasi:

$$\frac{d^4 u_2^*}{dy^{*4}} - a \frac{d^2 u_2^*}{dy^{*2}} + b u_2^* - d = 0, \quad (8.18)$$

gde su a, b, d novouvedene konstante date izrazima:

$$a = B^* + E^* - A^* D^*, \quad b = B^* E^*, \quad d = C^* E^*, \quad (8.19)$$

u kojima su konstante A^*, B^*, C^*, D^*, E^* :

$$A^* = \frac{K}{1+K}, \quad B^* = \frac{Ha_2^2}{1+K}, \quad C^* = \frac{1}{1+K} \left(\frac{Gr_2}{Re_2} \sin \alpha + Re_2 P \rho^* \right), \quad D^* = \frac{K}{\Gamma}, \quad E^* = \frac{2K}{\Gamma}. \quad (8.20)$$

Rešavanje diferencijalne jednačine četvrtog reda (8.18), urađeno je u više prethodnih poglavlja (poglavlje III, VI i VII). Istim postupkom dolazimo do rešenja i jednačine (8.18), a analizom dobijenog rešenja, zaključuje se da postoje tri moguća slučaja u zavisnosti od korena karakteristične jednačine. Stoga rešenja za brzinu, mikrorotaciju i temperaturu za sva tri slučaja data su redom:

- za brzinu:

– za slučaj kada je: $a^2 - 4b > 0$

$$u_2^* = C_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \exp(\delta_4 y^*) + \frac{d}{b}, \quad (8.21)$$

– za slučaj kada je: $a^2 - 4b = 0$

$$u_2^* = (C_5 + C_6 y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (C_7 + C_8 y^*) \exp(\xi_2 y^*) + \frac{d}{b}, \quad (8.22)$$

– za slučaj kada je: $a^2 - 4b < 0$

$$\begin{aligned} u_2^* = & [C_9 \cos(\beta_1 y^*) + C_{10} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + [C_{11} \cos(\beta_1 y^*) + C_{12} \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*) + \frac{d}{b}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

- za mikrorotaciju, respektivno rešenjima za brzinu:

$$\omega^* = C_1 \mathcal{I}_1 \exp(\delta_1 y^*) + C_2 \mathcal{I}_2 \exp(\delta_2 y^*) + C_3 \mathcal{I}_3 \exp(\delta_3 y^*) + C_4 \mathcal{I}_4 \exp(\delta_4 y^*), \quad (8.24)$$

$$\omega^* = (E_{13} + E_{14} y^*) \exp(\xi_1 y^*) + (E_{15} + E_{16} y^*) \exp(\xi_2 y^*), \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \omega^* = & [P_3^* \cos(\beta_1 y^*) + P_4^* \sin(\beta_1 y^*)] \exp(\alpha_1 y^*) + \\ & + [P_5^* \cos(\beta_1 y^*) + P_6^* \sin(\beta_1 y^*)] \exp(-\alpha_1 y^*), \end{aligned} \quad (8.26)$$

- odnosno za temperaturu:

$$\begin{aligned} \theta_2 = & -\text{Pr}_2 E C_2 \left[\frac{1}{4\delta_1^2} {}^1C \exp(2\delta_1 y^*) + \frac{1}{4\delta_2^2} {}^2C \exp(2\delta_2 y^*) + \frac{1}{4\delta_3^2} {}^3C \exp(2\delta_3 y^*) + \right. \\ & + \frac{1}{4\delta_4^2} {}^4C \exp(2\delta_4 y^*) + \frac{1}{2} {}^1D y^{*2} + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \exp((\delta_1 + \delta_3) y^*) + \\ & + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \exp((\delta_1 + \delta_4) y^*) + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \exp((\delta_2 + \delta_3) y^*) + \\ & + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \exp((\delta_2 + \delta_4) y^*) + \frac{1}{2} {}^3E y^{*2} + \frac{1}{\delta_1^2} {}^1F \exp(\delta_1 y^*) + \\ & \left. + \frac{1}{\delta_2^2} {}^2F \exp(\delta_2 y^*) + \frac{1}{\delta_3^2} {}^3F \exp(\delta_3 y^*) + \frac{1}{\delta_4^2} {}^4F \exp(\delta_4 y^*) + \frac{1}{2} {}^5F y^{*2} + {}^1H_1 y^* + {}^1H_2 \right], \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned}\theta_2 = -\Pr Ec \bigg[& \left(\Omega_{28} + \Omega_{29}y^* + \Omega_{30}y^{*2} \right) \exp(2\xi_1 y^*) + \\ & + \left(\Omega_{31} + \Omega_{32}y^* + \Omega_{33}y^{*2} \right) \exp(2\xi_2 y^*) + \left(\Omega_{34} + \Omega_{35}y^* \right) \exp(\xi_1 y^*) \\ & + \left(\Omega_{36} + \Omega_{37}y^* \right) \exp(\xi_2 y^*) + \Omega_{38}y^{*2} + \Omega_{39}y^{*3} + \Omega_{40}y^{*4} + {}^2H_1 y^* + {}^2H_2 \bigg],\end{aligned}\quad (8.28)$$

$$\begin{aligned}\theta_2 = -\Pr_2 Ec_2 \bigg\{ & \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{47} - \chi_2 \Omega_{49}) \cos(2\beta_1 y^*) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{47} + \chi_1 \Omega_{49}) \sin(2\beta_1 y^*) \right] \exp(2\alpha_1 y^*) + \\ & + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{48} + \chi_2 \Omega_{50}) \cos(2\beta_1 y^*) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{48} - \chi_1 \Omega_{50}) \sin(2\beta_1 y^*) \right] \exp(-2\alpha_1 y^*) - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{51} \sin(2\beta_1 y^*) - \\ & - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} \cos(2\beta_1 y^*) + \left[(\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) \cos(\beta_1 y^*) + \right. \\ & + (\Omega_{53} \chi_2 + \Omega_{55} \chi_1) \sin(\beta_1 y^*) \bigg] \exp(\alpha_1 y^*) + \left[(\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2) \cos(\beta_1 y^*) - \right. \\ & \left. - (\Omega_{54} \chi_2 + \Omega_{56} \chi_1) \sin(\beta_1 y^*) \right] \exp(-\alpha_1 y^*) + \frac{1}{2} \Omega_{57} y^{*2} + {}^3H_1 y^* + {}^3H_2 \bigg\}.\end{aligned}\quad (8.29)$$

8.2.

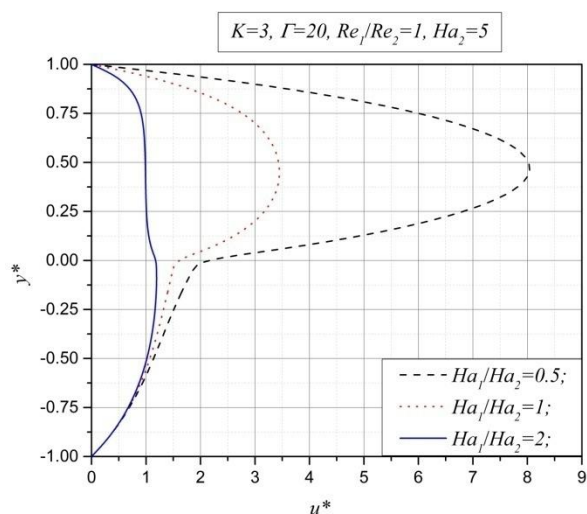
Analiza rezultata razmatranog problema

Kako je već predstavljena analiza uticaja karakterističnih parametara, pre svega Hartmannovog i Reynoldsovog broja, na strujanje dva mikropolarna fluida, sledeći korak je da vidimo kako će se promena Hartmannovog i Reynoldsovog broja odraziti na strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida, tj. da uporedimo uticaj ovih bezdimenzionih karakterističnih parametara na profile brzine, mikrorotacije i temperature ova dva različita fluida. Uz to, uradiće se i analiza uticaja nagnutosti kanala preko ugla α na brzinu viskoznog i mikropolarnog fluida, kao i na mikrorotaciju mikropolarnog fluida.

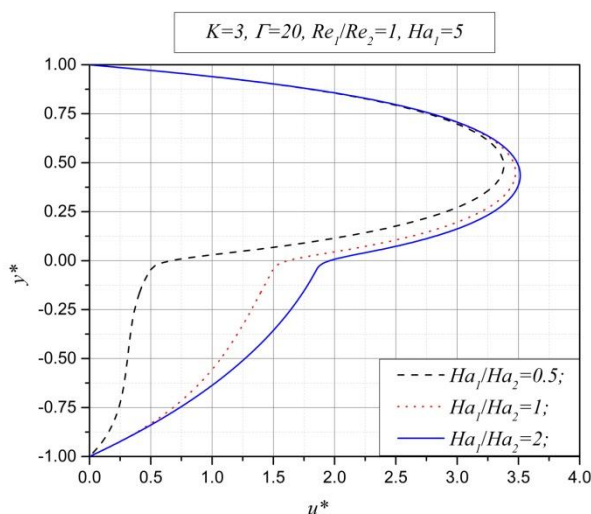
Nadalje se daje uticaj Hartmannovog broja na profile brzine, mikrorotacije i temperature dva pomenuta fluida. Uticaj Hartmannovog broja će biti izražen preko međusobnog odnosa Ha_1/Ha_2 i to u dva slučaja: prvi, kada će Hartmannov broj za mikropolarni fluid Ha_2 biti

konstantan i drugi, kada će Hartmannov broj za viskozni fluid Ha_1 imati konstantnu vrednost, dok će se menjati vrednost Hartmannovog broja za mikropolarni fluid Ha_2 .

Prva dva grafika 8.1 i 8.2, daju uticaj Hartmannovih brojeva na profile brzina viskoznog i mikropolarnog fluida.



8.1 Uticaj Hartmannovog broja Ha_1 na profil brzine

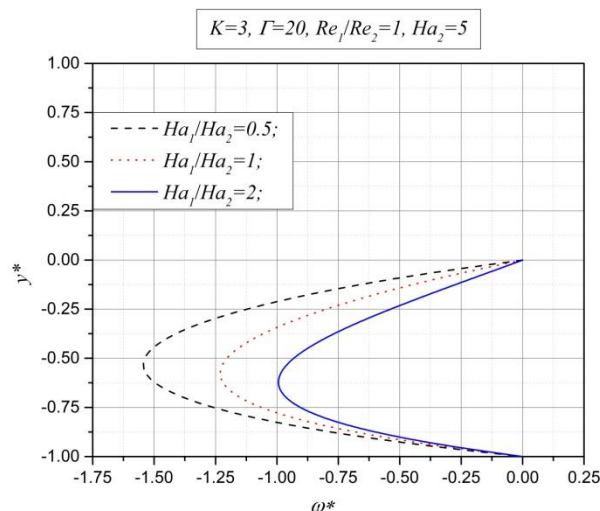


8.2 Uticaj Hartmannovog broja Ha_2 na profil brzine

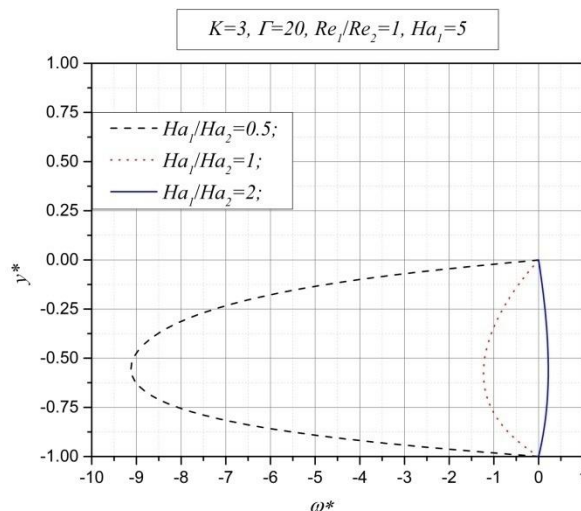
Iz dva priložena grafika 8.1 i 8.2, može se uočiti da uticaj Hartmannovog broja, tj. spoljašnjeg magnetnog polja preko Lorentzove sile, ima potpuno iste tendencije i kod viskoznog i kod mikropolarnog fluida. U oba slučaja povećanje Hartmannovog broja dovodi do smanjenja intenziteta brzine sa težnjom da se profil brzine poravna po celoj visini između ploča. Promene koje se javljaju u donjem delu kanala na grafiku 8.1 su posledica promene Hartmannovog broja Ha_1 i usvojenih graničnih uslova (8.15), što se dešava i na grafiku 8.2 samo u gornjem delu kanala sa promenom Ha_2 . Uticaj donjeg fluida na gornji znatno je veći, što se vidi prema ukupnom protoku između ploča.

Naredna dva grafika 8.3 i 8.4, daće uticaj promene Hartmannovih brojeva Ha_1 i Ha_2 na polje mikrorotacije. Ovde treba naglasiti da se vektor mikrorotacije razmatra samo u donjem delu kanala, jer je to strujni prostor u kome se nalazi mikropolarni fluid. Kako je pretpostavljeno da se viskozni i mikropolarni fluid ne mešaju, tako je na njihovoj razdelnoj površi usvojeno da je mikrorotacija jednaka nuli ($\omega^* = 0$).

Grafik 8.3 predstavlja uticaj promene Hartmannovog broja Ha_1 i može se primetiti da usled njegove promene dolazi do male promene inteziteta mikrorotacije. Ova promena je direktna posledica promene brzine u donjem delu kanala usled promene Ha_1 , jer su rešenja za mikrorotaciju direktno spregnuta sa rešenjima za brzinu mikropolarnog fluida, što se može i zaključiti na osnovu jednačina (8.12) i (8.13).



8.3 Uticaj Hartmannovog broja Ha_1 na profil mikrorotacije



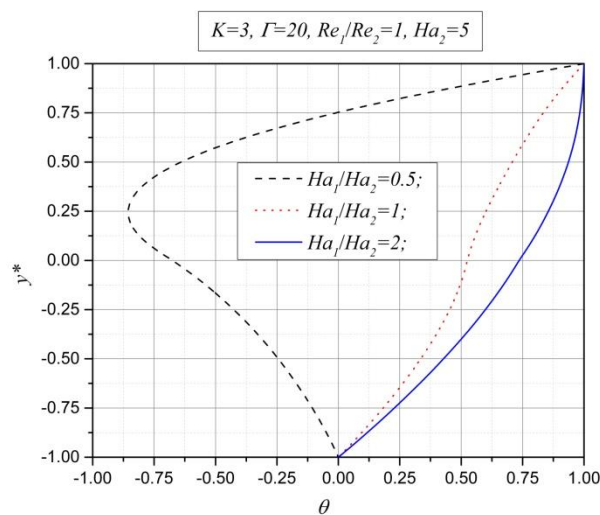
8.4 Uticaj Hartmannovog broja Ha_2 na profil mikrorotacije

Međutim, sa grafika 8.4 gde je dat uticaj Hartmannovog broja Ha_2 na mikrorotaciju mikropolarnog fluida, može se uvideti da povećanje uticaja spoljašnjeg magnetnog polja na strujanje mikropolarnog fluida dovodi do smanjenja intenziteta mikrorotacije, pa čak i promene smeru.

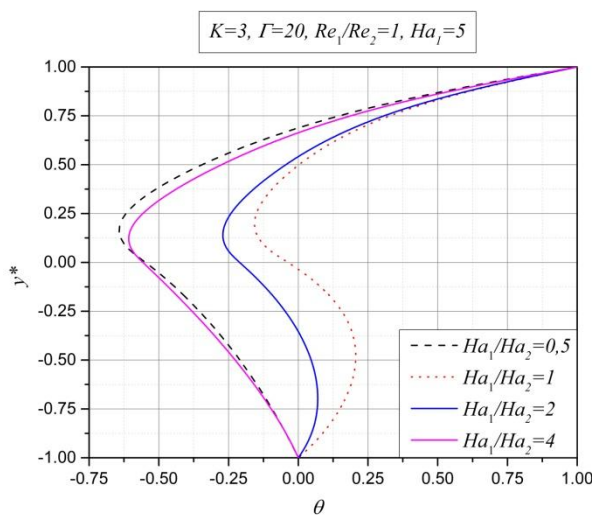
Ostalo je na samom kraju problema koji se razmatra da se predstavi uticaj Hartmannovih brojeva Ha_1 i Ha_2 na bezdimenzionu temperaturu. Ta zavisnost predstavljena je na graficima 8.5 i 8.6.

Sa grafika 8.5 možemo uočiti da za vrednost odnosa Hartmannovih brojeva $Ha_1/Ha_2 = 0.5$, dolazi do smanjenja bezdimenione temperature po visini kanala. U ovom slučaju se prenos toplote odvija od ploča ka fluidu. Nasuprot tome, pri vrednosti odnosa Hartmannovih brojeva $Ha_1/Ha_2 = 2$, dolazi do porasta temperature po visini kanala, pa se u ovom slučaju

prenost toplote odvija od fluida ka pločama. U prilog ovome govori i činjenica da kako odnos Hartmannovih brojeva raste, tako je unutrašnje zagrevanje kod oba fluida veće (posledica delovanja Lorencove sile), te dolazi do porasta bezdimenzione temperature po celoj visini strujnog prostora.



8.5 Uticaj Hartmannovog broja Ha_1 na profil bezdimenzione temperature

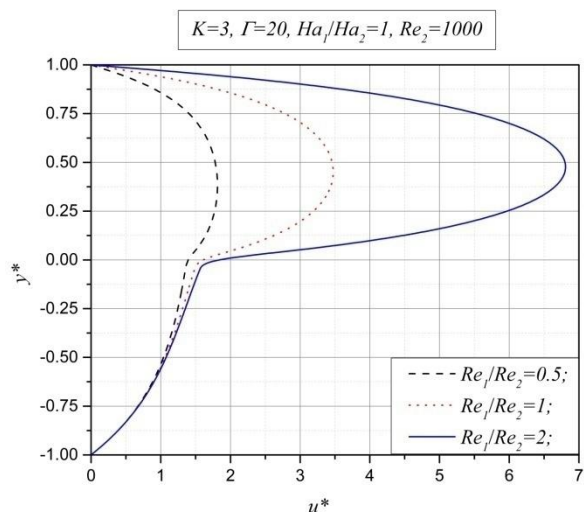
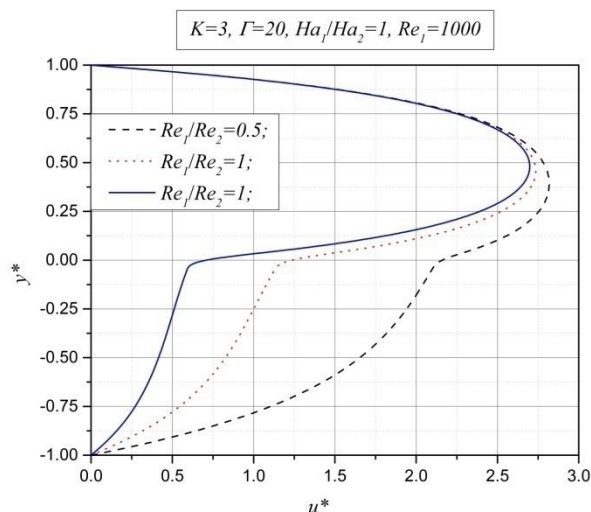


8.6 Uticaj Hartmannovog broja Ha_2 na profil bezdimenzione temperature

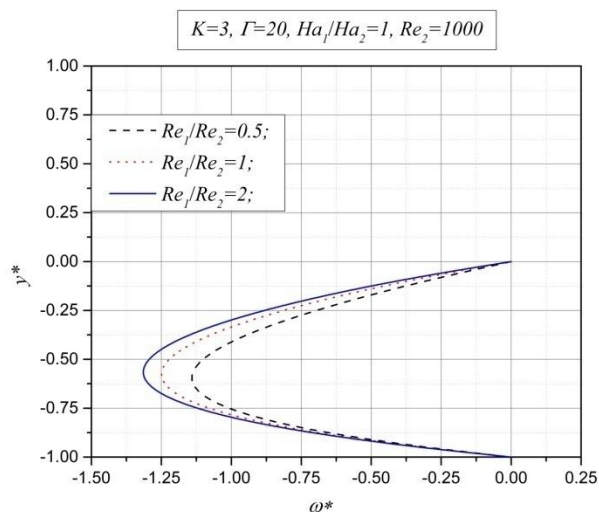
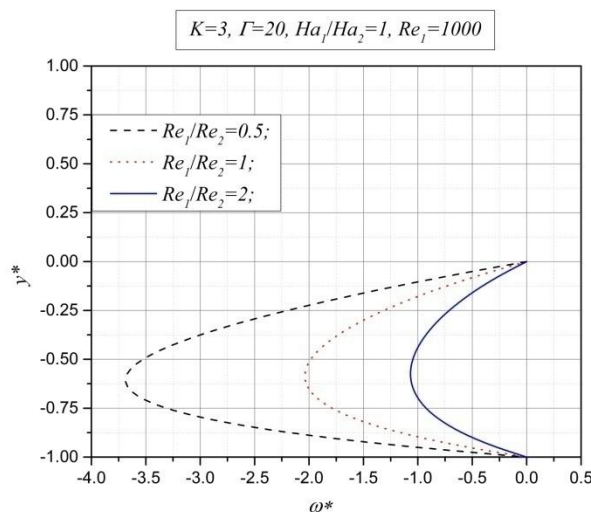
Grafik 8.6 predstavlja uticaj promene Ha_2 na bezdimenzionu temperaturu. Sa grafika se uočava da kako Hartmannov broj Ha_2 opada, tj. odnos Ha_1/Ha_2 raste, dolazi prvo do porasta temperature u donjem delu kanala (za vrednost $Ha_1/Ha_2 = 1$). Doprinos porastu bezdimenzione temperature u tom trenutku daju i viskozno zagrevanje, kao i Jouleova toplota. Međutim, kako vrednost Hartmannovog Ha_2 broja nastavlja da opada, tj. odnos Ha_1/Ha_2 nastavlja da raste, tako i temperatura počinje opada jer se smanjuje uticaj Lorentzove sile, odnosno manji je uticaj viskoznog zagrevanja, kao i Jouleove toplote.

Osim analize uticaja Hartmannovog broja na strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida, izvršena je analiza uticaja i Reynoldsovog broja na profile brzine i temperature viskoznog i mikropolarnog fluida, kao i na vektor mikrorotacije mikropolarnog fluida. Ova analizu uticaja Reynoldsovih brojeva Re_1 i Re_2 predstavljena je na graphicima 8.7 i 8.8, gde je dat njihov uticaj na polje brzine.

U oba slučaja, sa grafika 8.7 i 8.8, uočava se da povećanje Reynoldsovog broja Re_1 , odnosno Reynoldsovog broja Re_2 , dovodi do povećanja brzine strujanja viskoznog, odnosno mikropolarnog, fluida. Ovi su rezultati očekivani jer sa povećanjem Reynoldsovog broja dolazi i do porasta odnosa inercijalnih u odnosu na viskozne sile.

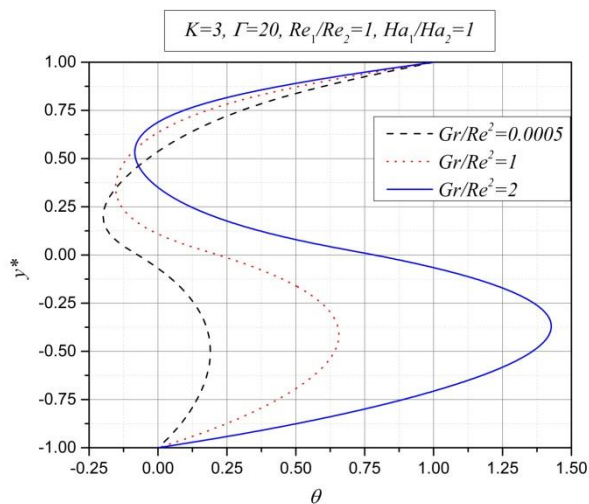
8.7 Uticaj Reynoldsovog broja Re_1 na profil brzine8.8 Uticaj Reynoldsovog broja Re_2 na profil brzine

Na narednim graphicima 8.9 i 8.10 dat je uticaj Reynoldsovih brojeva Re_1 i Re_2 na mikrorotaciju mikropolarnog fluida.

8.9 Uticaj Reynoldsovog broja Re_1 na profil mikrorotacije8.10 Uticaj Reynoldsovog broja Re_2 na profil mikrorotacije

Kao i kod slučaja uticaja Hartmannovog broja Ha_1 , tako i kod uticaja Reynoldsovog broja Re_1 , grafik 8.9, promena mikrorotacije u zoni mikropolarnog kanala je zanemarljivo mala i posledica je promene brzine mikropolarnog fluida usled promene Reynoldsovog broja Re_1 , koji se odnosi na viskozni fluid. Sa druge strane, smanjenje vrednosti Reynoldsovog broja Re_2 dovodi do smanjnjena intenziteta mikrorotacije u donjem delu kanala, a sve to kao posledica toga da viskozne sile postaju dominantne u odnosu na inercijalne, što je i predstavljeno na grafiku 8.10.

Uticaj odnosa Grashofovog broja Gr i Reynoldsovog broja Re na polje temperature, dat je na grafiku 8.11.

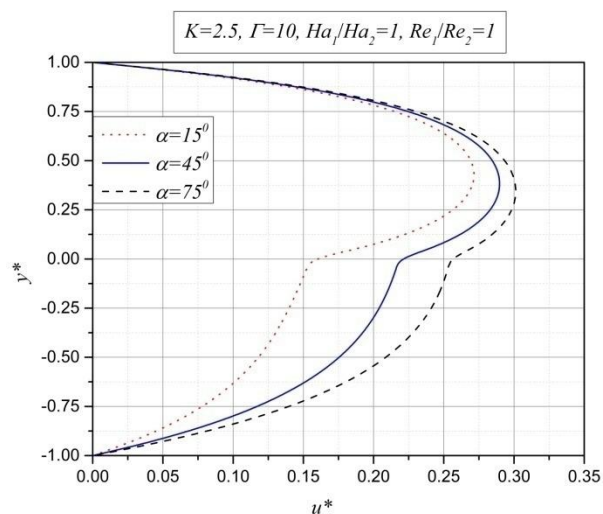


8.11 Uticaj odnosa Grashofovog Gr i Reynoldsovog Re na profil bezdimenzionirane temperature

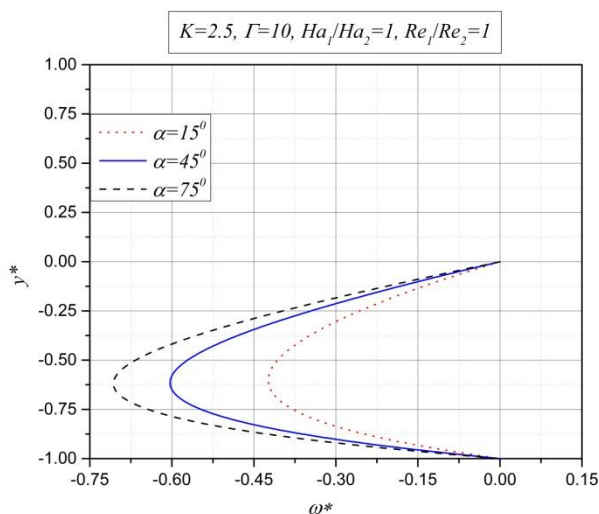
Odnos Grashofovog broja i Reynoldsovog broja, pokazuje uticaj prirodne, odnosno prinudne konvekcije na polje bezdimenzionirane temperature. U slučaju kada je vrednost odnosa Gr/Re^2 oko jedinice, na polje temperature utiču i prirodna kao i prinudna konvekcija. Za slučaj kada je taj odnos znatno veći od jedinice, prinudna konvekcija ima daleko veći uticaj, dok za male vrednosti odnosa Gr/Re^2 , na polje temperature utiče samo prinudna konvekcija.

Kako se razmatrani analitički model MHD strujanja viskoznog i mikropolarnog fluida razlikuje od prethodnih modela između ostalog i zbog nagiba ploča, na kraju, na poslednja dva

grafika 8.12 i 8.13, predstaviće se uticaj nagiba ploča (preko ugla α) na polje brzine i mikrorotacije.



8.12 Zavisnost vektora brzine od ugla nagutosti ploča α



8.13 Zavisnost vektora mikrorotacije od ugla nagutosti ploča α

Sa grafika 8.12 i 8.13 uočava se da sa porastom ugla α , raste i intenzitet brzine po celoj visini kanala, kao i intenzitet mikrorotacije u donjem delu kanala gde struji mikropolarni fluid. Ovakvo ponašanje viskoznog i mikropolarnog fluida je očekivano i direktno je posledica drugog člana jednačine (8.3), što se tiče viskoznog fluida, odnosno trećeg člana jednačine (8.5), kada je u pitanju mikropolarni fluid. Treba takođe napomenuti da u oba slučaja, kako na grafiku 8.12 prilikom uticaja ugla nagutosti ploča α na brzinu, tako i na grafiku 8.13 gde je predstavljen uticaj ugla nagutosti ploča na mikrorotaciju, Grashofovi brojevi Gr_1 i Gr_2 imaju pozitivnu vrednost.

8.3.

*Dodatak - konstante kod razmatranog problema*Za slučaj kada je $a^2 - 4b > 0$, konstante su:

$$A = Ha_1^2, B = \frac{Gr_1}{Re_1} \sin \alpha + Re_1 P, C = Pr_1 Ec_1, D = Ha_1^2 Pr_1 Ec_1,$$

$$\lambda_1 = +\sqrt{A}, \lambda_1 = -\sqrt{A}, \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$H = A^2 (C\lambda_1^2 + D), J = 2AB (C\lambda_1\lambda_2 + D), K^* = B^2 (C\lambda_2^2 + D),$$

$$L = 2DA \frac{B}{A}, M = 2DB \frac{B}{A}, N = \frac{B^2}{A^2} D,$$

$$M_1 = -\frac{H}{4\lambda_1^2}, M_3 = -\frac{K^*}{4\lambda_2^2}, M_4 = -\frac{L}{\lambda_1^2}, M_5 = -\frac{M}{\lambda_2^2},$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4b^2} \right), r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 4b^2} \right), \delta_1 = +\sqrt{r_1}, \delta_2 = -\sqrt{r_1}, \delta_3 = +\sqrt{r_2}, \delta_4 = -\sqrt{r_2},$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{B^*}{A} - D^* \right), \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{EA}, \mathcal{D}_i = \delta_i (\mathfrak{I}_1 - \delta_i^2 \mathfrak{I}_2), \quad i=1,2,3,4,$$

$${}^iC = C_i^2 \left[(1+K) \delta_i^2 + Ha^2 \right], \quad i=1,2,3,4, {}^iD = 2C_1 C_{i+1} \left[(1+K) \delta_1 \delta_{i+1} + Ha^2 \right], \quad i=1,2,3,$$

$${}^iE = 2C_2 C_{i+2} \left[(1+K) \delta_2 \delta_{i+2} + Ha^2 \right], \quad i=1,2, {}^3E = 2C_3 C_4 \left[(1+K) \delta_3 \delta_4 + Ha^2 \right],$$

$${}^iF = 2 \frac{d}{b} Ha^2 C_i, \quad i=1,2,3,4, {}^5F = \frac{d^2}{b^2} Ha^2,$$

$$\alpha_1 = \exp(\lambda_1), \alpha_2 = \exp(\lambda_2), \alpha_3 = \frac{B}{A},$$

$$\alpha_4 = M_1 \exp(2\lambda_1) + M_3 \exp(2\lambda_2) + M_4 \exp(\lambda_1) + M_5 \exp(\lambda_2) - \left(\frac{J+N}{2} \right),$$

$$\alpha_5 = \exp(-\delta_1), \alpha_6 = \exp(-\delta_2), \alpha_7 = \exp(-\delta_3), \alpha_8 = \exp(-\delta_4), \alpha_9 = \frac{d}{b}, \alpha_{10} = D_1 \exp(-\delta_1),$$

$$\alpha_{11} = D_2 \exp(-\delta_2), \alpha_{12} = D_2 \exp(-\delta_3), \alpha_{13} = D_4 \exp(-\delta_4), \alpha_{14} = M_1 + M_3 + M_4 + M_5,$$

$$\alpha_{15} = \text{Pr}_2 \text{Ec}_2, \alpha_{16} = \mu_1 \lambda_1, \alpha_{17} = \mu_1 \lambda_2, \alpha_{18} = \delta_1 \mu_2 + \delta_1 \lambda + \lambda D_1, \alpha_{19} = \delta_2 \mu_2 + \delta_2 \lambda + \lambda D_2,$$

$$\alpha_{20} = \delta_3 \mu_2 + \delta_3 \lambda + \lambda D_3, \alpha_{21} = \delta_4 \mu_2 + \delta_4 \lambda + \lambda D_4, \alpha_{22} = k_1 [2\lambda_1 M_1 + 2M_3 \lambda_2 + M_4 \lambda_1 + M_5 \lambda_2],$$

$$\alpha_{23} = k_2 \text{Pr}_2 \text{Ec}_2, \alpha_{24} = \alpha_4 - 1, \alpha_{25} = \alpha_9 - \alpha_3, \alpha_{26} = \alpha_{14} - {}^1\mathbf{B}_2, \alpha_{27} = \alpha_{22} - {}^1\mathbf{B}_3, \alpha_{28} = \alpha_{23} {}^1\mathbf{B}_1 + \alpha_{27},$$

$$\alpha_{29} = \alpha_{26} - \alpha_{24}, \alpha_{30} = 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \alpha_{31} = \alpha_{25} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_{32} = \alpha_{17} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_{16}, \alpha_{33} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_{16}, \alpha_{34} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{30}} - \alpha_{18},$$

$$\alpha_{35} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{30}} - \alpha_{19}, \alpha_{36} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{30}} - \alpha_{20}, \alpha_{37} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{30}} - \alpha_{21}, \alpha_{38} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{30}} \alpha_{31} - \alpha_{33}, \alpha_{39} = \alpha_6 - \frac{D_2}{D_1} \alpha_5,$$

$$\alpha_{40} = \alpha_7 - \frac{D_3}{D_1} \alpha_5, \alpha_{41} = \alpha_8 - \frac{D_4}{D_1} \alpha_5, \alpha_{42} = \alpha_{11} - \frac{D_2}{D_1} \alpha_{10}, \alpha_{43} = \alpha_{12} - \frac{D_3}{D_1} \alpha_{10}, \alpha_{44} = \alpha_{13} - \frac{D_4}{D_1} \alpha_{10},$$

$$\alpha_{45} = \alpha_{35} - \frac{D_2}{D_1} \alpha_{34}, \alpha_{46} = \alpha_{36} - \frac{D_3}{D_1} \alpha_{34}, \alpha_{47} = \alpha_{37} - \frac{D_4}{D_1} \alpha_{34}, \alpha_{48} = \alpha_{40} - \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{42}} \alpha_{43},$$

$$\alpha_{49} = \alpha_{41} - \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{42}} \alpha_{44}, \alpha_{50} = \alpha_{46} - \frac{\alpha_{45}}{\alpha_{42}} \alpha_{43}, \alpha_{51} = \alpha_{47} - \frac{\alpha_{45}}{\alpha_{42}} \alpha_{44},$$

$$\alpha_{52} = \alpha_{51} - \frac{\alpha_{50}}{\alpha_{48}} \alpha_{49}, \alpha_{53} = \frac{\alpha_{50}}{\alpha_{48}} \alpha_9 - \alpha_{38},$$

$${}^1H_1 = {}^1H_2 + {}^1\mathbf{B}_1, {}^1H_2 = \frac{-k_1 \alpha_{29} - \alpha_{28}}{k_1 \alpha_{15} + \alpha_{23}}, C_1^* = \alpha_{15} {}^1H_2 + \alpha_{29}, C_2^* = -(C_1^* + \alpha_{24}),$$

$$\begin{aligned} {}^1\mathcal{B}_1 &= \frac{1}{4\delta_1^2} {}^1C \exp(-2\delta_1) + \frac{1}{4\delta_2^2} {}^2C \exp(-2\delta_2) + \frac{1}{4\delta_3^2} {}^3C \exp(-2\delta_3) + \\ &+ \frac{1}{4\delta_4^2} {}^4C \exp(-2\delta_4) + \frac{1}{2} {}^1D + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} \exp(-(\delta_1 + \delta_3)) + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} \exp(-(\delta_1 + \delta_4)) \\ &+ \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} \exp(-(\delta_2 + \delta_3)) + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} \exp(-(\delta_2 + \delta_4)) \\ &+ \frac{1}{2} {}^3E + \frac{1}{\delta_1^2} {}^1F \exp(-\delta_1) + \frac{1}{\delta_2^2} {}^2F \exp(-\delta_2) + \frac{1}{\delta_3^2} {}^3F \exp(-\delta_3) + \frac{1}{\delta_4^2} {}^4F \exp(-\delta_4) + \frac{1}{2} {}^5F, \end{aligned}$$

$${}^1\mathcal{B}_2 = -\text{Pr}_2 \text{Ec}_2 \left[\frac{{}^1C}{4\delta_1^2} + \frac{{}^2C}{4\delta_2^2} + \frac{{}^3C}{4\delta_3^2} + \frac{{}^4C}{4\delta_4^2} + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)^2} + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)^2} + \right. \\ \left. + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)^2} + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)^2} + \frac{{}^1F}{\delta_1^2} + \frac{{}^2F}{\delta_2^2} + \frac{{}^3F}{\delta_3^2} + \frac{{}^4F}{\delta_4^2} \right],$$

$${}^1\mathcal{B}_3 = -k_2 \text{Pr}_2 \text{Ec}_2 \left[\frac{{}^1C}{2\delta_1} + \frac{{}^2C}{2\delta_2} + \frac{{}^3C}{2\delta_3} + \frac{{}^4C}{2\delta_4} + \frac{{}^2D}{(\delta_1 + \delta_3)} + \frac{{}^3D}{(\delta_1 + \delta_4)} + \right. \\ \left. + \frac{{}^1E}{(\delta_2 + \delta_3)} + \frac{{}^2E}{(\delta_2 + \delta_4)} + \frac{{}^1F}{\delta_1} + \frac{{}^2F}{\delta_2} + \frac{{}^3F}{\delta_3} + \frac{{}^4F}{\delta_4} \right],$$

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 \mathbf{B} + \alpha_3), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\alpha_{30}}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \alpha_{31}),$$

$$C_1 = -\frac{1}{D_1}(C_2 D_2 + C_3 D_3 + C_4 D_4), \quad C_2 = -\frac{1}{\alpha_{42}}(C_3 \alpha_{43} + C_4 \alpha_{44}), \quad C_3 = -\frac{1}{\alpha_{48}}(C_4 \alpha_{49} + \alpha_9), \quad C_4 = \frac{\alpha_{53}}{\alpha_{52}}.$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b = 0$, konstante su:

$$A = Ha_1^2, \quad B = \frac{Gr_1}{\text{Re}_1} \sin \alpha + \text{Re}_1 P, \quad C = \text{Pr}_1 \text{Ec}_1, \quad D = Ha_1^2 \text{Pr}_1 \text{Ec}_1,$$

$$\lambda_1 = +\sqrt{A}, \quad \lambda_1 = -\sqrt{A}, \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$H = A^2(C\lambda_1^2 + D), \quad J = 2AB(C\lambda_1\lambda_2 + D), \quad K^* = B^2(C\lambda_2^2 + D),$$

$$L = 2DA \frac{B}{A}, \quad M = 2DB \frac{B}{A}, \quad N = \frac{B^2}{A^2} D,$$

$$M_1 = -\frac{H}{4\lambda_1^2}, \quad M_3 = -\frac{K^*}{4\lambda_2^2}, \quad M_4 = -\frac{L}{\lambda_1^2}, \quad M_5 = -\frac{M}{\lambda_2^2},$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right), \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right), \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}a, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}a,$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{B^*}{A} - D^* \right), \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{1}{EA},$$

$$F_i = \mathfrak{I}_1 - 3\mathfrak{I}_2 \xi_i^2, \quad i=1,2, \quad E_i = \xi_i (\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \xi_i^2), \quad i=1,2,$$

$$G_i = \xi_i (\mathfrak{I}_1 - \xi_i^2 \mathfrak{I}_2) \exp \xi_i, \quad i=1,2, \quad H_i = [\mathfrak{I}_1 (1 + \xi_i) - \mathfrak{I}_2 \xi_i^2 (3 + \xi_i)] \exp \xi_i, \quad i=1,2,$$

$$E_3 = E_2 - E_1, \quad E_4 = E_1 \frac{d}{b}, \quad E_5 = \exp \xi_2 - \exp \xi_1, \quad E_6 = (1 - \exp \xi_1) \frac{d}{b}, \quad G_3 = G_2 - G_1, \quad G_4 = G_1 \frac{d}{b},$$

$$E_7 = E_5 - \frac{E_3}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_8 = \exp \xi_2 - \frac{F_2}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_9 = E_6 + \frac{E_4}{F_1} \exp \xi_1, \quad E_{10} = G_3 - \frac{H_1}{F_1} E_3,$$

$$E_{11} = H_2 - \frac{H_1}{F_1} F_2, \quad E_{12} = \frac{H_1}{F_1} E_4 - G_4, \quad E_{13} = E_1 C_5 + F_1 C_6, \quad E_{14} = E_1 C_6, \quad E_{15} = E_2 C_7 + F_2 C_8,$$

$$E_{16} = E_2 C_8,$$

$$\Omega_1 = (1+K)(C_6^2 + \xi_1^2 C_5^2 + 2C_5 C_6 \xi_1) + Ha^2 C_5^2, \quad \Omega_2 = (1+K)(2C_5 C_6 \xi_1^2 + 2\xi_1 C_6^2) + 2Ha^2 C_5 C_6,$$

$$\Omega_3 = (1+K)(\xi_1^2 C_6^2 + Ha^2 C_6^2), \quad \Omega_4 = (1+K)(C_8^2 + \xi_2^2 C_7^2 + 2\xi_2 C_7 C_8) + C_7^2 Ha^2,$$

$$\Omega_5 = (1+K)(2C_7 C_8 \xi_2^2 + 2\xi_2 C_8^2) + 2C_7 C_8 Ha^2, \quad \Omega_6 = (1+K)\xi_2^2 C_8^2 + C_8^2 Ha^2,$$

$$\Omega_7 = (1+K)(2C_6 C_8 + 2C_6 C_7 \xi_2 + 2C_5 C_8 \xi_1 + 2\xi_1 \xi_2 C_5 C_7) + 2C_5 C_7 Ha^2,$$

$$\Omega_8 = (1+K)(2C_6 C_8 \xi_2 + 2C_6 C_8 \xi_1 + 2\xi_1 \xi_2 C_6 C_7 + 2\xi_1 \xi_2 C_5 C_8) + 2Ha^2 (C_6 C_7 + C_5 C_8),$$

$$\Omega_9 = (1+K)2\xi_1 \xi_2 C_6 C_8 + 2C_6 C_8 Ha^2, \quad \Omega_{10} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_5, \quad \Omega_{11} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_6, \quad \Omega_{12} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_7,$$

$$\Omega_{13} = 2\frac{d}{b} Ha^2 C_8, \quad \Omega_{14} = \frac{d^2}{b^2} Ha^2, \quad \Omega_{15} = \frac{\Omega_1}{2\xi_1} - \frac{\Omega_2}{4\xi_1^2} + \frac{\Omega_3}{4\xi_1^3}, \quad \Omega_{16} = \frac{\Omega_2}{2\xi_1} - \frac{\Omega_3}{2\xi_1^2}, \quad \Omega_{17} = \frac{\Omega_3}{2\xi_1},$$

$$\Omega_{18} = \frac{\Omega_4}{2\xi_2} - \frac{\Omega_5}{4\xi_2^2} + \frac{\Omega_6}{4\xi_2^3}, \quad \Omega_{19} = \frac{\Omega_5}{2\xi_2} - \frac{\Omega_6}{2\xi_2^2}, \quad \Omega_{20} = \frac{\Omega_6}{2\xi_2}, \quad \Omega_{21} = \frac{\Omega_{10}}{\xi_1} - \frac{\Omega_{11}}{\xi_1^2}, \quad \Omega_{22} = \frac{\Omega_{11}}{\xi_1},$$

$$\Omega_{23} = \frac{\Omega_{12}}{\xi_2} - \frac{\Omega_{13}}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{24} = \frac{\Omega_{13}}{\xi_2}, \quad \Omega_{25} = \frac{\Omega_{11}}{\xi_1}, \quad \Omega_{26} = \frac{\Omega_{12}}{\xi_2} - \frac{\Omega_{13}}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{27} = \frac{\Omega_{13}}{\xi_2},$$

$$\begin{aligned}\Omega_{28} &= \frac{\Omega_{15}}{2\xi_1} - \frac{\Omega_{16}}{4\xi_1^2} + \frac{\Omega_{17}}{4\xi_1^3}, \quad \Omega_{29} = \frac{\Omega_{16}}{2\xi_1} - \frac{\Omega_{17}}{2\xi_1^2}, \quad \Omega_{30} = \frac{\Omega_{17}}{2\xi_1}, \quad \Omega_{31} = \frac{\Omega_{18}}{2\xi_2} - \frac{\Omega_{19}}{4\xi_2^2} + \frac{\Omega_{20}}{4\xi_2^3}, \\ \Omega_{32} &= \frac{\Omega_{19}}{2\xi_2} - \frac{\Omega_{20}}{2\xi_2^2}, \quad \Omega_{33} = \frac{\Omega_{20}}{2\xi_2}, \quad \Omega_{34} = \frac{\Omega_{21}}{\xi_1} - \frac{\Omega_{22}}{\xi_1^2}, \quad \Omega_{35} = \frac{\Omega_{22}}{\xi_1}, \quad \Omega_{36} = \frac{\Omega_{23}}{\xi_2} - \frac{\Omega_{24}}{\xi_2^2}, \quad \Omega_{37} = \frac{\Omega_{24}}{\xi_2}, \\ \Omega_{38} &= \frac{\Omega_7 + \Omega_{14}}{2}, \quad \Omega_{39} = \frac{\Omega_8}{6}, \quad \Omega_{40} = \frac{\Omega_9}{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}^1\mathcal{F}_1 &= (\Omega_{28} - \Omega_{29} + \Omega_{30}) \exp(-2\xi_1) + (\Omega_{31} - \Omega_{32} + \Omega_{33}) \exp(-2\xi_2) + \\ &+ (\Omega_{34} - \Omega_{35}) \exp(-\xi_1) + (\Omega_{36} - \Omega_{37}) \exp(-\xi_2) + \Omega_{38} - \Omega_{39} + \Omega_{40},\end{aligned}$$

$${}^1\mathcal{F}_2 = \Omega_{28} + \Omega_{31} + \Omega_{34} + \Omega_{36},$$

$${}^1\mathcal{F}_3 = -\text{Pr}_2 \text{Ec}_2 k_2 [2\xi_1 \Omega_{28} + \Omega_{29} + 2\xi_2 \Omega_{31} + \Omega_{32} + \xi_1 \Omega_{34} + \Omega_{35} + \xi_2 \Omega_{36} + \Omega_{37}],$$

$$\beta_1 = \exp(\lambda_1), \quad \beta_2 = \exp(\lambda_2), \quad \beta_3 = \frac{B}{A},$$

$$\beta_4 = \text{M}_1 \exp(2\lambda_1) + \text{M}_3 \exp(2\lambda_2) + \text{M}_4 \exp(\lambda_1) + \text{M}_5 \exp(\lambda_2) - \left(\frac{J+N}{2} \right),$$

$$\beta_5 = \exp(-\delta_1), \quad \beta_6 = \exp(-\delta_2), \quad \beta_7 = \frac{d}{b}, \quad \beta_8 = \text{M}_1 + \text{M}_3 + \text{M}_4 + \text{M}_5, \quad \beta_9 = \text{Pr}_2 \text{Ec}_2,$$

$$\beta_{10} = \mu_1 \lambda_1, \quad \beta_{11} = \mu_1 \lambda_2, \quad \beta_{12} = \mu_2 + \lambda, \quad \beta_{13} = \xi_1 (\mu_2 + \lambda), \quad \beta_{14} = \xi_2 (\mu_2 + \lambda),$$

$$\beta_{15} = k_1 [2\lambda_1 \text{M}_1 + 2\text{M}_3 \lambda_2 + \text{M}_4 \lambda_1 + \text{M}_5 \lambda_2], \quad \beta_{16} = k_2 \text{Pr}_2 \text{Ec}_2, \quad \beta_{17} = \beta_4 - 1, \quad \beta_{18} = \beta_7 - \beta_3,$$

$$\begin{aligned}\beta_{19} &= \beta_8 - {}^1\mathbf{B}_2, \quad \beta_{20} = \beta_{15} - {}^1\mathbf{B}_3, \quad \beta_{21} = \beta_{16} {}^1\mathbf{B}_1 + \beta_{20}, \quad \beta_{22} = \beta_{19} - \beta_{17}, \quad \beta_{23} = \beta_5 E_1, \quad \beta_{24} = F_1 - \beta_5 E_1, \\ \beta_{25} &= \beta_6 E_2, \quad \beta_{26} = F_2 - \beta_6 E_2, \quad \beta_{27} = \beta_{13} - \lambda E_1, \quad \beta_{28} = \beta_{12} - \lambda F_1, \quad \beta_{29} = \beta_{14} + \lambda E_2, \quad \beta_{30} = \beta_{12} + \lambda F_2,\end{aligned}$$

$$\beta_{31} = 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \beta_{32} = \beta_{18} + \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad \beta_{33} = \beta_{14} - \beta_{10} \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \beta_{34} = \beta_{10} \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad \beta_{35} = \beta_{27} - \frac{\beta_{33}}{\beta_{31}}, \quad \beta_{36} = \beta_{29} - \frac{\beta_{33}}{\beta_{31}},$$

$$\beta_{37} = \beta_{34} - \frac{\beta_{33}}{\beta_{31}} \beta_{32}, \quad \beta_{38} = \frac{\beta_5}{E_1} F_1 + \beta_5, \quad \beta_{39} = \beta_6 - \frac{\beta_5}{E_1} E_2, \quad \beta_{40} = \frac{\beta_5}{E_1} F_2 + \beta_6, \quad \beta_{41} = \beta_{24} - \frac{\beta_{23}}{E_1} F_1,$$

$$\beta_{42} = \beta_{25} - \frac{\beta_{23}}{E_1} E_2, \quad \beta_{43} = \beta_{26} - \frac{\beta_{23}}{E_1} F_2, \quad \beta_{44} = \beta_{28} - \frac{\beta_{35}}{E_1} F_1, \quad \beta_{45} = \beta_{36} - \frac{\beta_{35}}{E_1} E_2, \quad \beta_{46} = \beta_{30} - \frac{\beta_{35}}{E_1} F_2,$$

$$\beta_{47} = \beta_{39} + \frac{\beta_{38}}{\beta_{41}} \beta_{42}, \beta_{48} = \frac{\beta_{38}}{\beta_{41}} \beta_{43} - \beta_{40}, \beta_{49} = \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\beta_{41}} \beta_{42}, \beta_{50} = \beta_{46} - \frac{\beta_{44}}{\beta_{41}} \beta_{43},$$

$$\beta_{51} = \beta_{50} - \frac{\beta_{49}}{\beta_{47}} \beta_{48}, \beta_{52} = \frac{\beta_{49}}{\beta_{47}} \beta_{47} - \beta_{37},$$

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\beta_1}(\beta_2 \mathbf{B} + \beta_3), \mathbf{B} = \frac{1}{\beta_{31}}(C_5 + C_7 + \beta_{32}),$$

$$C_5 = -\frac{1}{E_1}(C_6 F_1 + C_7 E_2 + C_8 F_2), C_6 = -\frac{1}{\beta_{41}}(C_7 \beta_{42} + C_8 \beta_{43}), C_7 = -\frac{1}{\beta_{47}}(C_8 \beta_{48} + \beta_7), C_8 = -\frac{\beta_{52}}{\beta_{51}},$$

$${}^2H_1 = {}^2H_2 + {}^1\mathbf{B}_1, {}^2H_2 = \frac{-k_1\beta_{22} - \beta_{21}}{k_1\beta_9 + \beta_{16}}, C_1^* = \beta_9 {}^2H_2 + \beta_{22}, C_2^* = -(C_1^* + \beta_{17}).$$

Za slučaj kada je $a^2 - 4b < 0$, konstante su:

$$A = Ha_1^2, B = \frac{Gr_1}{Re_1} \sin \alpha + Re_1 P, C = Pr_1 Ec_1, D = Ha_1^2 Pr_1 Ec_1,$$

$$\lambda_1 = +\sqrt{A}, \lambda_1 = -\sqrt{A}, \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$H = A^2(C\lambda_1^2 + D), J = 2AB(C\lambda_1\lambda_2 + D), K^* = B^2(C\lambda_2^2 + D),$$

$$L = 2DA \frac{B}{A}, M = 2DB \frac{B}{A}, N = \frac{B^2}{A^2} D,$$

$$M_1 = -\frac{H}{4\lambda_1^2}, M_3 = -\frac{K^*}{4\lambda_2^2}, M_4 = -\frac{L}{\lambda_1^2}, M_5 = -\frac{M}{\lambda_2^2},$$

$$r_1^* = \frac{1}{2}(a + i\sqrt{4b - a^2}), r_2^* = \frac{1}{2}(a - i\sqrt{4b - a^2}), \alpha = \frac{1}{2}a, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}, R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{R} \cos \frac{\theta_1}{2}, \beta_1 = \sqrt{R} \sin \frac{\theta_1}{2}, \theta_1 = \arctg \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{B^*}{A} - D^* \right), \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{1}{EA},$$

$$\eta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \eta_4 = -\alpha_1 + i\beta_1,$$

$$\Omega_{41} = \alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9, \quad \Omega_{42} = \beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9, \quad \Omega_{43} = \beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11}, \quad \Omega_{44} = \alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11},$$

$$\Omega_{45} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[(1+K)(\Omega_{41}^2 + \Omega_{42}^2) + Ha^2 (C_9^2 + C_{10}^2) \right],$$

$$\Omega_{46} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[(1+K)(\Omega_{43}^2 + \Omega_{44}^2) + Ha^2 (C_{11}^2 + C_{12}^2) \right],$$

$$\Omega_{47} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{42}^2 - \Omega_{41}^2) + Ha^2 (C_9^2 - C_{10}^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{41}\Omega_{42} + Ha^2 C_9 C_{10} \right],$$

$$\Omega_{48} = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{44}^2 - \Omega_{43}^2) + Ha^2 (C_{12}^2 - C_{11}^2) \right] + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{43}\Omega_{44} - Ha^2 C_{11} C_{12} \right],$$

$$\Omega_{49} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{41}\Omega_{42} + Ha C_9 C_{10} \right] + \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{42}^2 - \Omega_{41}^2) + Ha^2 (C_9^2 - C_{10}^2) \right],$$

$$\Omega_{50} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)\Omega_{43}\Omega_{44} - Ha C_{11} C_{12} \right] + \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[(1+K)(\Omega_{43}^2 - \Omega_{44}^2) + Ha^2 (C_{11}^2 - C_{12}^2) \right],$$

$$\Omega_{51} = \frac{1}{2\beta_1} \left[(1+K)(\Omega_{41}\Omega_{43} - \Omega_{42}\Omega_{44}) + Ha^2 (C_9 C_{12} + C_{10} C_{11}) \right],$$

$$\Omega_{52} = \frac{1}{2\beta_1} \left[(1+K)(\Omega_{42}\Omega_{43} - \Omega_{41}\Omega_{44}) + Ha^2 (C_9 C_{11} - C_{10} C_{12}) \right],$$

$$\Omega_{53} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_9 \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - C_{10} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \Omega_{54} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_{11} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + C_{12} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\Omega_{55} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_9 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + C_{10} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad \Omega_{56} = 2 \frac{d}{b} Ha^2 \left(C_{11} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - C_{12} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right),$$

$$\Omega_{57} = (1+K)(\Omega_{42}\Omega_{43} - \Omega_{41}\Omega_{44}) + Ha^2 \left(C_9 C_{11} + C_{10} C_{12} + \frac{d^2}{b^2} \right), \quad \chi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad \chi_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2},$$

$$P = (\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 \alpha_1^2 + 3\mathfrak{T}_2 \beta_1^2) \alpha_1, \quad Q = (\mathfrak{T}_1 - 3\mathfrak{T}_2 \alpha_1^2 + \mathfrak{T}_2 \beta_1^2) \beta_1,$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \cos \beta_1 \exp \alpha_1, \quad Q_2 = \sin \beta_1 \exp \alpha_1, \quad Q_3 = \cos \beta_1 \exp(-\alpha_1), \quad Q_4 = \sin \beta_1 \exp(-\alpha_1), \\
Q_5 &= P_3 \alpha_1 + P_4 \beta_1, \quad Q_6 = P_4 \alpha_1 - P_3 \beta_1, \quad Q_7 = P_5 \alpha_1 + P_6 \beta_1, \quad Q_8 = P_5 \beta_1 - P_6 \alpha_1, \quad Q_9 = \frac{P}{Q} \frac{d}{b}, \quad Q_9^* = \frac{2P}{Q}, \\
Q_{10} &= Q_3 - Q_1, \quad Q_{11} = (1 - Q_1) \frac{d}{b}, \quad Q_{12} = Q_6 + Q_7, \quad Q_{13} = Q_6 \frac{d}{b}, \quad Q_{14} = Q_4 - Q_2, \quad Q_{14}^* = Q_2 Q_9^* + Q_{10}, \\
Q_{15} &= Q_{11} + Q_2 Q_9, \quad Q_{16} = Q_8 - Q_5, \quad Q_{16}^* = Q_5 Q_9^* - Q_{12}, \quad Q_{17} = Q_5 Q_9 - Q_{13}, \\
P_1 &= \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \alpha_1^2 + \mathfrak{I}_2 \beta_1^2, \quad P_2 = 2 \mathfrak{I}_2 \alpha_1 \beta_1, \quad P_3 = (P_1 \sin \beta_1 - P_2 \cos \beta_1) \exp(\alpha_1), \\
P_4 &= (P_2 \sin \beta_1 + P_1 \cos \beta_1) \exp(\alpha_1), \quad P_5 = (P_1 \cos \beta_1 - P_2 \sin \beta_1) \exp(-\alpha_1), \\
P_6 &= (P_1 \sin \beta_1 + P_2 \cos \beta_1) \exp(-\alpha_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3^* &= P_1(\alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9) + P_2(\beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9), \quad P_4^* = P_1(\beta_1 C_{10} + \alpha_1 C_9) - P_2(\alpha_1 C_{10} - \beta_1 C_9), \\
P_5^* &= -[P_1(\alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11}) + P_2(\beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11})], \quad P_6^* = P_1(\beta_1 C_{12} - \alpha_1 C_{11}) - P_2(\alpha_1 C_{12} + \beta_1 C_{11}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^3\mathfrak{B}_1 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{47} - \chi_2 \Omega_{49}) \cos(2\beta_1) + \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{47} + \chi_1 \Omega_{49}) \sin(2\beta_1) \right] \exp(-2\alpha_1) + \\
&+ \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\chi_1 \Omega_{48} + \chi_2 \Omega_{50}) \cos(2\beta_1) - \frac{1}{2} (\chi_2 \Omega_{48} - \chi_1 \Omega_{50}) \sin(2\beta_1) \right] \exp(2\alpha_1) + \\
&+ \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{51} \sin(2\beta_1) - \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} \cos(2\beta_1) + [(\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) \cos(\beta_1) - \\
&- (\Omega_{53} \chi_2 + \Omega_{55} \chi_1) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1) + [(\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2) \cos(\beta_1) + \\
&+ (\Omega_{54} \chi_2 + \Omega_{56} \chi_1) \sin(\beta_1)] \exp(\alpha_1) + \frac{1}{2} \Omega_{57}, \\
{}^3\mathfrak{B}_2 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{45} + \frac{1}{2} (\Omega_{47} \chi_1 - \Omega_{49} \chi_2) \right] + \left[\frac{1}{2\alpha_1} \Omega_{46} - \frac{1}{2} (\Omega_{48} \chi_1 + \Omega_{50} \chi_2) \right] - \\
&- \frac{1}{2\beta_1} \Omega_{52} + (\Omega_{53} \chi_1 - \Omega_{55} \chi_2) + (\Omega_{54} \chi_1 - \Omega_{56} \chi_2), \\
{}^3\mathfrak{B}_3 &= -k_2 \operatorname{Pr}_2 Ec_2 (\Omega_{45} - \Omega_{46} + \Omega_{47} + \Omega_{48} - \Omega_{51} + \Omega_{53} - \Omega_{54}),
\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \exp(\lambda_1), \gamma_2 = \exp(\lambda_2), \gamma_3 = \frac{B}{A},$$

$$\gamma_4 = M_1 \exp(2\lambda_1) + M_3 \exp(2\lambda_2) + M_4 \exp(\lambda_1) + M_5 \exp(\lambda_2) - \left(\frac{J+N}{2} \right),$$

$$\gamma_5 = \cos(\beta_1) \exp(-\alpha_1), \gamma_6 = \sin(\beta_1) \exp(-\alpha_1), \gamma_7 = \cos(\beta_1) \exp(\alpha_1), \gamma_8 = \sin(\beta_1) \exp(\alpha_1),$$

$$\gamma_9 = \frac{d}{b}, \gamma_{10} = \sin(\beta_1) \exp(-\alpha_1), \gamma_{11} = \cos(\beta_1) \exp(-\alpha_1), \gamma_{12} = \sin(\beta_1) \exp(\alpha_1),$$

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \cos(\beta_1) \exp(\alpha_1), \gamma_{14} = M_1 + M_3 + M_4 + M_5, \gamma_{15} = \text{Pr}_2 \text{Ec}_2, \gamma_{16} = \mu_1 \lambda_1, \gamma_{17} = \mu_1 \lambda_2, \\ \gamma_{18} &= k_1 [2\lambda_1 M_1 + 2M_3 \lambda_2 + M_4 \lambda_1 + M_5 \lambda_2], \gamma_{19} = k_2 \text{Pr}_2 \text{Ec}_2, \gamma_{20} = \gamma_4 - 1, \gamma_{21} = \gamma_3 - \gamma_9, \gamma_{22} = \gamma_{14} - {}^3\text{B}_2, \\ \gamma_{23} &= \gamma_{18} - {}^3\text{B}_3, \gamma_{24} = \beta_1 \gamma_{10} P_1 - \alpha_1 \gamma_{10} P_2 + \alpha_1 \gamma_{11} P_1 + \beta_1 \gamma_{11} P_2, \gamma_{25} = -\alpha_1 \gamma_{10} P_1 - \beta_1 \gamma_{10} P_2 + \beta_1 \gamma_{11} P_1 - \alpha_1 \gamma_{11} P_2, \\ \gamma_{26} &= \beta_1 \gamma_{12} P_1 + \alpha_1 \gamma_{12} P_2 - \alpha_1 \gamma_{13} P_1 - \beta_1 \gamma_{12} P_2, \gamma_{27} = \alpha_1 \gamma_{12} P_1 - \beta_1 \gamma_{12} P_2 + \beta_1 \gamma_{13} P_1 - \alpha_1 \gamma_{13} P_2, \\ \gamma_{28} &= \alpha_1 (\mu_2 + \lambda) + \lambda (\alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2), \gamma_{29} = \beta_1 (\mu_2 + \lambda) + \lambda (\beta_1 P_1 - \alpha_1 P_2), \\ \gamma_{30} &= -\alpha_1 (\mu_2 + \lambda) - \lambda (\alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2), \gamma_{31} = \beta_1 (\mu_2 + \lambda) + \lambda (\beta_1 P_1 - \alpha_1 P_2), \gamma_{32} = \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2, \end{aligned}$$

$$\gamma_{33} = \beta_1 P_1 - \alpha_1 P_2, \gamma_{34} = \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_2, \gamma_{35} = \beta_1 P_1 - \alpha_1 P_2, \gamma_{36} = {}^3\text{B}_1 \gamma_{19} + \gamma_{23}, \gamma_{37} = \gamma_{22} - \gamma_{20}, \gamma_{38} = 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

$$\gamma_{39} = \gamma_{21} - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \gamma_{40} = \gamma_{17} - \frac{\gamma_{16}}{\gamma_1} \gamma_2, \gamma_{41} = \frac{\gamma_{16}}{\gamma_1} \gamma_3, \gamma_{42} = \gamma_{28} - \frac{\gamma_{40}}{\gamma_{38}}, \gamma_{43} = \gamma_{30} - \frac{\gamma_{40}}{\gamma_{38}}, \gamma_{44} = \gamma_{41} + \frac{\gamma_{40}}{\gamma_{38}} \gamma_{39},$$

$$\gamma_{45} = \gamma_6 + \frac{\gamma_5}{\gamma_{32}} \gamma_{33}, \gamma_{46} = \gamma_7 - \frac{\gamma_5}{\gamma_{32}} \gamma_{34}, \gamma_{47} = \gamma_8 + \frac{\gamma_5}{\gamma_{32}} \gamma_{35}, \gamma_{48} = \gamma_{25} - \frac{\gamma_{24}}{\gamma_{32}} \gamma_{33}, \gamma_{49} = \gamma_{26} + \frac{\gamma_{24}}{\gamma_{32}} \gamma_{34},$$

$$\gamma_{50} = \gamma_{27} - \frac{\gamma_{24}}{\gamma_{32}} \gamma_{35}, \gamma_{51} = \gamma_{29} - \frac{\gamma_{42}}{\gamma_{32}} \gamma_{33}, \gamma_{52} = \gamma_{43} + \frac{\gamma_{42}}{\gamma_{32}} \gamma_{34}, \gamma_{53} = \gamma_{31} - \frac{\gamma_{42}}{\gamma_{32}} \gamma_{35}, \gamma_{54} = \gamma_{46} + \frac{\gamma_{45}}{\gamma_{48}} \gamma_{49},$$

$$\gamma_{55} = \frac{\gamma_{45}}{\gamma_{48}} \gamma_{50} - \gamma_{47}, \gamma_{56} = \gamma_{52} - \frac{\gamma_{51}}{\gamma_{48}} \gamma_{49}, \gamma_{57} = \gamma_{53} - \frac{\gamma_{51}}{\gamma_{48}} \gamma_{50}, \gamma_{58} = \gamma_{57} - \frac{\gamma_{56}}{\gamma_{54}} \gamma_{55}, \gamma_{59} = \frac{\gamma_{56}}{\gamma_{54}} \gamma_9 - \gamma_{44},$$

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\gamma_1} (\gamma_2 \mathbf{B} + \gamma_3), \mathbf{B} = \frac{1}{\gamma_{38}} (C_9 + C_{11} - \gamma_{39}),$$

$$C_9 = -\frac{1}{\gamma_{32}} (C_{10} \gamma_{33} - C_{11} \gamma_{34} + C_{12} \gamma_{35}), C_{10} = -\frac{1}{\gamma_{48}} (C_{11} \gamma_{49} + C_{12} \gamma_{50}), C_{11} = -\frac{1}{\gamma_{54}} (C_{12} \gamma_{55} + \gamma_9),$$

$$C_{12} = \frac{\gamma_{59}}{\gamma_{58}},$$

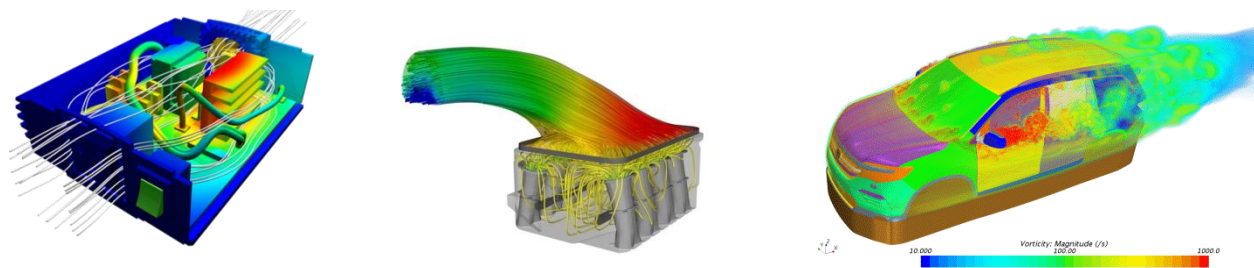
$${}^3H_1 = {}^3H_2 + {}^3\text{B}_1, {}^3H_2 = \frac{-k_1 \gamma_{37} - \gamma_{36}}{k_1 \gamma_{15} + \gamma_{19}}, C_1^* = {}^3H_2 \gamma_{15} + \gamma_{37}, C_2^* = -(C_1^* + \gamma_{20}).$$

- IX poglavlje -

9. MHD i softveri za numeričke simulacije

9.1. Softveri za numeričke simulacije

Razvoj računara i IT tehnologija, a zatim i softvera za numeričke simulacije, omogućio je još jedno novo polje analize strujanja i prenosa toplote fluida. Računarska dinamika fluida (Computational fluid dynamics - CFD) je numerička analiza problema strujanja fluida, prenosa toplote i određivanja svih parametara fluida u strujnom polju. Paralelno sa ekspanzijom računara, CFD je prihvaćen kao važan alat za obavljanje fundamentalnih istraživanja i proračun strujanja interesantnih za praksu. CFD solveri sadrže složeni skup algoritama koji se koriste za modeliranje i simuliranje strujanja tečnosti i gasova, analizu prenosa toplote i svih drugih veličina koje se modeliraju kod analiziranog problema. Mnogi tehnološki napredci u oblasti vazduhoplovstva, automobilske industrije i u astronautici ne bi bili mogući bez CFD -a. Primene CFD-a prilikom izučavanja aeroprofila u vazduhoplovstvu, zatim analize zaustavnog traga automobila ili traga kočenja, analize strujanja i termičkih procesa prilikom dizajna mlaznih motora, kao i hlađenja elektronskih komponenti strujanjem vazduha, samo su neki od praktičnih problema kod kojih su se numeričke simulacije pokazale jako korisnim [98].



Slika 9.1 Primeri CFD simulacija preuzeti sa interneta

Značajno ulaganje i favorizacija CFD tehnologija je opravdana i činjenicom da sveobuhvatno eksperimentalno istraživanje sa kompleksnim modelima rezultuje visokom cenom i velikim utroškom vremena. Zato se CFD koristi u skoro svim industrijskim sektorima: pri preradi hrane, prečišćavanju vode, brodogradnji, u automobilske industriji, aerodinamici ili pri dizajnu parnih, gasnih i hidrauličnih turbina. Uz pomoć CFD softvera, problemi strujanja fluida se analiziraju brže nego pri eksperimentalnom istraživanju i to značajno detaljnije i u ranijoj fazi procesa projektovanja, što donosi značajnu uštedu novčanih sredstava i manje rizika prilikom projektovanja i odluke o dizajnu finalnog proizvoda.

Osnova CFD-a izgrađena je na Navier-Stokesovim jednačinama i modelima turbulentnog strujanja, tj. skupu parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju strujanje fluida. Uz pomoć CFD-a, područje analize je podeljeno na veliki broj ćelija ili kontrolnih zapremina. U svakoj od ovih ćelija, Navier-Stokesove parcijalne diferencijalne jednačine mogu se zapisati kao algebarske jednačine koje povezuju brzinu, temperaturu, pritisak i druge promenljive, sa vrednostima u susednim ćelijama. Ove jednačine se tada rešavaju numerički, dajući potpunu sliku strujanja čija je tačnost zavisna od "finoće" mreže, tj. zavisna od broja ćelija. Dobijeni set jednačina se zatim može rešiti iterativno, dajući kompletanu sliku strujanja u čitavom domenu.

Ove tehnike datiraju još od ranih sedamdesetih godina, a prvi komercijalni CFD softver postao je dostupan početkom osamdesetih. Od tada CFD prelazi dug put, pa sada ima vrlo malo geometrijski složenih problema koji ne mogu biti precizno predstavljeni. U međuvremenu razvijeni su modeli za fizičke fenomene kao što su turbulencija, višefazno strujanje, razne hemijske reakcije kao i prenos toplote, a upotrebljivost softvera se značajno povećala porastom računarskih kapaciteta.

Rešavanjem osnovnih jednačina koje matematički opisuju procese strujanja fluida, CFD pruža informacije o važnim karakteristikama strujanja, kao što su pad pritiska, profil brzine ili temperature. Može se reći da CFD analiza dopunjuje tradicionalno testiranje i eksperimentalno istraživanje, pružajući dodatni uvid i poverenje u razvijene projekte. Ovo rezultira boljim dizajnom proizvoda, kao i manjim rizikom i kraćim vremenom za dolazak do finalnog proizvoda ili procesa.

Stoga je CFD postao integralni deo inženjerskog i naučnog poziva, pre svega zbog svoje sposobnosti da predvidi performanse novih proizvoda ili procesa pre nego što se oni razviju i proizvedu ili implementiraju. Upotreba CFD softvera može dovesti do manje iteracija do finalnog proizvoda, kraćih vremena provedenog i manje skupih prototipova za proizvodnju. CFD takođe ohrabruje inovacije pri projektovanju novih proizvoda, jer predstavlja "jeftino" sredstvo za testiranje novih proizvoda, koji bi inače bili isuviše skupi, zahtevni ili čak rizični za istraživanje, ako bi se njihovi prototipovi eksperimentalno proveravali.

Do nedavno su korisnici CFD softvera bili samo stručnjaci, koji su na ovim problemima radili u okviru doktorskih studija, radeći u istraživačkim i razvojnim centrima. Kako je ova tehnologija sve dostupnija kako u industriji, tako i na univerzitetima ona se sve više koristi za ispitivanje mnogih aspekata strujanja fluida. Ovo povećanje broja korisnika CFD softvera je posledica velikog broja komercijalnih paketa na tržištu kao što su ANSYS, Open FOAM, Fluent, Phoenix, STAR CD itd.

9.2. ANSYS softverski paket

Jedan od najčešće korišćenih softverskih paketa za CFD simulacije, a verovatno i najbolji, jeste ANSYS [99]. Kao deo ovog softverskog paketa koristiće se najpre ICEM-CFD, za formiranje geometrije i mreže strujnog prostora, zatim iz ANSYS-ovog softverskog paketa CFX-Pre, gde se obavljaju sva pre-procesorska opisivanja problema strujanja i prenosa toplote problema, nakon toga CFX-Solver, koji se koristi za rešavanje jednačina, i na kraju CFX-Post ili post-procesorski deo softverskog paketa gde se vrši analiza i prikaz dobijenih rezultata.

Prilikom rešavanja osnovnih jednačina koje opisuju strujanje fluida, postoji više različitih metoda koje se danas koriste u CFD kodovima. Kod ANSYS-ovog CFX-Solver-a u primeni je najčešći metod - metod konačnih zapremina. Ovom metodom, domen u kome se razmatra strujanje deli se u male podregione, koji se nazivaju kontrolnim zapreminama. Jednačine se diskretizuju i rešavaju iterativno za svaku kontrolnu zapreminu. Kao rezultat, aproksimativna vrednost svake promenljive, može se odrediti u proizvoljnoj kontrolnoj zapremini domena koji se razmatra. Na ovaj način dobija se potpuna strujna slika razmatranog problema strujanja fluida.

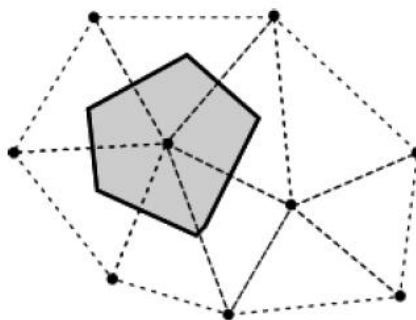
Sam proces modeliranja i analize strujanja mikropolarnog fluida u ANSYS-ovom softverskom paketu, a na osnovu napred navedenih delova tog paketa, može se predstaviti u četiri osnovne faze:

- prva faza - definisanje geometrije i mreže za razmatrani problem,
- druga faza - definisanje osnovnih karakteristika mikropolarnog fluida, te graničnih i početnih uslova razmatranog problema,
- treća faza - rešavanje jednačina problema,
- četvrta faza - obrada i analiza dobijenih rezultata.

Ako se osvrnemo na prvu fazu modeliranja, tj. na definisanje geometrije i mreže, ona se podjednako dobro, a u nekim slučajevima složenijih geometrija čak i bolje, može obaviti u nekim od mnogobrojnih dostupnih CAD paketa za formiranje 3D modela. Sama geometrija i "finoća" mreže uslovljavaju neophodno vreme za dobijanje rezultata i njihov kvalitet. Kako svaka ćelija ili kontrolna zapremina predstavlja strujni prostor u kome se Navier-Stokesove parcijalne diferencijalne jednačine prevode u algebarske jednačine koje povezuju brzinu, temperaturu, pritisak i druge promenljive a zatim rešavaju, lako je zaključiti da što je veći broj tih kontrolnih zapremina, to kvalitet slike o posmatranom problemu strujanja raste.

Naravno, ove algebarske jednačine se zatim rešavaju iterativno. Iterativni postupak pri rešavanju jednačina je neophodan zbog nelinearne prirode jednačina, pa je zato neophodno zadovoljiti određene zadate uslove konvergencije rešenja. Koliko je tačno dobijeno rešenje zavisi od niza faktora uključujući veličinu i oblik kontrolnih zapremina kao i dozvoljene greške tj. njenog srednjeg kvadratnog odstupanja.

Što se tiče CFX Solvera, kao što smo i napred pomenuli, on koristi metod konačnih zapremina prilikom rešavanja jednačina i to čvorno centrirani metod (preciznije metod dvostrukog osrednjavanja) [100]. Kod ovog metoda kontrolna zapremina se formira kombinovanjem više manjih zapremina oko čvorova mreže, gde je čvor mreže sredina te kontrolne zapremine (siva površina na slici 9.2), a vrednost svake promenljive veličine koja se određuje vezuje se za čvor.



Slika 9.2 Čvorno centrirani metod

Kod dvodimenzionih slučajeva mreža se uglavnom sastoji od pravougaonih ili trouglastih elemenata, dok kod trodimenzione mreže elementi mogu biti oblika: heksaedara, pentaedra ili tetraedra.

Uslov dobijanja rešenja analiziranog problema jesu i odgovarajući početni i granični uslovi koje definišemo u CFX-Pre delu softvera. Pri postavljanju graničnih uslova uobičajena procedura je postavljanje vrednosti totalnog pritiska na ulazu i masenog protoka na izlazu iz domena, ali se za dobijanje inicijalnih vrednosti obično koristi suprotna simulacija gde se na ulazu postavlja vrednost masenog protoka dok se na izlazu postavlja neka vrednost statičkog pritiska koja je najčešće nula ili neka vrednost oko nule, kako bi se smanjila greška zaokruživanja.

Pored definisanja početnih i graničnih uslova, u CFX-Pre se definišu i fizičke karakteristike fluida. Ovo je jako bitno jer u već postojećoj bazi fluida koji se nalaze u ANSYS-u mikropolarni fluid ne postoji, te je bilo neophodno definisati ovakav fluid i njegove karakteristike, poput dopunskih viskoznosti.

U daljem radu razmatraće se strujanje mikropolarnog fluida korišćenjem ANSYS CFX softvera, a dobijeni rezultati biće poređeni sa analitičkim rešenjem.

9.3. ANSYS CFX - razmatranje problema strujanja mikropolarnog fluida u kanalu

Problem MHD strujanja elektroprovodnog mikropolarnog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja kao model u ANSYS-ovom softveru nije razvijen, te je neophodno prilikom formiranja ovog modela izvršiti adekvatnu analizu valjanosti samog modela.

Mogućnost poređenja rezultata, tj. validacije rešenja, je jedan od najvažnijih koraka definisanja i implementiranja novog modela u okviru postojećeg softvera. Validacijom se dokazuje pouzdanost implementiranog modela i otklanjaju moguće greške.

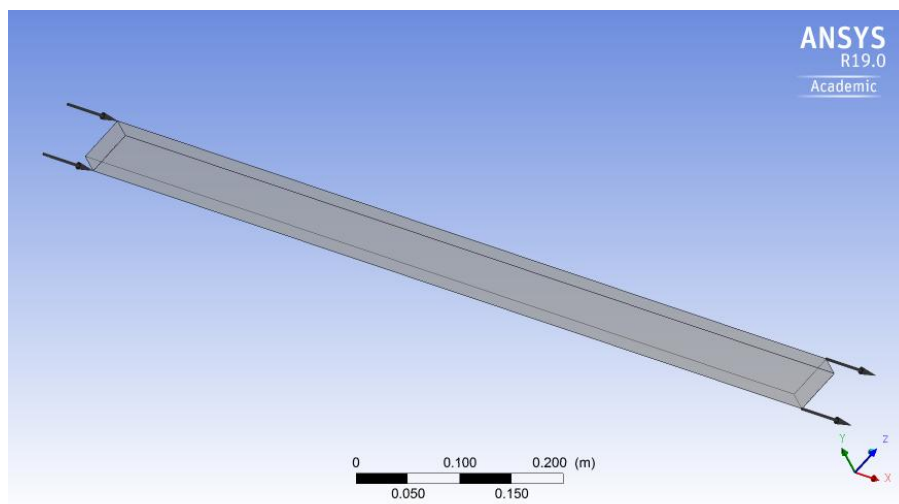
Za validaciju razvijenog modela MHD strujanja mikropolarnog fluida u ANSYS-u, koristi se analitički model MHD strujanja mikropolarnog fluida između paralelnih ploča, koji je dat u trećem poglavlju ove disertacije.

Prilikom analize strujanja mikropolarnog fluida u kanalu korišćenjem ANSYS-ovog softverskog paketa, prvi izazov bio je da se definiše mikropolarni fluid jer u bazi dostupnih fluida mikropolarni fluid ne postoji. Kako je već ranije definisan mikropolarni fluid kao fluid sa mikrostrukturom koji sadrži nasumično orjentisane (uglavnom sferične) deliće rastvorene u viskoznoj tečnosti, pri čemu se ignoriše deformacija tih delića, a polazna ideja je bila da mikropolarni fluid u ANSYS-u posmatramo kao strujanje čvrstih delića u viskoznoj tečnosti, preko opcije koju ovaj softver nudi a zove se "*particle transport solid*". Ovo je omogućilo da definisanjem dodatnih delića, definišemo i dopunsku viskoznost koja karakteriše strujanje mikropolarnih fluida λ .

Sledeći korak bio je definisanje geometrijskog modela i mreže [101]. Model kanala je dimenzija 1000 mm x 20 mm x 50 mm u x, y i z pravcima osa, respektivno, a dat je na slici 9.3.

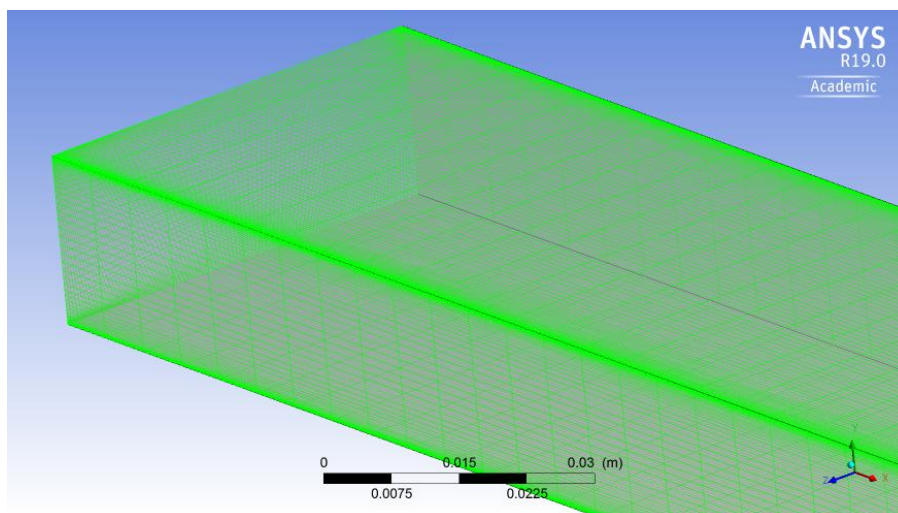
Kod definisanja modela bitno je naglasiti da se radi o laminarnom strujanju, te da je strujanje mikropolarnog fluida posledica konstantnog pada pritiska duž ose strujanja, x - ose. Shodno tome granični uslovi na ulazu i izlazu strujnog domena definisani su preko protoka na ulazu i konstantnog pritiska na izlazu strujanog domena. Ono što je takođe bilo bitno prilikom definisanja graničnih vrednosti na ulazu, bilo je definisanje masenog protoka elementarnih čestica, kao i njihovog broja i veličine. Što se tiče ostalih graničnih uslova na gornjoj i donjoj

ploči nema klizanja tj. brzina je jednaka nuli, dok su na zidovima upravnim na osu z tzv. simetrični granični uslovi tj. problem se razmatra kao ravanski.



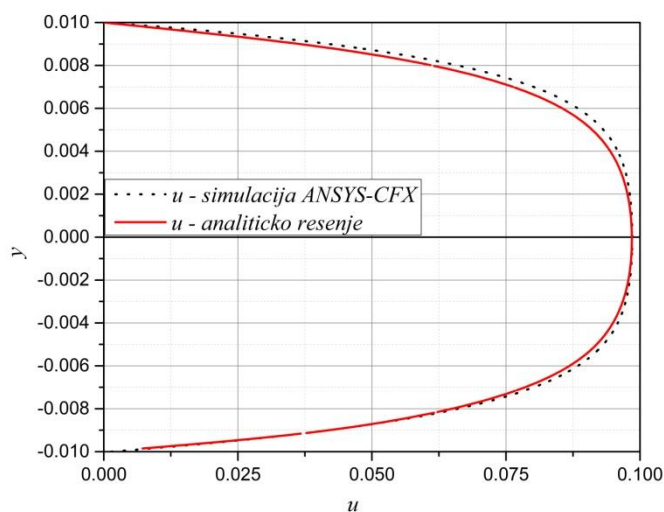
Slika 9.3 Model kanala iz ICEM-CFD

Što se tiče definisanja mreže, jako je bitno odrediti dovoljnu gustinu mreže koja pokazuje slaganje sa laminarnim profilom brzine pri strujanju fluida između paralelnih ploča. Ovaj zadatak se naziva "mesh independance test" tj. test nezavisnosti rezultata od povećanja gustine mreže. Pored toga, jako je bitno voditi računa pri formiranju strujnog domena, a i mreže, da domen u pravcu strujanja bude bar 10 puta veći od poprečne koordinate (rastojanja između paralelnih ploča). Uzimajući napred navedene kriterijume, kao i uslove strujanja, formira se mreža koja u x pravcu, ili pravcu strujanja, na dužini od 1000 mm ima unifromno raspoređenih 150 čvorova. Što se tiče pravca y , na 20 mm dužine raspoređeno je 60 čvorova, ali sa početnom visinom kontrolne zapremine od 0.01 mm između prva dva čvora pri čemu rastojanje između svaka naredna dva čvora raste geometrijskom progresijom od 1.1 do sredine kanala, tj. tzv. bigeometrijska progresija. Poput y pravca i u z pravcu na dužini od 50 mm raspoređeno je 100 čvorova bigeometrijskom progresijom sa korakom 1.15, pri čemu je visina kontrolne zapremine između prva dva čvora iznosi 0.05 mm. Ovako formirana mreža daje 900 000 ćelija ili kontrolnih zapremina i data je na slici 9.4.



Slika 9.4 Model mreže u ICEM-CFD

Provera mreže izvršena je poređenjem rezultata za laminarno MHD strujanje viskoznog fluida u formiranom strujnom kanalu, sa analitičkim rešenjem za MHD strujanje fluida između paralelnih ploča. Ti rezultati dati su na slici 9.5.



Slika 9.5 Poređenje analitičkog i numeričkog rešenja za laminarno strujanje

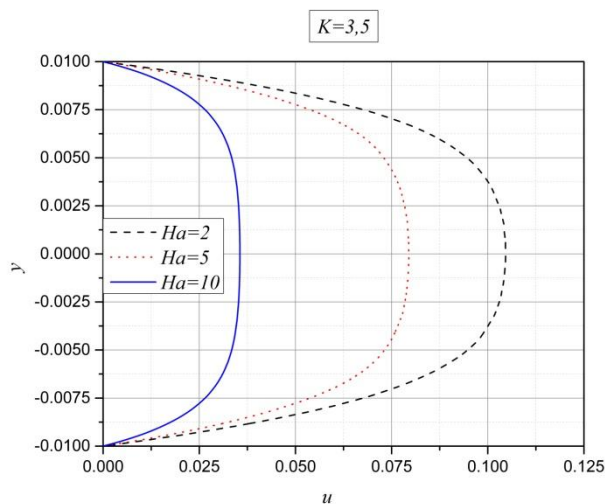
Očigledno je da iz dobijenih rezultata formirana mreža dosta dobro konvergira rešenju, te će ovako definisana mreža biti korišćena pri analizi strujanja mikropolarnog fluida.

Nakon definisane geometrije i mreže, te unapred određenih graničnih uslova i odgovarajućih karakteristika i modela za mikropolarni fluid, pristupa se simulacijama i analizi dobijenih rešenja. Prilikom vršenja simulacija dozvoljena greška tj. RMS (srednje kvadratno odstupanje) veličina definisano je na manje od 10^{-5} , a broj iteracija određivan kako bi se ispunili zadati uslovi.

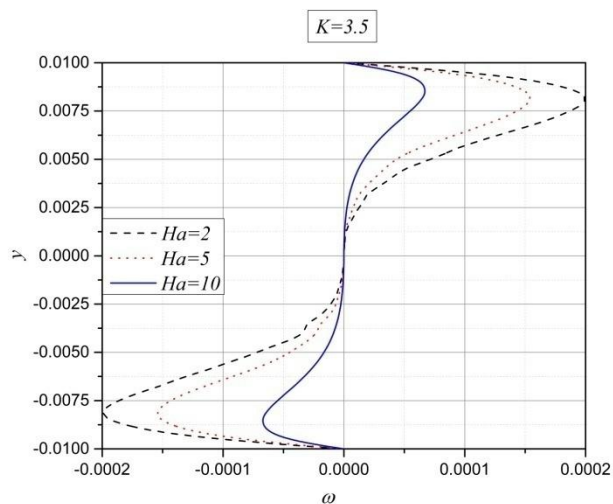
Analiza dobijenih rezultata simulacije izvršena je preko uticaja Hartmannovog broja Ha , tj. uticaja spoljašnjeg magnetnog polja, zatim uticaja spoljašnjeg električnog polja ili faktora opterećenja Q i na kraju uticaja dopunske viskoznosti mikropolaranog fluida λ , odnosno uticaja faktora sprezanja K . Analiza datih karakterističnih parametara izvršena je na profilu brzine i mikrorotacije mikropolaranog fluida i data na sledećim graficima.

Prva dva grafika, grafik 9.6 i 9.7, predstavljaju uticaj Hartmannovog broja na polje brzine i mikrorotacije.

Sa datih grafika jasno se uočava da tendencija promene brzine i mikrorotacije sa porastom Hartmannovog broja, odgovara rezultatima dobijenim pri analitičkom rešavanju i analizi strujanja mikropolaranog fluida između dve ploče. Tendencija promene brzine i mikrorotacije je takva da porast Hartmannovog broja dovodi do smanjenja i poravnanja polja brzine i mikrorotacije po celoj visini kanala. Uz to, još jednom se dolazi do zaključka da povećanje intenziteta magnetnog polja dovodi do smanjenja karakteristika mikropolarnih fluida.

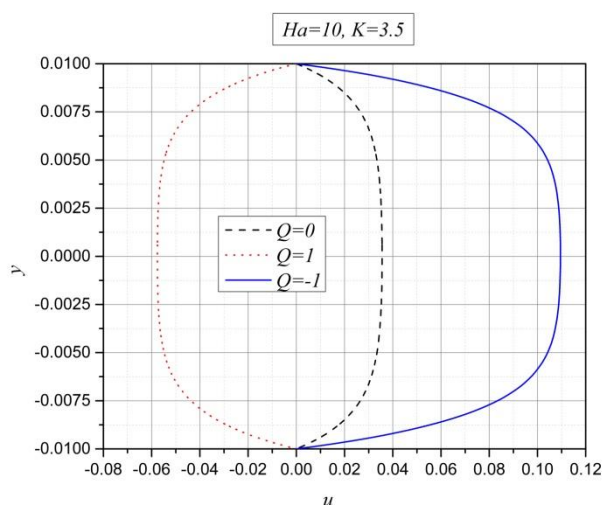


9.6 Uticaj Hartmannovog broja Ha na profil brzine

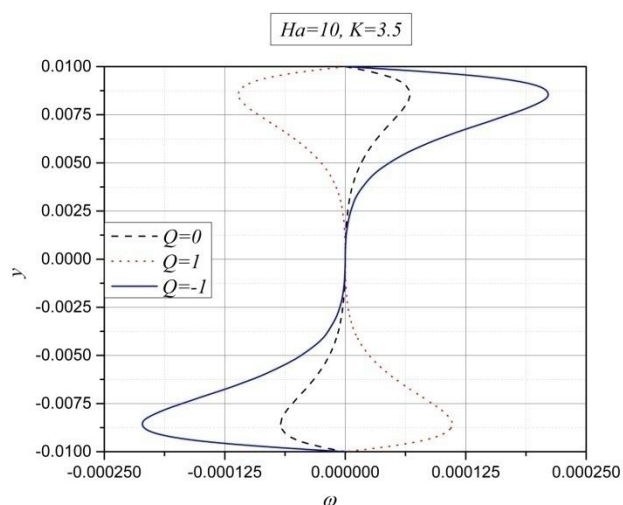


9.7 Uticaj Hartmannovog broja Ha na mikrorotaciju

Naredna dva grafika, 9.8 i 9.9, predstavljaju uticaj spoljašnjeg električnog polja, preko faktora opterećenja Q , na brzinu i mikrorotaciju. Kao i kod napred izvršene analitičke analize uticaja faktora opterećenja Q i sada će se analizirati tri slučaja, tj. promena brzine i mikrorotacije za vrednosti faktora opterećenja $-1, 0$ i 1 . Već je ranije objašnjeno da za vrednost $Q = -1$ sistem radi kao merač protoka, dok za vrednost $Q > 1$ sistem se ponaša kao pumpa. Pri vrednosti faktora opterećenja $Q = 0$ ne postoji uticaj električnog polja, a bitno je napomeuti da je tokom analize uticaja spoljašnjeg električnog polja intenzitet spoljašnjeg magnetnog polja bio konstantan, tj. vrednost Hartmannovog broja iznosila je $Ha = 10$.



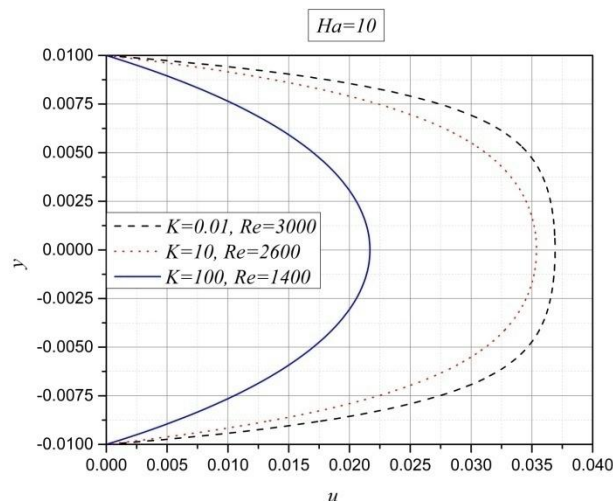
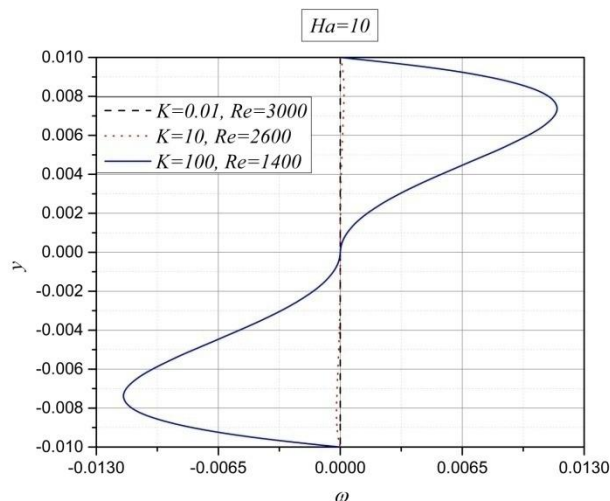
9.8 Uticaj faktora opterećenja Q na profil brzine



9.9 Uticaj faktora opterećenja Q na mikrorotaciju

Sa grafika 9.8 pri vrednosti $Q = 1$ imamo promenu smera strujanja fluida, dok za vrednost $Q > -1$ dolazi do povećanja intenziteta brzine u odnosu na laminarno strujanje. Na grafiku 9.9, vidi se da je uticaj faktora opterećenja Q na mikrorotaciju isti kao i na profil brzine. Ovako dobijeni rezultati aspotlutno odgovaraju analizi strujanja mikropolaranog fluida između ploča, što je urađeno u jednom od prethodnih analitičkih modela.

Na kraju, na poslednja dva grafika 9.10 i 9.11, videćemo uticaj dopunske viskoznosti λ , tj. faktora sprežanja K , na polje brzine i mikrorotacije mikropolaranog fluida.

9.10 Uticaj faktora sprezanja K na profil brzine9.11 Uticaj faktora sprezanja K na mikrorotaciju

Na grafiku 9.10 dat je uticaj parametra sprezanja K na polje brzine. Sa grafika se može uočiti da povećanje parametra sprezanja K dovodi do smanjenja brzine fluida. Sa druge strane sa grafika 9.11 se vidi da povećanje parametra sprezanja K dovodi do povećanja intenziteta mikrorotacije, što je i očekivano jer je povećanje faktora sprezanja K posledica povećanja dopunske viskoznosti λ koja je jedna od karakteristika mikropolarnog fluida, kao što je i vektor mikrorotacije.

Poput prethodna četiri grafika, tako i poslednja dva daju potpuno iste tendencije u promeni brzine i mikrorotacije sa promenom faktora sprezanja K kao i kod analitički razmatranog modela strujanja mikropolarnog fluida između ploča.

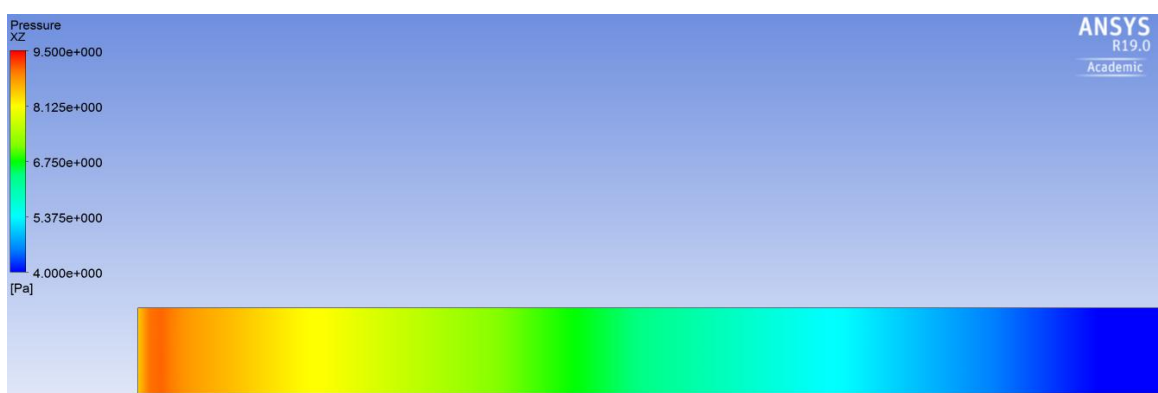
Ovako izvršena analiza i poređenje rezultata daje potvrdu da je formirani numerički model u softverskom paketu ANSYS, za strujanje mikropolarnog fluida, dobar, te da se kao takav može koristiti u daljoj analizi mikropolarnih fluida.

Osnovna prednost savremenih softvera jeste brzina obrade podataka i rešavanja problema, kao i tačnost dobijenih rezultata. Međutim, ne treba nikako podceniti još jednu prednost koju nam pružaju savremeni softveri za analizu strujanja i prenosa toplote, a to je kvalitetna obrada i vizuelizacija rezultata. Mogućnost prikazivanja dobijenih rezultata u boji pruža velike prednosti, poput velikog broja podataka prikazanih različitim bojama u zavisnosti

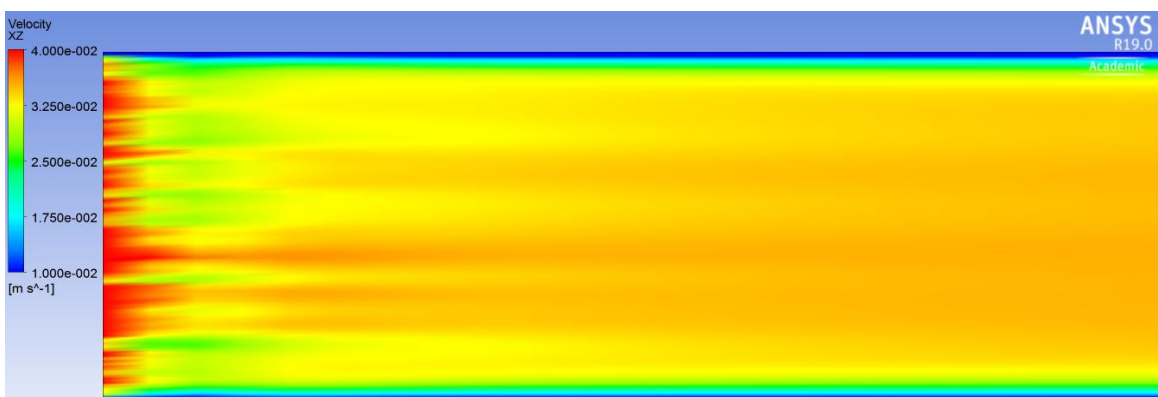
od inteziteta veličine koja se prikazuje što daje veoma dobar uvid u strujno-termičke procese koji se odvijaju u posmatranom sistemu.

Narednih par slika poslužiće da predstavje dobijene rezultate prilikom analize MHD strujanja mikropolarnog fluida u horizontalnom kanalu, ali takođe i da potvrde prednost korišćenja numeričkih softvera za analizu strujanja i prenosa toplote.

Na prve dve slike 9.12 i 9.13, predstavljena je promena pritiska duž pravca strujanja, kao i polje brzine u početnom delu kanala.

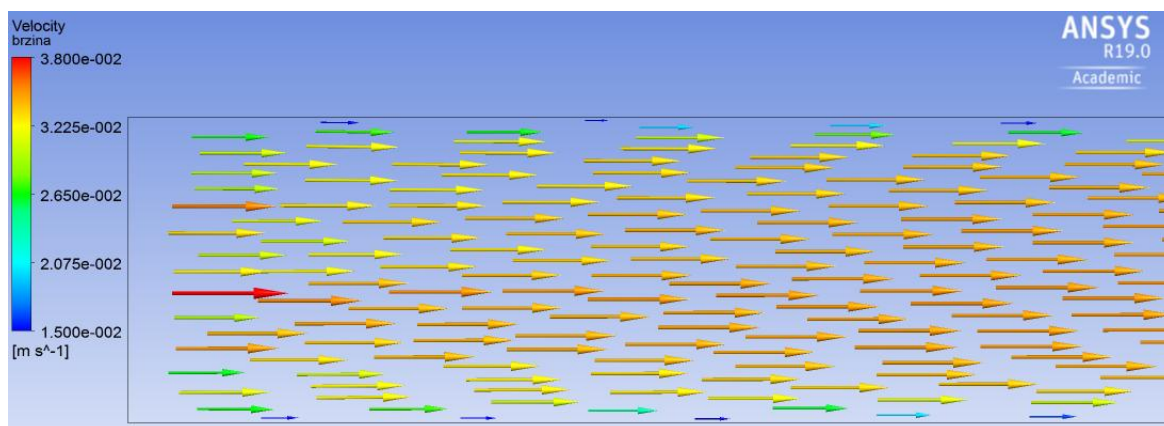


9.12 Promena pritiska duž pravca strujanja



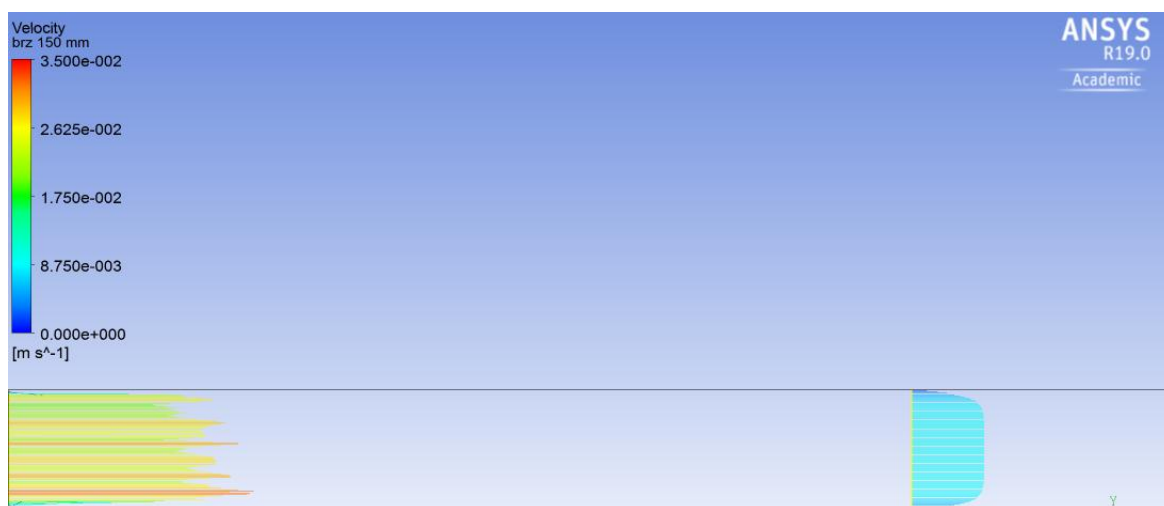
9.13 Polje brzine na početku kanala

Pored predavljanja rezultata putem palete boja, moguće je to uraditi takođe i uz pomoć vektorskog prikaza. Na narednoj slici 9.14 predavljen je vektor brzine u vidu 3D strelica.



9.14 Vektor brzine

Analiza uticaja magnetnog polja na brzinu strujanja u kanalu, najbolje se može videti na narednoj slici 9.15, gde su paralelno predstavljeni profil brzine na samom ulazu u kanal i profil brzine posle dejstva magnetnog polja.

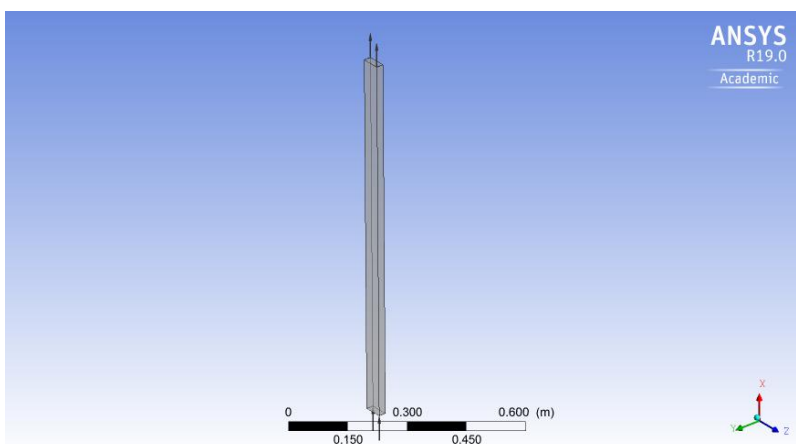


9.15 Uticaj magnetnog polja na profil brzine

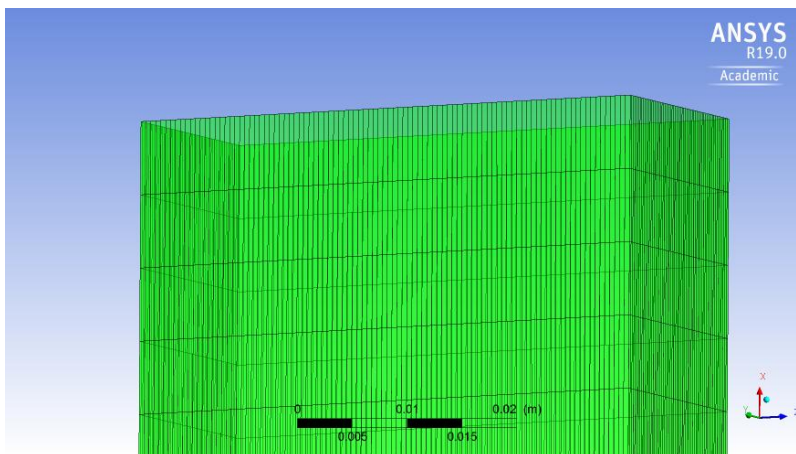
9.4. ANSYS CFX - model strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu

Kako je prethodni analizirani model u ANSYS-ovom CFX-u, MHD strujanje mikropolarnog fluida u horizontalnom kanalu, dao rezultate kod kojih uticaj karakterističnih parametara ima istu tendenciju kao i kod analitičkog modela ravanskog MHD strujanja mikropolarnog fluida između dve ploče, možemo smatrati da razvijeni model dosta dobro simulira ponašanje ovih fluida, te da takav model možemo primeniti kako bi opisali neke druge tipove (modele) strujanja mikropolarnog fluida. Jedan od modela koji nije analitički razmatran je problem MHD strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu.

Prilikom formiranja modela MHD strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu, geometrija kanala i mreža biće identične kao kod problema razmatranog u prethodnom poglavlju. Kanal će imati dužinu od 1000 mm u vertikalnom pravcu, koji predstavlja i pravac strujanja, dok će u upravnim pravcima u odnosu na pravac strujanja imati dimezije 20 mm x 50 mm (slika 9.16). Što se tiče same mreže, ona će imati 150 uniformo raspoređenih čvorova u pravcu straujanja, dok će u ostala dva pravca imati 60, odnosno 100, čvorova raspoređenih po bigeometrijskoj progresiji, potpuno identično kao na prethondom modelu (slika 9.17).



Slika 9.16 Model vertikalnog kanala u ICEM-CFD



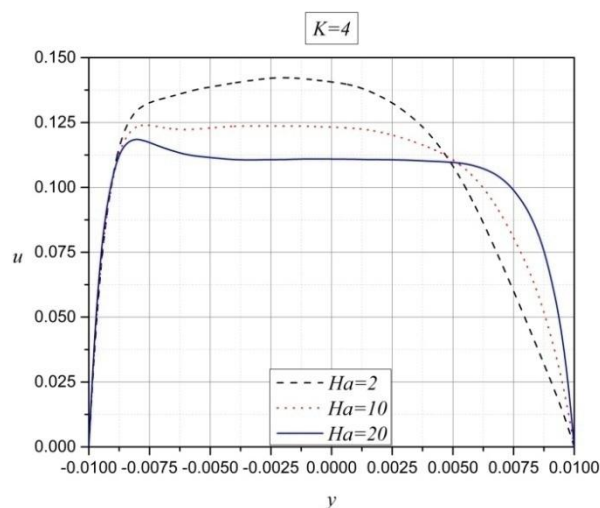
Slika 9.17 Model mreže kod vertikalnog kanala u ICEM-CFD

Prilikom definisanja ulaznih podataka za strujanje mikropolaranog fluida, kod primera vertikalnog kanala definisana je brzina fluida na ulazu, kao i odnos masenog protoka osnovne struje fluida i suspendovanih čestica. Treba takođe naglasiti da se kod ovog problema strujanja prilikom analiziranja karakteristika mikropolaranog fluida koristi kao osnova model "dispersed fluid", a koji se pokazao kao bolji za dopunsko definisanje sile potiska kod strujanja u vertikalnom kanalu. Kako se razmatra strujanje mikropolaranog fluida u vertikalnom kanalu, prilikom definisanja modela bilo je neophodno definisati "buoyant" efekat. Takođe kod ovog modela postoji izražena razlika između temperatura bočnih zidova kanala, usled čega se javlja uzgonska sila.

Ovako definisan model analiziran je kroz uticaj Hartmannovog broja i dopunske viskoznosti mikropolaranog fluida, odnosno parametar sprežanja K , kao i uticaj promene pravca strujanja u kanalu. Prilikom analiziranja uticaja Hartmannovog broja i parametra sprežanja K , strujanje se obavlja naviše u kanalu, tako da u suprotnom smeru imamo dejstvo sile zemljine težine.

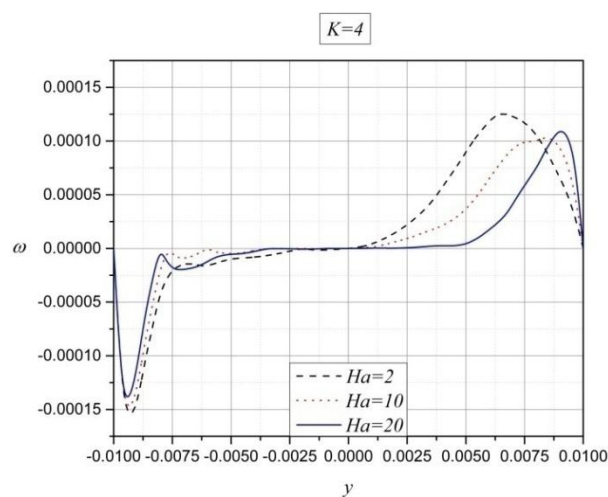
Na grafiku 9.18 predstavljen je uticaj Hartmannovog broja na polje brzine. Sa datog grafika može se pre svega uočiti da je intenzitet brzine strujanja fluida veći pored jednog od bočnih zidova kanala. Ovo je posledica toga što je levi zid kanala na višoj temperaturi nego desni zid. Usled toga dolazi do zagrevanja struje fluida uz levi zid čime fluid postaje lakši, a posledica toga je da ima veću brzinu od fluida bliže desnoj strani kanala. Takođe sa grafika se vidi da sa

povećanjem Hartmannovog broja, tj. uticaja Lorentzove sile, dolazi do smanjenja intenziteta brzine po celoj širini kanala, a uz to i poravnanja profila brzine.

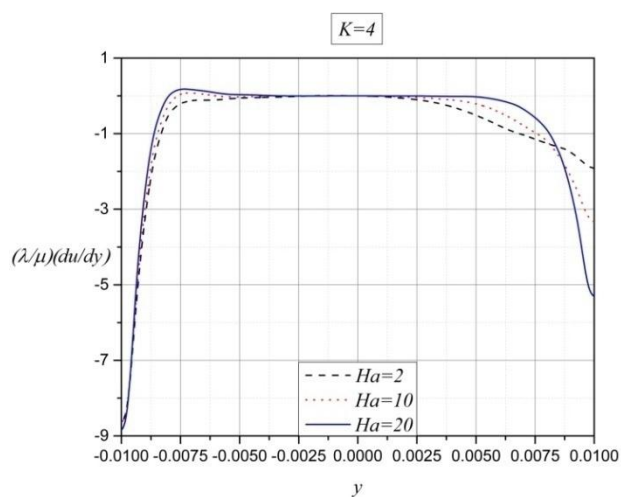


9.18 Uticaj Hartmannovog broja Ha na profil brzine

Naredna dva grafika, 9.19 i 9.20, mogu poslužiti da se objasni uticaj Hartmannovog broja na mikrorotaciju.



9.19 Uticaj Hartmannovog broja Ha na profil mikrorotacije



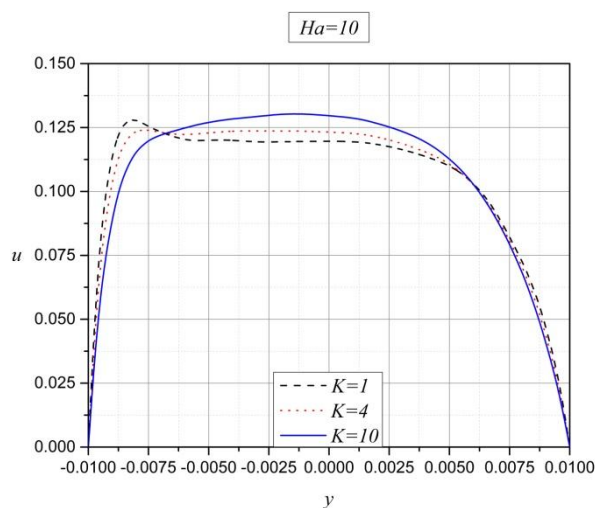
9.20 Uticaj Hartmannovog broja Ha na član $(\lambda/\gamma)(du/dy)$

Prilikom analize uticaja Hartmannovog broja na mikrorotaciju, zgodno je predstaviti i uticaj Hartmannovog broja na gradijent brzine u vidu člana $(\lambda/\gamma)(du/dy)$. Prilikom rešavanja

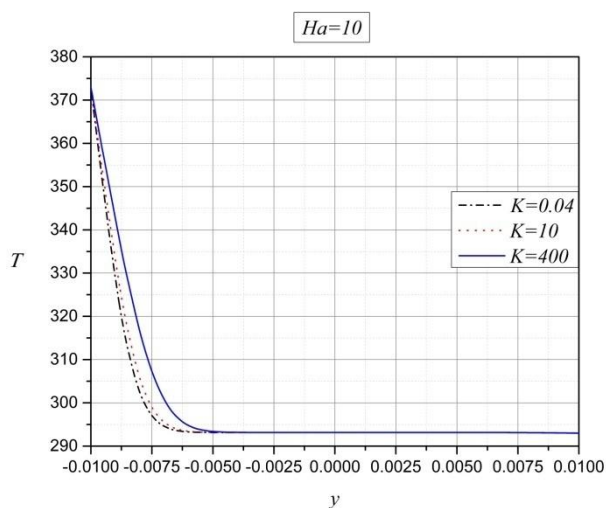
analitičkog modela MHD strujanja mikropolarnog fluida, partikularni deo rešenja za mikrorotaciju predstavljen je u vidu član $(\lambda/\gamma)(du/dy)$. Kako ovaj član daje vezu između mikrorotacije i brzine, analiza promene mikrorotacije sa promenom Hartmannovog broja uz paralelnu analizu uticaja Hartmannovog broja na ovaj član je daleko jasnija.

Sa grafika 9.19 i 9.20 uočava se intenzitet mikrorotacije opada sa povećanjem Hartmannovog broja. Uz to u desnom delu kanala intenzitet mikrorotacije je veći jer se javlja veći gradijent brzine nego u levom delu kanala. Iako eksplicitno nisu zadavani uslovi mikrorotacije na zidovima, dobijeni su uslovi nepostojanja mikrorotacije na zidovima, kako su i svi problemi razmatrani.

Grafici 9.21 i 9.22 predstavljaju uticaj parametra sprežanja K na brzinu i temperaturu mikropolarnog fluida. Sa pomenutih grafika se vidi da povećanje dopunske viskoznosti λ , tj. parametra sprežanja K , kod mikropolarnih fluida dovodi do uniformisanja profila brzine, kao i intenzivnijeg prenosa toplote unutar fluida sa zagrejanje ploče, odnosno kako se sa povećanjem K fluid ka srednjoj zoni kanala brže zagreva, tako se uz levu ivicu kanala gubi maksimum brzine koji nastaje kao posledica strujanja lakšeg, odnosno toplijeg, fluida.



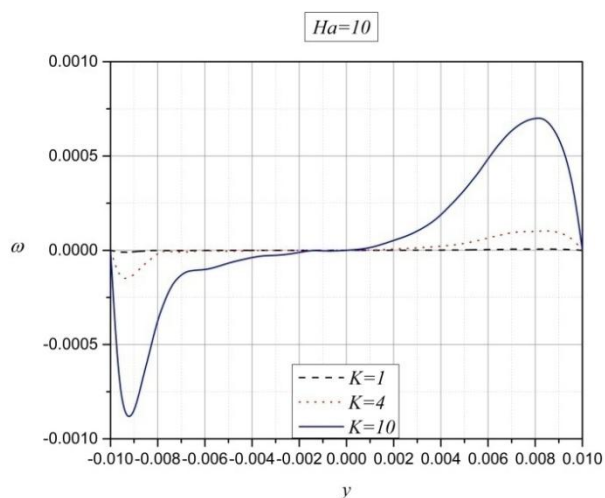
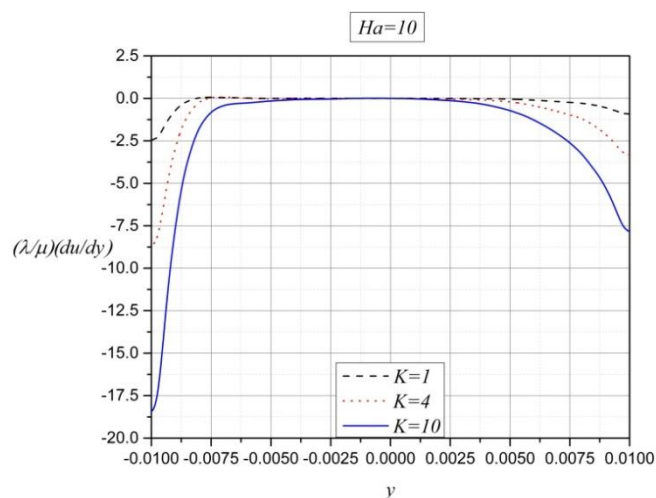
9.21 Uticaj parametra sprežanja K na brzinu



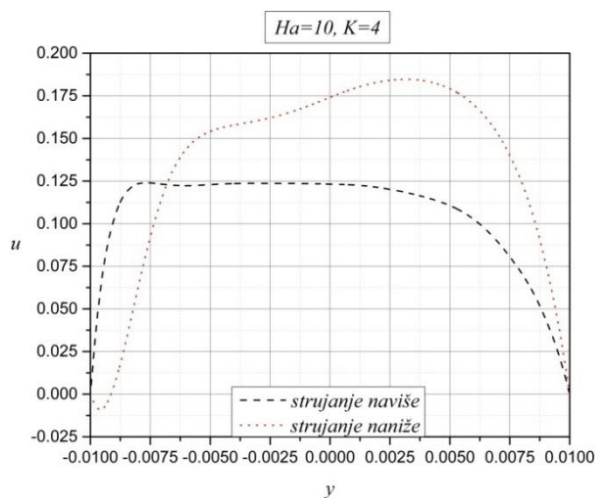
9.22 Uticaj parametra sprežanja K na temperaturu

Naredni grafici omogućiće lakše razumevanje uticaja parametra K na mikrorotaciju.

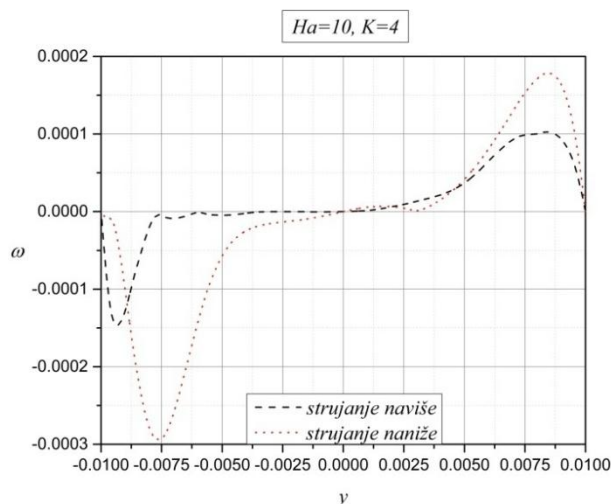
Sa grafika 9.23 i 9.24 možemo uočiti da bliže levom zidu kanala, koji je topliji, postoje veći gradijenti intenziteta mikrorotacije, što je posledica postojanja većih gradijenata brzine uz levu ploču. Međutim, uz desnu ploču ukupni intenzitet mikrorotacije je veći, a takođe se može uočiti da intenzitet mikrorotacije raste kako raste parametar sprežanja K , tj. sa porastom dopunske viskoznosti λ do izražaja dolaze fizička svojstva mikropolarnog fluida.

9.23 Uticaj parametra sprežanja K na mikrorotaciju9.24 Uticaj parametra sprežanja K na $(\lambda/\mu)(du/dy)$

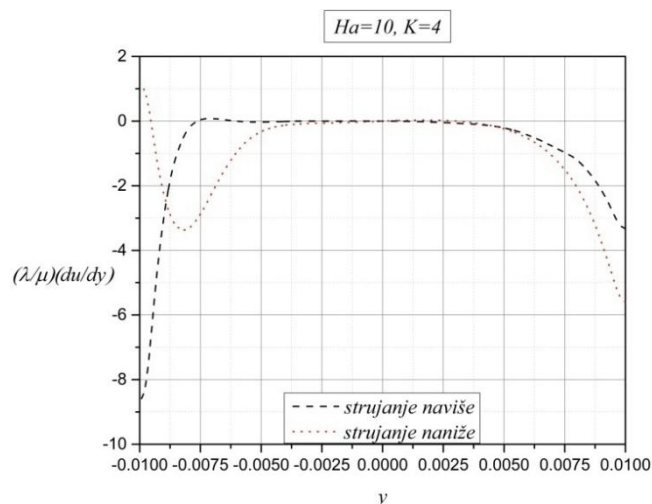
Poslednja tri grafika, 9.25, 9.26 i 9.27, pokazaće uticaj promene pravca strujanja na vektore brzine i mikrorotacije. Promenu pravca strujanja uslovljava promena dejstva gravitacione sile na mikropolarni fluid koji struji u vertikalnom kanalu (tj. slučaj u kome sila gravitacije deluje u pravcu strujanja).



9.25 Uticaj promene pravca strujanja na profil brzine



9.26 Uticaj promene pravca strujanja na mikrorotaciju



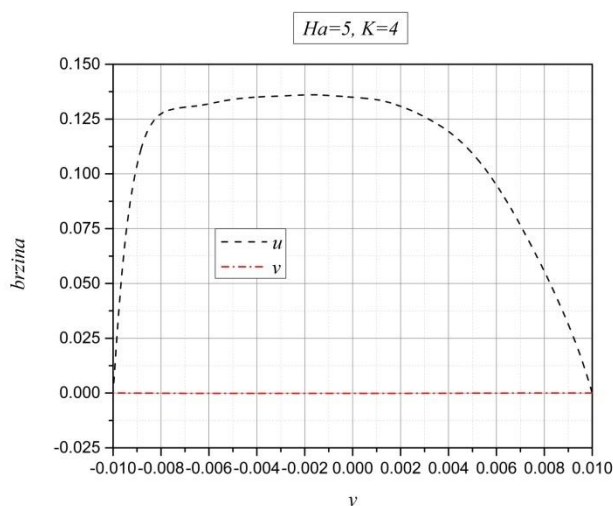
9.27 Uticaj promene pravca strujanja na član $(\lambda/\mu)(du/dy)$

Grafik 9.25 nedvosmisleno pokazuje da ukupan intenzitet brzine fluida raste u slučaju kada se strujanje odvija naniže u odnosu na slučaj strujanja naviše. Uz to, jasno je uočljivo da je u slučaju strujanja naniže, brzina fluida uz hladniju desnu ploču veća, jer je taj fluid veće gustine te samim tim pod većim uticajem gravitacione sile.

Što se tiče uticaja promene pravca strujanja na mikrorotaciju, sa grafika 9.26 i 9.27, u skladu sa očekivanjem, može se uočiti da intenzitet mikrorotacije raste ukoliko se pravac strujanja promeni, tj. ako umesto strujanja naviše imamo strujanje naniže. Uz to uz veći gradijent brzine uz levu stranu kanala (grafik 9.27), intenzitet mikrorotacije je takođe veći uz tu stranu kanala, što je posledica člana $(\lambda/\mu)(du/dy)$, koji se kao takav javlja u analitičkim rešenjima za mikrorotaciju.

Jedna od pretpostavki koja se uzima prilikom rešavanja problema strujanja u kanalima je da je strujanje potpuno razvijeno, te da brzina ima samo komponentu u pravcu strujanja dok se poprečna komponenta brzine zanemaruje. Sa ovom pretpostavkom jednačine problema dobijaju značajno jednostavniji oblik, te je njihovo rešavanje moguće. Poređenjem vrednosti komponente brzine u pravcu strujanja u , sa vrednošću poprečne komponente brzine v , dobijenih prilikom

numeričkih simulacija MHD strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu, pokazalo se da je usvojena pretpostavka opravdana, a to je i prikazano na grafiku 9.28.



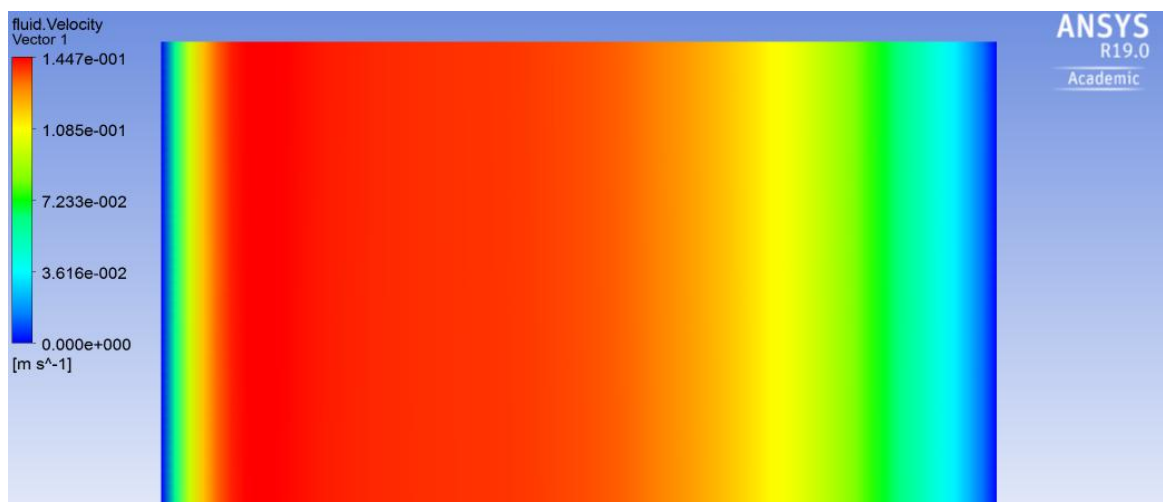
9.28 Uzdužna i poprečna komponenta brzine u kanalu

Sa grafika 9.28 se jasno zapaža da je vrednost poprečne komponente brzine v u poređenju sa vrednošću uzdužne komponente u zanemarljiva, te da se uticaj poprečne komponente brzine na strujanje i prenos toplote može zanemariti.

Na posletku, još jednom je iskorišćena prednost softvera ANSYS kako bi se dobijeni rezultati prezentovali u boji. Na narednim slikama predstavljeni su rezultati dobijeni prilikom analize MHD strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu.

Naredne tri slike 9.29, 9.30 i 9.31, prezentuju polje brzine i temperature prilikom MHD strujanja mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu.

Sa slike 9.30, koja predstavlja polje temperature u vertikalnom kanalu, jasno se uočava da je levi zid kanala na višoj temperaturu u odnosu na desni. Shodno tome, polje temperature fluida je nijansirano odgovarajućom paletom boja. Uticaj toplog zida kanala na strujanje, konkretno na brzinu strujanja, jasno je predstavljeno na slici 9.29, gde se na osnovu legende za intenzitet brzine zaključuje da je brzina fluida uz levi zid značajno veća od brzine fluida uz desni zid, koji je na nižoj temperaturi. Ovo je posledica toga da je fluid uz topliji levi zid manje gustine, usled uticaja temperature zida, te je intenzitet njegove brzine opravdano veći.

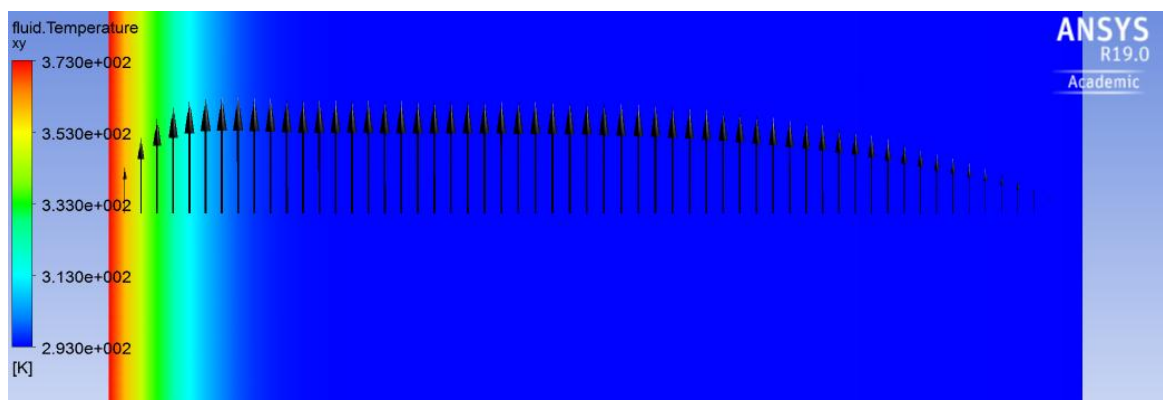


9.29 Polje brzine u vertikalnom kanalu



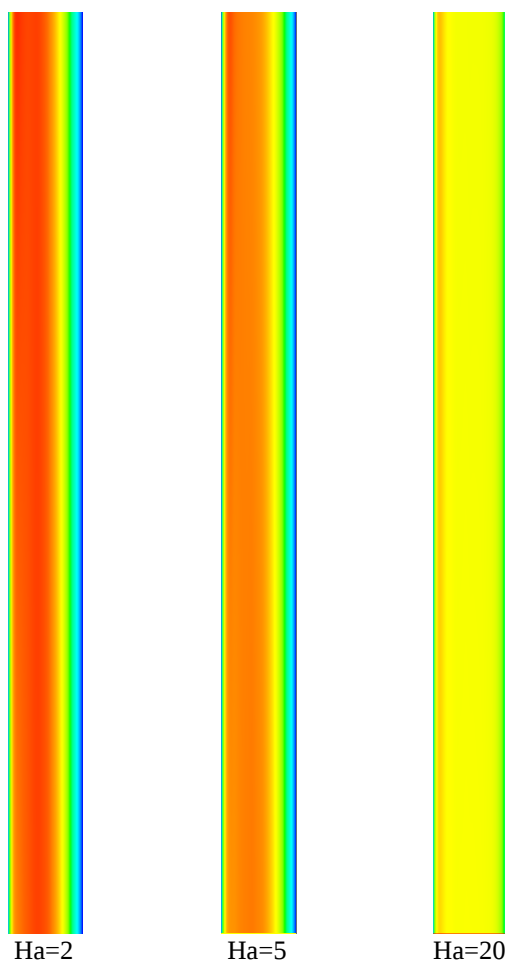
9.30 Polje temperature u vertikalnom kanalu

Još jedna dobra strana softvera ANSYS je mogućnost analize međusobnog uticaja dve fizičke veličine na karakteristike strujanja i prenosa toplote na jednoj istoj slici. Tako se prethodna analiza uticaja temperature zida kanala, na brzinu strujanja fluida može predstaviti i sledećom slikom 9.31.



9.31 Vektor brzine i polje temperature u vertikalnom kanalu

Na kraju, dat je i uticaj spoljašnjeg magnetnog polja različitog intenziteta, preko Hartmannovog broja, na polje brzine u vertikalnom kanalu.



9.33 Uticaj Hartmannovog broja na polje brzine

- X poglavlje -

10. Zaključak i dalji pravci istraživanja

10.1.

Zaključak

Mikropolarni fluidi pripadaju klasi fluida sa nesimetričnim tenzorom napona koje zovemo *polarni fluidi*. To je klasa fluida koja je opštija od onih izučavanih klasičnom teorijom hidrodinamike. Fizički, mikropolarni fluidi predstavljaju fluide koji sadrže čvrste, nasumično orjentisane deliće rastvorene u viskoznoj tečnosti, pri čemu ignorišemo deformaciju tih delića. U mikropolarnoj teoriji, svaki delić ima konačnu veličinu i predstavlja mikrostrukturu koja može da rotira. Jedna od najbolje utvrđenih teorija fluida sa mikrostrukturama je teorija mikropolarnog fluida od strane A. C. Eringen [4].

Modeli MHD strujanja mikropolarnog fluida, koji su analizirani u ovoj disertaciji, predstavljaju prvi korak ka tome da se karakteristike i ponašanje mikropolarnih fluida pod uticajem magnetnog i električnog polja približe našoj naučnoj zajednici. Disertacija je zamišljena u tom pravcu da se prvo krene od najjednostavnijeg slučaja strujanja jednog mikropolarnog fluida između dve ploče, da bi zadnji analitički model predstavio strujanje mikropolarnog i viskoznog fluida između nagnutih ploča, kao jedan od složenijih modela.

Kroz ostale analizirane probleme i modele strujanja, vršena je analiza uticaja indukovano magnetnog polja, zatim elektroprovodnosti ploča, uticaj spoljašnjeg električnog polja i na kraju međusobni uticaj strujanja dva mikropolarna fluida između ploča.

Prvi značajan korak učinjen je prilikom postavljanja odgovarajućih matematičkih modela koji opisuju MHD strujanje mikropolarnog fluida. Iz priloženog u disertaciji može se videti da ti matematički modeli nisu nimalo jednostavni, te da rešavanje takvih modela zahteva dosta napora

i znanja. Dobijena bezdimenziona forma rešenja, omogućila je valjanu analizu strujanja svakog od datih modela.

Svaki od pomenutih modela dao je odgovor na uticaj karakterističnih parametara na osnovne strujne veličine mikropolarnog fluida. Tako je vršena analiza uticaja Hartmannovog Ha i Reynoldsovog broja Re , promenjive elektroprovodnosti ploča preko c ($c = \sigma_w t_w / \sigma h$), te faktora opterećenja Q , kao i nagiba ploča preko ugla α , ali pre svega analiza uticaja parametra sprežanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ , kao dva parametra koji su karakteristični samo za mikropolarne fluide. Analiziran je uticaj ovih bezdimenzionih parametara pre svega na polje brzine, mikrorotacije i temperature, ali u pojedinim slučajevima i na indukovano magnetno polje, kao i na tangentni napon. Detaljna analiza data je u vidu grafika i zaključaka koji su doneti na osnovu dobijenih rezultata.

Podjednako bitan poduhvat bilo je formiranje modela za simuliranje MHD strujanja mikropolarnog fluida u kanalu uz pomoć ANSYS-ovog softverskog paketa. Kako ovakav model fluida ne postoji u paleti modela koji se nalaze u CFX-u, dobro poznavanje strujanja i karakteristika mikropolarnih fluida bili su neophodni kako bi formirani model dao valjane rezultate. Kroz analizu formiranog modela strujanja, utvrđeno je da tendencije promene fizičkih veličina usled promene bezdimenzionih faktora prate analitičke rezultate, što je bio dovoljno dobar znak da formirani model mikropolarnog fluida može biti korišćen za dalju analizu.

Na osnovu napred rečenog o mikropolarnom fluidu, mogu se dati zaključci o analitičkim i numeričkim modelima razmatranim u ovoj doktorskoj disertaciji.

Razmatrani modeli MHD strujanja mikropolarnih fluida:

- Analitički rešavani modeli:
 - MHD strujanje mikropolarnog fluida između ploča,
 - MHD strujanje mikropolarnog fluida sa indukovanim magnetnim poljem $Rm \sim 0^0$,
 - MHD strujanje mikropolarnog fluida sa promenjivom elektroprovodnošću ploča,
 - EMHD strujanje mikropolarnog fluida,
 - MHD strujanje dva mikropolarnog fluida koji se ne mešaju,

- MHD strujanje viskoznog i mikropolarnog fluida u nagnutom kanalu.
- Numerički modeli - simulacije:
 - MHD strujanje mikropolarnog fluida u horizontalnom kanalu,
 - MHD strujanje mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu.

Kroz prvi analitički model izvršena je analiza uticaja Hartmannovog broja Ha , parametra sprezanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na polje brzine, mikrorotacije i temperature, kao i na tangencijalni napon. Data analiza pokazala je da uticaj spoljašnjeg magnetnog polja dovodi do smanjenja mikrorotacije po apsolutnoj vrednosti po celoj visini kanala, što navodi na zaključak da povećanje intenziteta magnetnog polja dovodi do smanjenja karakteristika kojima se odlikuju mikropolarni fluidi. Takođe povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ uzrokuje sniženje temperature po čitavoj visini između ploča, odnosno, povećanje parametra viskoznosti mikrorotacije Γ smanjuje količinu energije transformisane unutar tečnosti. Takođe, povećanje parametra sprezanja K smanjuje brzinu, ali povećava mikrorotaciju, što znači, da se otpor strujanju tečnosti povećava s povećanjem parametra sprezanja K , dok sa druge strane intenzivira karakteristike mikropolarnog fluida kroz dopunsku viskoznost λ .

Kod narednog analitički razmatranog problema model je proširen indukovanim magnetnim poljem, tj. posmatrani model ima Reynoldsov magnetni broj reda jedinice $Rm \sim 0^0$. Kroz ovaj model posebna pažnja posvećena je uticaju Hartmannovog broja Ha , parametra sprezanja K i parametra viskoznosti mikrorotacije Γ na indukovano polje b . Kako svaki od karakterističnih parametara (Ha , K i Γ) na polje brzine utiče tako što sa porastom vrednosti parametra opada bezdimenziona brzina između ploča, tako i indukovano magnetno polje ima tendenciju smanjenja intenziteta po visini između ploča jer je indukovano polje direktna posledica brzine strujanja elektroprovodnog fluida u magnetnom polju.

Promenjiva elektroprovodnost zidova kanala, analizirana je kroz treći model u ovoj disertaciji. U slučaju brzine i mikrorotacije povećanje elektroprovodnosti zidova dovodi do smanjenja uticaja spoljašnjeg magnetnog polja, pa tako imamo povećanje intenziteta brzine i

mikrorotacije. Kod neprovodnih ploča viskozno zagrevanje dovodi do povećanja temperature u blizini ploča, dok u slučaju konačne provodnosti ploča viskozno zagrevanje i Jouleova toplota dovode do povećanja intenziteta temperature u sredini strujnog prostora. Takođe promenjiva elektroprovodnost ploča može u nekim slučajevima da intenzivira karakteristike mikropolarnog fluida, dok u drugim smanjuje njihov uticaj.

Model EMHD strujanje mikropolarnog fluida ponudio je odgovore o uticaju spoljašnjeg električnog polja na strujanje mikropolarnog fluida. Putem promene faktora opterećenja Q dobili smo odgovor na pitanje kako se menja polje brzine, mikrorotacije i temperature, zasvisno od toga da sistem funkcioniše u "pumpnom" režimu ($Q \geq 1$) ili režimu "merača protoka" ($Q = -1$). Tako režim pumpe dovodi do promene smera strujanja i smera mikrorotacije, što je posledica toga što je spoljašnje električno polje E usvojeno u negativnom smeru z ose, dok za vrednost $Q = -1$, dolazi do izjednačavanja članova u Lorentzovoj sili.

Poslednja dva analitička modela definišu međusobni uticaj prilikom strujanja dva različita mikropolarna fluida, koji se ne mešaju, između horizontalnih ploča, kao i međusoban uticaj viskoznog i mikropolarnog fluida prilikom strujanja između ploča pod nagibom α . Uz uticaje Hartmannovih brojeva (Ha_1, Ha_2), parametre sprežanja (K_1, K_2), kao i parametara viskoznosti mikrorotacije (Γ_1, Γ_2), data je analiza i uticaja Reynoldsovih brojeva (Re_1, Re_2). Utvrđeno je da sa povećanjem Reynoldsovog broja jednog od fluida dolazi do intenziviranja brzine tog fluida u strujanom prostoru između ploča jer dolazi do porasta odnosa inercijalnih i viskoznih sila. Sa druge strane smanjenjem Reynoldsovog broja viskozne sile postaju dominantne u odnosu na inercijalne, pa drugi član jednačine konzervacije ugaonog impulsa dovodi do smanjenja vrednosti mikrorotacije uz tendenciju da promeni smer rotacije. Kod narednog modela strujanja viskoznog i mikropolarnog fluida, uz analizu uticaja karakterističnih parametara dva potpuno raznorodna fluida, dat je i uticaj nagiba kanala α na polje brzine i mikrorotacije, gde i brzina i mikrorotacija rastu sa porastom ugla α kao posledica uzgonske sile unutar fluida.

Ovako detaljna analiza MHD strujanja mikropolarnih fluida, kroz više različitih modela, pružila je adekvatnu sliku o prirodi ovih fluida. Ta saznanja pomogla su prilikom definisanja numeričkog modela u softveru ANSYS CFX.

Prvi od dva numerička modela kroz analizu uticaja Hartmannovog broja Ha , faktora opterećenja Q i parametra sprezanja K doneo je rezultate koji su imali potpuno istu tendenciju kao i kod razmatranih analitičkih modela. Međutim drugi razmatrani numerički model dao je rezultate koji kod analitičkih modela nisu razmatrani. Kako se u tom modelu razmatra strujanje mikropolarnog fluida u vertikalnom kanalu, deo rezultata posvećen je analizi uticaja različite temperature bočnih stranica kanala, a deo analizi uticaja promene pravca dejstva sile zemljine težine na karakteristike strujanja mikropolarnog fluida.

Zajedno sa analitičkim modelima, numerički modeli upotpunjuju sliku o MHD strujanju mikropolarnih fluida. Dobijeni rezultati mogu poslužiti kao odlična osnova za dalja istraživanja u ovoj naučnoj oblasti.

10.2

Dalji pravci istraživanja

Postoji izreka da put od hiljadu milja počinje jednim korakom. Dobro je da se ne nalazimo na početku, jer su mnogi pre nas svojim koracima doprineli tome da se sada nalazimo tu gde jesmo. Naša obaveza je da nastavimo!

Ova disertacija sa te strane predstavlja samo početak istraživanja jednog malog dela oblasti magnetne hidrodinamike. Pozitivna stvar je to da rezultati i zaključci dobijeni u disertaciji predstavljaju kvalitetnu osnovu za dalja istraživanja.

Dalji pravci istraživanja ogledaju se pre svega u formiranju novih i složenijih analitičkih modela. Strujanje mikropolarnog fluida koji se nalazi u strujnom prostoru između dva viskozna fluida, pokazao se kao dobar model za predstavljanje strujanja bioloških fluida, poput ljudske i životinjske krvi. Strujanje krvi u plućima, može biti analizirano preko modela strujanja mikropolarnog fluida u poroznoj sredini, dok model strujanja mikropolarnog fluida između

elastičnih ploča daje valjanu sliku uticaja elastičnih zidova krvotoka na strujanje krvi. Svi ovi modeli strujanja pružaju mogućnost za nova saznanja.

Osim novih analitičkih modela, još više izazova će biti da se formirani numerički model za simuliranje strujanja mikropolarnih fluida u CFX-u usavrši i primeni na neka složenija strujanja, dok će posebna pažnja biti posvećenja formiranju eksperimentalnog štanda na kome će se vršiti magnetno hidrodinamička istraživanja, što predstavlja poduhvat svoje vrste.

Iz perspektive izloženog, ovu disertaciju treba smatrati kao početak i osnovu daljeg istraživanja MHD strujanja mikropolarnih fluida.

Litertura

- [1] M. Faraday, (1839): Experimental Researches in Electricity; 2nd edition Richard and John Edward Taylor, London,
- [2] J. Hartmann, (1937): Flow in Pipes under Transverse Magnetic Field; Math.-Fys. Medd., Vol. 15, No. 6 and 7, Copenhagen,
- [3] H. Alfven, (1942) : Discovery of Alfven Waves; Nature, Vol. 76, No. 194,
- [4] A. C. Eringen, (1966): Theory of micropolar fluids; Journal of Mathematics and Mechanics. Vol. 16, pp. 1 - 16,
- [5] A. C. Eringen, (1964): Simple micro fluids; International Journal of Engineering Science, Vol. 2, pp. 205 - 217,
- [6] A. C. Eringen, (1972): Theory of thermomicrofluids; Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 38, pp. 480-496.
- [7] A. J. Willson, (1970): Boundary Layers in Micropolar liquids; Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 67. pp. 469-476.
- [8] J. Peddieson and R. P. McNitt, (1970): Boundary layer theory for a micropolar fluid; Recent Advances in Engineering Science, Vol. 5, pp. 405 - 426.
- [9] T. Ariman, M. A. Turk and N. D. Sylvester, (1973): Microcontinuum fluid mechanics - A review; International Journal of Engineering Science, Vol. 11, pp. 905 - 930.
- [10] T. Ariman, M. A. Turk and N. D. Sylvester, (1974): Applications of microcontinuum fluid mechanics; International Journal of Engineering Science, Vol. 12, pp. 273 - 293.
- [11] G. Nath, (1975): Similar solutions for the incompressible laminar boundary layer with pressure gradient in Micropolar fluids; Rheology Acta, Vol. 14, pp. 190-198.
- [12] G. Ahmadi, (1976): Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infnite plate; International Journal of Engineering Science, Vol. 14, pp. 639 - 646.
- [13] B.C. Sakiadis, (1961): Boundary-Layer Behaviour on Continuous Solid Surfaces: I. Boundary-Layer Equations for Two Dimensional and Axisymmetric Flow. Journal of American Institute of Chemical Engineers, Vol. 7, pp. 26-28.

- [14] H. Blasius, (1908): Grenzsichten in Fliissikeiten mit kleiner Reibung; Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 56, pp. 1-37.
- [15] V. M. Soundalgekar and H. S. Takhar, (1983): Flow of a micropolar fluid on a continuous moving plate; International Journal of Engineering Science, Vol. 21, pp. 961 - 965.
- [16] P.S. Gupta and A.S. Gupta, (1972): Asymptotic suction problem in the flow of micropolar liquids, Acta Mechanica, Vol. 15, pp. 141-149.
- [17] E.N. Korzhov and A.T. Listrov, (1979): Boundary layer of microstructural fluid on a plate, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 36, pp. 121-127.
- [18] R.S.R. Gorla, (1983): Micropolar boundary layer flow at stagnation point on a moving wall; International Journal of Engineering Science, Vol. 21, pp. 25-33.
- [19] R. S. R. Gorla and I. A. Hassanian, (1990): Mixed convection boundary layer flow of a Micropolar fluid near a stagnation point on a horiyontal cylinder; International Jurnal of Engineering Science, Vol. 28, pp. 153-161.
- [20] D.A.S. Rees and I. Pop, (1998): Free convection boundary layer flow of micropolar fluids from a vertical flat plate; IMA Journal of Applied Mathematics, Vol. 61, pp. 179-197.
- [21] A. Raptis, (1998): Flow of a Micropolar Fluid past a Continuously Moving Plate by the Presence of Radiation, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 41,pp. 2865-2866.
- [22] M.A. Ezzat, M.I. Othman, and K.A. Helmy, (1999): A problem of a micropolar magnetohydrodynamic boundary-layer flow, Canadian Journal of Physics, Vol. 77, pp. 813-827.
- [23] A. Tozeren and R. Skalak, (1977): Micropolar Fluids as Models for Suspensions of Rigid Spheres; International Jurnal of Engineering Science, Vol. 15, pp. 511-523.
- [24] S.J. Allen and K.A. Kline, (1971): Lubrication Theory of Micropolar Fluids; Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, pp. 646-650.
- [25] J. Prakash and P. Sinha, (1975): Lubrication Theory for Micropolar Fluid and its Application to a Journal Bearing; International Journal of Engineering Science, Vol. 13, pp. 217-232.
- [26] J. B. Shukla and M. Isa, (1975): Generalized Reynolds Equation for Micropolar Lubricants and its Application to optimum one dimensional Slider Bearing: Effects of

- Solid Particle Additives in Solution; Journal of Mechanic Engineering Science, Vol. 17, pp. 380-384.
- [27] N. Tipei, (1979): Lubricant With Micropolar Liquids and its Application to Short Bearings; ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, pp. 356-363.
 - [28] C. Singh and P. Sinha, (1982): The Three-Dimensional Reynolds Equations for Micropolar- fluid- Lubricated Bearings; Wear, Vol. 76, pp. 199-209.
 - [29] Z. G. Qiu and Z. J. Lu, (1987): Lubricant Theory of Micropolar Fluid and its Application to a Journal Bearing of Finite Length; Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8, pp. 655-668.
 - [30] V. V. Khosari and D. E. Brew, (1988): On the Performance of Finite Journal Bearing Lubricated with Micropolar Fluids; Tribology Transaction, Vol. 32, pp. 155-168.
 - [31] H. S. Takhar and V. M. Soundalgekar, (1985): Flow and heat transfer of a Micropolar Fluid Past a Porous Plate; Indian Journal Pure and Applied Mathematics, Vol. 16, pp. 552-558.
 - [32] M. A. Kamal, M. Ashraf and K. S. Syed, (2006): Numerical solution of steady viscous flow of a micropolar fluid driven by injection between two porous disks, Applied Mathematics and Computation, Vol. 179, pp. 1-10.
 - [33] A. J. Chamkha, T. Grosan and I. Pop, (2002): Fully developed free convection of a micropolar fluid in a vertical channel; International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 29, pp. 1119-1127.
 - [34] Ching-Yang Cheng, (2006): Fully developed natural convection heat and mass transfer of a micropolar fluid in a vertical channel with asymmetric wall temperatures and concentrations; International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 33, pp. 627-635.
 - [35] D. Srinivasacharya, JV. Ramana Murthy and D. Venugopalan, (2001): Unsteady stokes flow of micropolar fluid between two parallel porous plates; International Journal of Engineering Science, Vol. 39, pp. 1557-1563.
 - [36] R. Bhargara, L. Kumar and HS. Takhar, (2003): Numerical solution of free convection MHD micropolar fluid flow between two parallel porous vertical plates; International Journal of Engineering Science, Vol. 41: pp. 123–136.

- [37] J. Zueco, P. Eguia, L.M. Lopez-Ochoa, J. Collazo, D. Patino, (2009): Unsteady MHD free convection of a micropolar fluid between two parallel porous vertical walls with convection from the ambient; *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 3–9.
- [38] L.E. Bayliss, (1952): *Rheology of blood and lymph, deformation and flow in biological systems*; Edited by A. Fry-Wyssling, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, p. 354.
- [39] Y.C. Fung, (1966): Theoretical considerations of the elasticity of red cells and small blood vessels, *Federation of American Societies for Experimental Biology*, Vol. 25, pp. 1761-1772.
- [40] H.S. Lew and Y.C. Fung, (1970): Entry flow into blood vessels at arbitrary Reynolds number, *Journal Biomechanics*. Vol. 3, pp. 23-28
- [41] R.L. Whitmore, (1968): *Rheology of the circulation*; Pergamon Press Oxford.
- [42] M.A. Turk, T. Ariman and N.D. Sylvester, (1973): On Pulsatile Blood Flow; *Transactions of the Society of Rheology*, Vol. 17, pp. 1-21.
- [43] M.A. Turk, T. Ariman and N.D. Sylvester, (1974): On Steady and Pulsatile Flow of Blood; *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 1-17.
- [44] H.A. Hogen and M. Hensiksen, (1989): An Elevation of a Micropolar Model for Blood Flow Through an Idealized Stenosis; *Journal Biomechanics*, Vol. 22, pp. 211-218.
- [45] G. Bugliarello and J. Sevilla, (1970): Velocity distribution and other characteristics of steady and pulsatile blood flow in fine glass tubes, *Biorheology*, Vol. 7, pp. 85-107.
- [46] H.L. Goldsmith and R. Skalak, (1975): Hemodynamics; *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 7, pp. 231-247.
- [47] G.R. Cocklet (1972): The rheology of human blood; *Biomechanics: its foundation and objectives*, pp. 63.
- [48] G. Radhakrishnamacharya, (1977): Flow of micropolar fluid through a constricted channel, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 15, pp. 719.
- [49] T. Ariman, M.A. Turk, and N.D. Sylvester (1974): On Steady and Pulsatile Flow of Blood, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 1-7.

- [50] S. R. Kasiviswanthan and M.V. Gandhi, (1992): A class of exact solutions for the magnetohydrodynamic flow of a micropolar fluid, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, pp. 409-417.
- [51] A.A. Mohammeadein, R.S.R. Gorla, (1966): Effects of transverse magnetic field on a mixed convection in a micropolar fluid on a horizontal plate with vectored mass transfer; *Acta Mechanica*, Vol. 118, pp. 1–12.
- [52] R.S.R. Gorla, H.S. Takhar, A. Slaouti, (1998): Magnetohydrodynamic free convection boundary layer flow of a thermomicropolar fluid over a vertical plate; *International Journal of Engineering Science*, Vol. 36, pp. 315–327.
- [53] E. E. Ortega-Torres and M. A. Rojas-Medar, (1996): On the uniqueness and regularity of the weak solution for magneto-micropolar fluid equation; *Revista de Matematicas Aplicadas*, Vol. 17, pp. 75-90.
- [54] M. A. Rojas-Medar, (1997): Magneto-micropolar fluid motion: On the convergence rate of the spectral Galerkin Approximation; *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 77, pp. 723-732.
- [55] M. A. Rojas-Medar and R. Beltran-Barrios, (1995): The initial value problem for the equations of magnetohydrodynamics type in a non-cylindrical domain; *Revista de Matematica de la Universidad Complutense de Madrid*, Vol. 8, pp. 229-251.
- [56] M. A. Rojas-Medar and J. L. Boldrini, (1998): Magneto-micropolar fluid motion existence of weak solutions, *Revista Matemática Complutense*, Vol. 8, pp. 229-251.
- [57] H. Lange, (1977): The existence of instationary flows of incompressible micropolar fluids; *Archive of mechanics*, Vol. 29, pp. 741-744.
- [58] M. A. Mansour and R. S. R. Gorla, (1999): MHD mixed convection boundary layer flow of Micropolar fluid from a horizontal cylinder; *Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 4, pp. 649-662.
- [59] M.A. El-Haikem, A.A. Mohammadein, S.M.M. El-Kabeir, (1999): Joule heating effects on magnetohydrodynamic free convection flow of a micropolar fluid; *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 219-227.
- [60] M.F. El-Amin, (2001): Magnetohydrodynamic free convection and mass transfer flow in micropolar fluid with constant suction; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 234, pp. 567-574.

- [61] M.M. Rahman, M.A. Sattar, (2006): Magnetohydrodynamic convective flow of a micropolar fluid past a continuously moving porous plate in the presence of heat generation/absorption; ASME Journal of Heat Trans. Vol. 128, pp. 142–152.
- [62] H.A.M. El-Arabawy, (2003): Effect of suction/injection on the flow of a micropolar fluid past a continuously moving plate in the presence of radiation; International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp. 1471–1477.
- [63] Y.J. Kim, (2001): Unsteady MHD convection flow of polar fluid past a vertical moving porous plate in a porous medium; International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, pp. 2791-2799.
- [64] B. R. Obrović, R. S. Petrović, S. R. Savić, (2015): Dinamika viskoznog fluida - viši kurs, Fakultet inženjerskih nauka, Kragujevac.
- [65] Ž. M. Stamenković (2014): MHD strujanja jednog i dva fluida u kanalima, Mašinski fakultet Niš.
- [66] N. B. Salah, (1999): A finite Element Method for the Fully-Coupled Magnetohydrodynamics; Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, May.
- [67] G. Lukaszewicz, (1999): Micropolar Fluids Theory and Applications; Institute of Applied Mathematics and Mechanics University of Warsaw, Poland.
- [68] B. A. Sivak, (2009): MHD processes in the electromagnetic stirring of liquid metal in continuous section and bloom casters; Metallurgist, Vol. 53, pp. 469-481.
- [69] N. B. Morley, (2005): Thermo-fluid magnetohydrodynamic issues for liquid breeders; Fusion Science and Technology, Vol. 47, pp. 488-501.
- [70] M. Y. Abdollahzadeh Jamalabadi, (2014): Analytical study of magnetohydrodynamic propulsion stability; Journal of Marine Science and Application, Vol. 13, pp. 281-290.
- [71] Shinya Saito, (2008): Boundary Layer Separation Control by MHD Interaction; 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 7-10 January, Nevada.
- [72] D. Nikodijević, Ž. Stamenković, (2015): General characteristics of unsteady MHD temperature boundary layer; International journal of non-linear mechanics, Vol. 73, pp. 75-84.
- [73] R. Ellahi, (2009): Steady and Unsteady Flow Problems for Newtonian and Non-Newtonian Fluids: Basics, Concepts, Methods; VDM Verlag, Germany.

- [74] T. Toshivo, (2002): Magnetizing force modelled and numerically solved for natural convection of air in a cubic enclosure: effect of the direction of the magnetic field; *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 267–277.
- [75] Kh. S. Mekheimer, M. A. El Kot, (2008): The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis; *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 24, pp. 637-644.
- [76] A. Sengupta, U. Tkalec, M. Ravnik, JM. Yeomans, C. Bahr and S. Herminghaus, (2013): Liquid Crystal Microfluidics for Tunable Flow Shaping, *Physical Review Letters*, 25. January.
- [77] J.C. Umavathi, J. Prathap Kumar and A.J. Chamkha, (2008): Flow and heat transfer of a micropolar fluid sandwiched between viscous fluid layers; *Canadian Journal of Physics*, Vol. 86: pp. 961–973.
- [78] R. Bhargava, L. Kumar and H.S. Takhar, (2003): Numerical solution of free convection MHD micropolar fluid flow between two parallel porous vertical plates; *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, pp. 123–136.
- [79] J. Srinivas, J.V. Ramana Murthy and Ali J. Chamkha, (2016): Analysis of entropy generation in an inclined channel flow containing two immiscible micropolar fluids using HAM, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 26, pp. 1027 - 1049.
- [80] J. C. Umavathi, Ali J. Chamkha and M. Shekar, (2014): Flow and heat transfer of two micropolar fluids separated by a viscous fluid layer; *International Journal of Microscale and Nanoscale Thermal Science*, Volume 5, pp. 25-49.
- [81] K. Ali and M. Ashraf, (2014): Numerical simulation of the micropolar fluid flow and heat transfer in a channel with a shrinking and a stationary wall; *Journal of theoretical and applied mechanics*, Vol. 52, pp. 557-569.
- [82] M. Kocić, Ž. Stamenković, J. Petrović, J. Bogdanović-Jovanović and M. Nikodijević, (2016): Heat transfer in micropolar fluid flow under the influence of magnetic field; *THERMAL SCIENCE*, Vol. 20, pp. S1391 - S1404.
- [83] Kh. S. Mekheimer, (2008): Peristaltic Flow of a Magneto-Micropolar Fluid: Effect of Induced Magnetic Field; *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2008, 23 pages.

- [84] M. Sajid, N. Ali, Z. Abbas and T. Javed, (2015) On modelling of two-dimensional MHD flow with induced magnetic field: solution of peristaltic flow of a couple stress fluid in a channel; *Iranian Journal of Science & Technology*, Vol. 39, pp. 35-43.
- [85] M. Kocić, Ž. Stamenković, J. Petrović, M. Nikodijević, (2018): Influence of electrical-conductivity of walls on MHD flow and heat transfer of micropolar fluid; *THERMAL SCIENCE*, Vol. 22, pp. S1591-S1600.
- [86] K. Singh and H. S. Takhar, (2003): Transient free convection flows in vertical channel due to symmetric heating; *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 8, pp. 497-502.
- [87] H. B. Haim, Z. Jianzhong, Q. Shizhi and X. Yu, (2003): A magneto-hydrodynamically controlled fluidic network, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 88, pp. 205-216.
- [88] D. Tripathi, R. Jorar, O.A. Beg and A. Kadir, (2017): Electromagnetohydrodynamic peristaltic pumping of couple stress biofluids through a complex wavy microchannel; *Journal of molecular liquids*, Vol. 236, pp. 358-367.
- [89] M. K. Chaube, A. Yadav, D. Tripathi and O. Anwar Bég, (2018): Electroosmotic flow of biorheological micropolar fluids through microfluidic channels; *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 30, pp. 89-98.
- [90] R. Shail, (1973): On laminar two-phase flows in magnetohydrodynamics; *International Journal of Engineering Science*. Vol. 11, pp.1103-1108.
- [91] J. Lohrasbi and V. Sahai, (1988): Magnetohydrodynamic heat transfer in two-phase flow between parallel plates; *Applied Scientific Research*, Vol. 45, pp. 53–66.
- [92] J. Prathap Kumar, J.C. Umavathi, Ali J. Chamkha and I. Pop, (2010): Fully-developed free-convective flow of micropolar and viscous fluids in a vertical channel; *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 1175–1186.
- [93] R. Muthuraj and S. Srinivas, (2010): Fully developed MHD flow of a micropolar and viscous fluids in a vertical porous space using HAM; *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 6, pp. 55-78.
- [94] J. Srinivas and J. V. Ramana Murthy, (2015): Thermodynamic analysis for the MHD flow of two immiscible micropolar fluids between two parallel plates; *Frontiers in Heat and Mass Transfer*, Vol. 6, pp. 1-11.

- [95] J. V. Ramana Murthy, J. Srinivas and K. S. Sai, (2014): Flow of immiscible micropolar fluids between two porous beds; *Journal of Porous Media*, Vol. 17, pp. 287–300.
- [96] Md. A. Ikbāl, S. Chakravarty and P.K. Mandal, (2009): Two-layered micropolar fluid flow through stenosed artery: Effect of peripheral layer thickness; *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, pp. 1328-1339.
- [97] M. Kocić, Ž. Stamenković, J. Petrović, J. Jovanović-Bogdanović, M. Nikodijević, (2017): Flow and heat transfer of two immiscible micropolar fluids in the presence of uniform magnetic field; 6th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Tara, Srbija, Jun 19-21.
- [98] J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher, (1997): *Computational fluid mechanics and heat transfer*; Taylor & Francis, Second edition, Washington D.C.
- [99] ANSYS Fluent Tutorial Guide, (2016), ANSYS, Inc. Release 17.0.
- [100] R. Acharya, (2016): Investigation of Differences in Ansys Solvers CFX and Fluent; Master thesis in Fluid Dynamics, Mechanics Institution, Royal Institute of Technology, KTH Stockholm.
- [101] ANSYS Modeling and Meshing Guide, (2005), ANSYS, Inc. Release 10.0.

Biografija autora

Miloš M. Kocić rođen je 05. juna 1984. god. u Nišu. Osnovnu školu „Radoje Domanović“ i gimaziju „Bora Stanković“-prirodno matematički smer, završio je u Nišu sa odličnim uspehom, a za postignute rezultate na takmičenjima i druge školske rezultate tokom školovanja, nagrađivan je Vukovim diplomama.

Školske 2003/2004. upisao je Mašinski fakultet u Nišu. Diplomirao je na Energetskom smeru 2009. godine, sa prosečnom ocenom 9,86 i ocenom na diplomskom radu 10. Tokom studija na Mašinskom fakultetu bio je nagrađivan kao najbolji student prve godine, zatim kao najbolji diplomirani student smera Energetika, a dobio je nagradu i za najbolji diplomski rad. Tokom studija učestvovao je na Mašinijadama i takmičio se u znanju iz Matematike i Mehanike fluida. Na pomenutim takmičenjima iz Mehanike fluida ekipno je osvojio prvo mesto, dok je iz Matematike zauzeo drugo mesto. Tokom studija, u dva navrata bio je stipendiran od strane instituta za internacionalnu edukaciju, pod pokroviteljstvom kompanije Philip Morris, a pod nazivom „Partnerstvo za edukaciju i program razvoja zajednice u Nišu“. Bio je takođe i stipendista fondacije za razvoj naučnog i umetničkog podmlatka Republike Srbije, počevši od školske 2007/2008. god. Aprila 2011. godine dobio je Pupinovu nagradu Matice srpske, za diplomski rad iz Mehanike fluida pod nazivom "Nestacionarni magnetnohidrodinamički temperaturski granični sloj nestišljivog fluida promenljive elektroprovodnosti".

Godine 2009. upisao je studije trećeg stepena-doktorske akademske studije, smer Energetika i procesna tehnika, na Mašinskom fakultetu u Nišu. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom za ove studije sa ocenom deset. Pri upisu na doktorske akademske studije, prijavljen je kao doktorant-istraživač na projektu: "Unapređenje konstruktivnih rešenja sporohodnih centrifugalnih pumpi u cilju proširenja oblasti rada i poboljšanja kavitacionih karakteristika", koje je finansiralo Ministarstvo za nauku i tehnološki razvoj (br. projekta 14032, rukovodilac dr Dragiša Nikodijević).

Profesionalnu karijeru, kao asistent na Mašinskom fakultetu u Nišu, započeo je marta 2013. godine. U prethodnih šest godina učestvovao je u izvođenju vežbi i praktične nastave iz sledećih predmeta: Mehanika fluida, Osnove turbomašina, Hidromašinska oprema, Hidroenergetska postrojenja, Hidraulične mašine, Pumpe i pumpna postrojenja, Male hidroelektrane i vetrogeneratori, Obnovljivi izvori energije i Energetika. Pored izvođenja nastave, u proteklim godinama, sa dosta uspeha, predvodio je tim studenata na Mašinijadama u takmičenju iz Mehanike fluida. Decembra 2017. godine, na dan proslave godišnjice fakulteta, nagrađen je zahvalnicom Mašinskog fakulteta u Nišu, za doprinos u nastavnim i ne nastavnim aktivnostima u protekloj školskoj godini. Trenutno je angažovan kao istraživač na sledećim projektima, koje finansira Ministarstvo za nauku i tehnološki razvoj: "Istraživanje magnetnohidrodinamičkih (MHD) strujanja u okolini tela, procepima i kanalima i primena u

razvoju MHD pumpi" (br. projekta 35016, rukovodilac dr Živojin Stamenković) i "Revitalizacija postojećih i projektovanje novih mikro i mini hidroelektrana (od 100 do 1000 kW), na teritoriji južne i jugoistočne Srbije" (br. projekta 33040, rukovodilac dr Dragica Milenković). Ima objavljenih devet radova u časopisu sa SCI liste, kao i više desetina radova na inostranim i domaćim naučnim skupovima.

Dobro se služi sledećim softverima: ANSYS CFX, AFT Fathom, AFT Impuls, Origin, Adobe Photoshop, Corel Draw, MATLAB i Solid works, a odlično govori i piše Engleski jezik, dok poseduje osnovno znanje Ruskog jezika.

Oženjen je i otac jednog maloletnog deteta.