UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU

Jelena D. Petrović

Magnetno-hidrodinamička strujanja i prenos toplote u poroznim sredinama

doktorska disertacija

Niš, 2019

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF MECHANICAL
ENGINEERING IN NIŠ

Jelena D. Petrović

Magnetohydrodynamic Flow and Heat Transfer in Porous Media

doctoral dissertation

Niš, 2019

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Mentor: dr Ţivojin M. Stamneković, docent, Univerzitet u Nišu, Mašinski Faklutet u Nišu

Naziv: **Magnetno-hidrodinamička strujanja i prenos toplote u poroznim sredinama**

Rezime: Cilj ove disertacije je definisanje odgovarajućih matematičkih modela kojima se opisuje strujanje i prenos toplote u poroznoj sredini uopštenjem klasičnog Navier-Stokes-ovog modela kako bi se modelirao uticaj osobina porozne sredine. Imajući u vidu značaj izučavanja magnetno-hidrodinamičkih (MHD) strujanja kako teorijski tako i primenjeni, analizirano je MHD strujanje i prenos toplote jednog i dva fluida u kanalima unutar kojih je sredina porozna.

U **prvom poglavlju** disertacije nakon pregleda istraţivanja obrazloţen je motiv i predmet, a zatim su definisani ciljevi istraţivanja. U **drugom poglavlju** je izvršeno matematičko modeliranje problema MHD strujanja, transporta mase i toplote. U **trećem poglavlju** se razmatraju, prvo, slučaj MHD strujanja, prenosa mase i toplote u horizontalnom poroznom kanalu u kome struji jedan fluid. Uzet je uticaj spoljašnjeg homogenog magnetnog polja upravnog na zidove kanala i uticaj spoljašnjeg homogenog električnog polja.U **četvrtom poglavlju** se razmatra strujanje dva fluida koji se ne mešaju u kanalu čiji su zidovi dve horizontalne izolovane ploče. Ploče su na konstantnim a različitim temperaturama. U **petom poglavlju** razmatraju se četiri različita modela MHD strujanja, transporta mase i toplote U **šestom poglavlju** ovog rada istraţivano je MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u kanalu nagnutom u odnosu na horizontalnu ravan. U **sedmom poglavlju** su uraĎene numeričke simulacije korišćenjem savremenog softvera Ansys CFX. Simulacije su date za dva razmatrana modela. Prvi je horizontalni kanal u kome je porozna sredina, a zatim su dati rezultati numeričkih simulacija i za kosi kanal takoĎe sa poroznom sredinom. U svim poglavljima odreĎivani su rasporedi brzine, temperature i pritiska i to uvek u zatvorenom obliku.

Naučna oblast: Mašinsko inţenjerstvo - Teorijska i primenjena mehanika fluida

Naučna disciplina: Magnetno hidrodinamička strujanja fluida

Ključne reči: porozna sredina, MHD, EMHD, strujanje fluida, prenos toplote, CFD, ANSYS

UDK:

CERIF klsifikacija:	P 240, T 210
Tip odabrane licence:	

DATA ON DOCTORAL DISSERTATION

Doctoral Supervisor: dr Ţivojin M. Stamneković, assistant professor, Univerzity of Niš, Faculty of Mechanical Engineering

Title: **Magnetohydrodynamic Flow and Heat Transfer in Porous Media**

Abstract: The aim of this dissertation is to define mathematical models that describe flow and heat transfer in porous media by generalizing the classical Navier-Stokes model in order to model the influence of porous media properties. Considering the importance of both theoretical and applied research of magnetohydrodynamic (MHD) flow, the dissertation includes the analysis of MHD one-fluid and two-fluidflow and heat transfer within channels containing a porous medium.

The first chapter begins with the research overview, followed by the explanation of what motivated the research, the introduction of the subject matter, and the definition of research objectives.**The second chapter** deals with the mathematical modelling of MHD flow and mass and heat transfer. **The third chapter** first discusses a case of MHD one-fluid flow and mass and heat transfer in a horizontal porous channel. **The fourth chapter** considers the flow of two non-mixing fluids in a channel with two horizontal insulated plates serving as walls. The plates are at constant but different temperatures. **The fifth chapter** considers four different models of MHD flow and mass and heat transfer. **The sixth chapter** investigates MHD two-fluid flow and heat transfer in a channel inclined in relation to the horizontal plane. **The seventh chapter** presents numerical simulations conducted using a modern software tool called Ansys CFX. The simulations are provided for two analyzed models. The first one involves a horizontal channel containing a porous medium, while the second one involves an inclined channel containing a porous medium. The distributions of velocity, temperature, and pressure were determined in all chapters, always in closed form.

Scientific Field: Mechanical Engineering - Theoretical and applied fluid mechanics

Scientific Discipline: Magnetohydrodynamic fluid flow

Key Words: porous medium, MHD, EMHD, fluid flow, heat transfer, CFD, ANSYS

UDC:	
CERIF Classification:	P 240, T 210
Creative Commons License Type:	

Sadržaj

Sadržaj ... **7**
1. Uvod ... **11**
1.1 Istorijski pregled istraţ ivanja ... 13
1.2 Istraţ ivanja strujanja u poroznim sredinama ... 16
1.3 Peristaltički transort i porozna sredina ... 21
1.4 Biomehanika fluida u poroznim sredinama ... 22
1.5 MHD strujanja u poroznim sredinama ... 23
1.6 Predmet istraţ ivanja u disertaciji ... 34
2. Matematički model ... **39**
2.1 Geometrijske karakteristike poroznih materijala ... 39
2.2 Karakteristike strujanja u poroznim sredinama ... 40
2.3 Zapreminsko osrednjavanje ... 42
2.4 Makroskopska jednačina kontinuiteta ... 46
2.5. Makroskopska jednačina impulsa ... 47
2.6 Makroskopska energijska jednačina ... 49
2.7 Osnovne jednačine elektromagnetike ... 53
3. MHD strujanje fluida i prenos toplote u poroznoj sredini između horizontalnih ploča ... **56**
3.1 MHD strujanje i prenos toplote u poroznoj sredini izmeĎu dvehorizontalne nepokretne ploče ... 56
3.1.1 Matematički model ... 57
3.1.2 Raspored brzine strujanja fluida ... 60
3.1.3 Raspored bezdimenzione temperature ... 63
3.2 MHD strujanje fluida i prenos toplote u poroznoj sredini izmeĎu dvehorizontalne ploče od kojih je gornja pokretna ... 66
3.2.1 Matematički model ... 67
3.3.2 Raspored brzine strujanja fluida ... 68
3.2.3 Raspored bezdimenzione temperature ... 70
3.3 Poiseuille-ovo MHD strujanje u poroznoj sredini sa uticajem indukovanog magetnog polja ... 72
3.3.1 Matematički model ... 72
3.3.2 Rasporedi bezdimenzione uzduţ ne brzine i bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja ... 75
3.3.3 Raspored bezdimenzione temperature ... 85

3.4 Poiseuille-Couette-ovo MHD strujanje u poroznoj sredini sa uticajem indukovanog magetnog polja 90

3.4.1 Matematički model 91

3.4.2 Rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja 92

3.4.3 Raspored bezdimenzione temperature 102

3.5 MHD strujanje i prenos toplote izmeĐu horizontalnih elektroprovodnih ploča sa uticajem indukovanog magnetnog polja 108

3.5.1 Matematički model 108

3.5.2 Analiza rezultata 112

3.6 Zaključak poglavlja 119

4. Poiseeule-Couette-ovo MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u poroznoj sredini 124

4.1 Poiseeule-ovo MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u poroznoj sredini 124

4.1.1 Matematički model 124

4.1.2 Rasporedi brzine, temperature i pritiska u kanalu 126

4.1.3 Analiza rezultata 129

4.2 Poiseeule-Couette-ovo MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u poroznoj sredini u horizontalnom kanalu 136

4.2.1 Matematički model 136

4.2.2 Rasporedi brzine, temperature i pritiska u kanalu 138

4.2.3 Analiza rezultata 139

4.3 Zaključak poglavlja 145

5. Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini 148

5.1 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini izmeĐu nagnutih paralelnih ploča 148

5.1.1 Matematički model 148

5.1.2 Rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione temperature i bezdimenzionog pritiska 151

5.1.3 Analiza rezultata 153

5.2 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini izmeĐu nagnutih paralelnih ploča od kojih je gornja pokretna 160

5.2.1 Matematički model 160

5.2.2 Rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione temperature i bezdimenzionog pritiska 162

5.2.3 Analiza rezultata 162

5.3 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini izmeĎu nagnutih paralelnih ploča sa indukovanim magnetnim poljem ... 169

5.3.1 Matematički model ... 169

5.3.2 Rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja ... 172

5.3.3 Rasporedi bezdimenzione temperature i pritiska ... 176

5.3.4 Analiza rezultata ... 181

5.4 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini izmeĎu nagnutih paralelnih ploča od kojih je gornja pokretna sa indukovanim magnetnim poljem ... 194

5.4.1 Matematički model ... 194

5.4.2 Rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja, temperature i pritiska ... 196

5.4.3 Analiza rezultata ... 199

5.5 Zaključak poglavlja ... 205

6. Slobodno konvektivno MHD strujanje dva fluida u poroznoj sredini ... 208

6.1 Slobodno konvektivno MHD strujanje dva fluida u poroznoj sredini izmeĎu nagnutih paralelnih ploča ... 208

6.1.1 Matematički model ... 209

6.1.2 Rasporedi brzine, temperature i pritiska u kanalu ... 210

6.1.3 Analiza rezultata ... 212

6.2 Zaključak poglavlja ... 224

7. Numeričke simulacije ... 227

7.1 Izbor softvera za simulacije ... 227

7. 2 Formiranje modela i mreţe za simulacije ... 228

7.3 Rezultati numeričkih simulacija za horizontalni porozni kanal ... 231

7.4 Rezultati numeričkih simulacija za kosi porozni kanal ... 236

Literatura ... 243

Biografija autora ... 257

Poglavlje 1

Poglavlje 1

1. Uvod

Porozna sredina je heterogeni sistem koji se sastoji od čvrste matrice (skeleta, nosača) sa svojim šupljinama (porama), relativno malih dimenzija u poreĎenju sa karakterističnim dimenzijama matrice, ispunjenih fluidom. Ova sredina se moţe tretirati kao kontinuum pravilnim sagledavanjem uloge svake faze (čvrste i fluidne) pri transportu kroz ovaj sistem faza.

Imajući u vidu gornju definiciju porozne sredine lako se zaključuje da postoje prirodne (stene, sedimenti, šljunak, pesak, glina, drvo, kardiovaskularni sistem, ljudska pluća, ţučni kanal, ţučna kesa, jednjak, gastrointestinalni trakt, reproduktivni trakt…) i veštačke (tečni kompoziti, izolacija reaktora, MHD generatori i akumulatori, skladišta podzemnih voda, porozna leţišta, peristaltičke pumpe…) porozne sredine.

Zbog velike prisutnosti poroznih sredina u prirodi rano su započeta njihova istraţivanja, najpre eksperimentalna, a onda i teorijska. Henry Darcy je 1855. i 1856. godine rukovodio ekipom koja je eksperimentalno ispitivala strujanje vode kroz pesak. Koristeći ove eksperimente došli su do rezultata da je brzina strujanja vode kroz pesak proporcionalna gradijentu pritiska, a koeficijent proporcionalnosti je propustljivost peska čija vrednost zavisi od karakteristika fluida (viskoznosti, temperature…). Ovaj rezultat je objavljen u radu Darcy [1] i postao je poznat kao Darcy-jev zakon. Iako je Darcy-jev zakon inicijalno razvijen za opisivanje strujanja kroz pesak, od tada je generalizovan u različite situacije i danas se široko koristi.

Iako je Darcy-jev zakon ustanovljen eksperimentalnim istraţivanjima njegovo publikovanje je praktično omogućilo i iniciralo teorijska istraţivanja strujanja fluida u poroznoj sredini. Detaljno je preispitivan Darcy-jev model i ustanovljeno je da nije dovoljno dobar za strujanje tečnosti sa velikim brzinama i gasova sa vrlo velikim i vrlo malim brzinama i da je u porama brzina veća od Darcy-jeve brzine za onoliko puta kolika je recipročna vrednost poroznosti sredine.

Ovim su strujanja fluida u poroznim sredinama podeljena na Darcy-jeva tj. ona za koje je zadovoljen Darcy-jev zakon i ne-Darcy-jeva za koja on nije zadovoljen. Bilo je potrebno formirati kriterijum koji će omogućiti razdvajanje strujanja u poroznim sredinama na ove dve vrste. Logično je bilo da se za to iskoriste Reynolds-ov i Forchheimer-ov broj, što je i učinjeno, ali ovim nisu dobijeni dosledni rezultati, što se pripisuje različitim verzijama definisanja ovih kriterijuma. Zhengwen Zeng i Reid Grigg [2] su izvršili revidiranje

Forchheimer-ovog broja, koji uzima u obzir istovremeno hidrauličke karakteristike viskoznog i inercijalnog reţ ima strujanja i predloţ ili ga kao kriterijum za identifikaciju ne-Darcy-jevog strujanja u poroznim sredinama. Fizički, ovaj revidirani Forchheimer-ov broj ima prednost u jasnom značenju i široj primenljivosti.

1.1 Istorijski pregled istraživanja

Dalje, u ovom poglavlju, više u obliku istorijskog pregleda, daju se neki vaţniji rezultati istraţivanja u ovoj oblasti i rezultati drugih istraţivanja koji su direktno uticali na razvoj istraţivanja u ovoj oblasti za vremenski period od 1800. do 1990. godine. Za ovaj pregled koristi se, uglavnom, materijal koji je dao M. Kovlany [3] i koji je ovaj period podelio na potperiode, kako sam kaţe, sasvim proizvoljno, što znači da bi i neka druga podela bila sasvim prihvatljiva.

U prvih pedeset godina posmatranog vremenskog perioda postignuti su sledeći značajni rezultati: 1805. godine Young je izvršio kategorizaciju razdelnih površi izmeĎu dva fluida u kontaktu i uveo površinske napone [4]; 1806. godine Laplace je istraţio stanje statičke ravnoteţe za proizvoljnu tačku razdelne površi dva fluida u kontaktu [4]; Navier 1827, Stokes 1845, Poisson 1931, Saint Venant 1943. godine izveli su jednačinu impulsa za kretanje viskoznog fluida, koja je poznata kao Navier-Stokes-ova jednačina [5]; 1829. godine Graham je istraţio difuziju mase u gasovima [6]; Hagen 1839. i Poiseuille 1840. godine izveli su jednačinu za strujanje fluida u cevi [5].

Henry Darcy
(1803-1858)

U periodu od 1850. do 1875. godine postignuti su sledeći rezultati: 1855. godine Fick je uspostavio vezu izmeĎu gradijenta koncentracije i fluksa difuzije [6]; 1856. godine Darcy [1] je formulisao svoj poznati zakon koji daje vezu izmeĎu brzine strujanja i gradijenta pritiska u poroznoj sredini; Maxwell je 1859. godine odredio raspodelu brzine u gasovima, a 1860. godine difuziju mase binarnog gasa koristeći molekularnu teoriju [6]; Maragoni je

1872.godine izučio termokapilarnu konvekciju koja je poznata kao Marangoni-jev efekat [7]; 1878. godine Gibbs je izučio termodinamički tretman razdelne površi izmeĎu tečnosti i njenog isparenja (pare) [4].

Iz poslednje četvrtine devetnaestog veka zapaţaju se sledeća istraţivanja: Maxwell-ova efektivna provodljivost 1873. [8]; 1883. godine Reynolds je izvršio eksperiment kojim se utvrĎuje reţim strujanja [9] i odredio izraz za otpor strujanju.

U prvih deset godina dvadesetog veka izdvajaju se sledeća istraţivanja: Prandtl-ova teorija graničnog sloja 1904. godine [10]; 1909.godine Kundsen je eksperimentalno istraţivao strujanje razreĎenih gasova u poroznim sredinama [11].

Jean Leonard Marie Poiseuille
(1797-1869)

Iz perioda drugih deset godina dvadesetog veka zapaţaju se sledeća istraţivanja i rezultati: 1911. godine Griffith-ova zapaţanja o istovremenoj hidrodinamičkoj disperziji i molekularnoj difuziji [12]; 1914. godine Prandtl-ov eksperiment spoljašnjeg strujanja [5]; 1916. godine Langmur-ova postulat o adsorpciji koji govori o dinamičkoj ravnoteţi brzina dolaska i odlaska molekula na površ [13].

U periodu treće decenije dvadesetog veka izdvaja se Tollmien-ovo odreĎivanje kritične vrednosti Reynolds-ovog broja za strujanje fluida preko ravne ploče iz 1921. godine [5].

U toku četvrte decenije dvadesetog veka izdvajaju se sledeća istraţivanja: jednačina propustljivosti zasnovana na odreĎenom području koju su formirali Carman 1937. godine i Kozeny 1927. godine [14]; zatim Muskat-ovo istraţivanje dvofaznog strujanja u poroznim sredinama sa efektivnim propustljivostima za svaku fazu koje su uradili Muskat i Meres 1936. godine i Muskat i saradnici 1937. godine [15].

U petoj deceniji dvadesetog veka izdvajaju se sledeća istraţivanja i rezultati: Leverett [16] je 1941. godine uveo funkciju smanjenja idealnog kapilarnog pritiska za korelaciju sa kapilarnim pritiskom; Buckley-Leverett-ova teorija frontalnog pomeranja za nestalna dvofazna strujanja sa iznenadnom promenom zasićenosti ulaza 1942. godine [17]; Brinkman-ova modifikacija Darcy-jevog zakona i uvoĎenjeefektivne viskoznosti 1947. godine [18,19].

U šestoj deceniji dvadesetog veka zapaţaju se sledeća istraţivanja i rezultati: 1952. godine Ergun je Darcy-jev zakon proširio članom koji predstavlja mikroskopski inercijski efekat [20]; Grootenhuis i saradnici su 1952. godine [21] izvršili merenje efektivne toplotne provodljivosti sinterovanih metala; Baron [22] je 1952. godine uveo transferzalnu i uzduţnu disperziju u poroznu sredinu; Scheidegger [23] je 1954. godine dao statistički postupak za odreĎivanje brzine disperzije; hidrodinamičku disperziju u cevima izučavali su Tayor [24] 1953. godine i Aris [25] 1956. godine; De Josselin De Jang [26] 1958. i Saffman [27] 1959. godine proučavali su mehaničku i hidrodinamičku disperziju u poroznim sredinama.

U toku sedme decenije dvadesetog veka zapaţena su sledeća istraţivanja: 1961. godine Luikov [28] je istraţivao strujanje i prenos toplote dvofaznog strujanja u poroznoj sredini; Chen i Churchill [29] su 1963. godine izvršili merenje karakteristika vlaknaste i penaste izolacije; Weekman i Myers [30] su 1965. godine odredili prvu korelaciju za ukupnu toplotnu provodljivost i tenzor za dvofazno strujanje u poroznoj sredini; 1967. godine Beavers i Joseph [31] su razmatrali semiempirijsku razdelnu površ (porozna-ravna površ) kao granični uslov; Mason [32] i Slattery [33] su 1967. godine formirali konstitutivne jednačine za difuziju gasova u poroznim sredinama.

U osmoj deceniji dvadesetog veka izdvajaju se sledeća istraţivanja: Horn [34] je 1971. godine iskoristio tehniku generalizacije Aris-ove [25] momentne analize za odreĎivanje koeficijenta disperzije; 1970. godine Slattery [33] i 1973. godine Whitaker [35] analizirali su dvofazno strujanje u poroznoj sredini korišćenjem zapreminskog osrednjavanja jednačina u tački; Sondergeld i Turcotte [36] su 1977. godine eksperimentalno istraţivali isparavanje sloja tečnosti koji se zagreva odozdo.

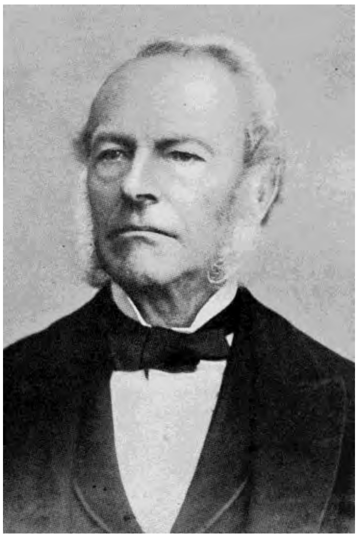
Devetu deceniju dvadesetog veka obeleţila su sledeća istraţivanja i rezultati: Brenner [37] je 1980. godine primenio Horn-sovu [34] generalnu analizu disperzije na prostorno periodičke strukture; Brewster i Tien [38] su 1982. godine istraţivali mapiranje nezavisnog naspram zavisnog radiacionog rasejanja za neapsorbujuće razreĎene suspenzije; 1984. godine Carbonell i Whitaker [39] su formulisali i numerički rešili tenzor disperzije za dvodimenzionalnu sredinu; 1985. godine Koch i Brady [40] i 1989. godine Koch i saradnici [41] su koristili pribliţnu hidrodinamičku teoriju zasnovanu na čestici za odreĎivanjetenzora disipacije; 1991. godine Singh i Koviany [42] su izučavali "gubitak" toplotne energije pri prenosu toplote zračenjem.

1.2 Istraživanja strujanja u poroznim sredinama

Istraţivanja u poslednjoj deceniji XX veka i početkom XXI veka nastavljaju se u oblastima: opšte karakteristike i modeliranje poroznih materijala, prinudna konvekcija u poroznoj sredini, strujanja indukovana prinudnom kondukcijom i vibracijama, viskozna disipacija, turbulencija u poroznoj sredini, geotermalna proizvodnja, sagorevanje i biokonvekcija u poroznoj sredini što se moţe zaključiti i iz monografije koju je publikovao Vafai [43] 2005. godine.

Tako je 1991. godine Nield [44] izrazio izvesnu sumnju u Brinkman-Farchheimer jednačinu da ona moţe adekvatno da modelira strujanje u poroznoj sredini i na razdelnoj površi. Pokazao je da odreĎeni pojmovi koji se često koriste u jednačini zahtevaju modifikaciju i da postoje problemi kada se ova jednačina koristi za odreĎene granične uslove.

Fogler [45] je 1992. godine objavio monografiju u kojoj ima dovoljno podataka o katalitičkim i inertnim reaktorima, filtriranju, sušenju, ureĎajima za smanjenje zagaĎenja vazduha pri sagorevanju proizvoda, adsorbciji/desorbciji na površinama itd.



Sir George Gabriel Stokes
(1819-1903)

Godine 1993. Alberto i saradnici [46] su dali opšti pristup rasutoj i površinskoj difuziji korišćenjem zapreminskog osrednjavanja. Ova analiza je pored zapreminskog osrednjavanja obuhvatila i površinsko osrednjavanje. Formulisan je i problem zatvaranja odgovarajućeg sistema jednačina. Sračunavanja su izvedena pomoću Chang-ove jednačine za ćeliju, što je dovodilo do Maxwell-ovog modela.

Quintard i Whitaker [47] su 1994. godine razvili matematički model za homogene porozne sredine korišćenjem metode zapreminskog osrednjavanja. Makroskopske jednačine uključuju tenzor disperzije na koji utiču proces prenosa mase, dodatni konvektivni transport i maseni fluks.

Vafai i Kim [48] su 1995. godine, u svom radu, analizirali nekoliko teorijskih tačaka koje se odnose na impulsnu jednačinu za poroznu sredinu. Pokazali su da je u izvornom radu predloţeno nekoliko nebitnih činjenica. Razdelnu površ porozna sredina / čist fluid najbolje je opisati Brinkman-Forchheimer-ovom jednačinom tj. proširenom Darcy-jevom jednačinom i kontinuitetom brzine i napona. Efekat varijacije poroznosti nije uticajan za matricu sa visokom poroznošću, ali ga treba uzeti u obzir za gustu poroznu sredinu.

Godine 1996. Khallouf i saradnici [49] su numerički proučavali konvektivne oscilacije u poroznoj sredini. Sredina je dvodimenzionalna, ispunjena zasićenom poroznom supstancijom i izloţena je linearnim harmonijskim oscilacijama u vertikalnom pravcu. Formulacija je zasnovana na Darcy-Boussinesq-ovom modelu. Darcy-Boussinesq-ove jednačine su rešene korišćenjem pseudo-spektralne Chebyshev-ljeve metode kolokacije.

Malashetty i Padmavathi [50] su 1997. godine izučavali stabilnost tečnog zasićenog horizontalnog sloja zagrejanog odozdo, pri čemu je vremenski promenljiva sila potiska generisana gravitacionom modulacijom. Analizirana je linearna stabilnost kako bi se pokazalo da gravitaciona modulacija moţe značajno da utiče na granice stabilnosti sistema. Za sračunavanje kritičnih vrednosti Reyleigh-ovog broja i talasnog broja koristi se metoda zasnovana na maloj amplitudi modulacije. UtvrĎeno je da niske frekvencije talasa mogu imati značajan uticaj na stabilnost sistema.

Wood i Whitaker [51] su 1998. godine razmatrali model biofilma pretpostavljajući da je on kontinuum. Izučavane su intracelularna i ekstracelularna faza korišćenjem metode zapreminskog osrednjavanja i dobijene su transportne jednačine za biofilm. Ovo je omogućilo identifikaciju tri reţima. Prvi je jedno-jednačinski model koji vaţi kada je zadovoljen princip lokalne masene ravnoteţe; drugi je dvo-jednačinski model koji nije ograničen principom lokalne masene ravnoteţe; a treći je pseudo-jednačinski model. Data su i ograničenja koja identifikuju granice validnosti ova tri modela.

Godine 1999. Nield i saradnici [52] razmatrali su strujanje nestišljivog fluida u kanalu izmeĎu paralelnih ploča. Termički granični uslovi su simetrični, sa uniformnim toplotnim fluksom. Pretpostavljeno je da je Peclet-ov broj dovoljno veliki kako bi se mogla zanemariti aksijalna termička provodljivost.

Tashtoush [53] je 2000. godine uveo analitičko rešenje za efekat viskozne disipacije za mešovito konvektivno strujanje i prenos toplote, oko izotermskog vertikalnog zida ugraĎenog u Darcy i ne-Darcy poroznu sredinu sa uniformnom brzinom slobodne struje. Analiziran je efekat viskozne disipacije, u oba reţima, za spoljašnja strujanja istih i suprotnih smerova.

Istraţivanja su intenzivna i početkom XXI veka. Istraţuju se i ranije uočeni problemi, a otvaraju se i novi savremeniji problemi. Tako su Kuznetsov i Nield [54] 2001. godine istraţivali uticaj poprečne varijacije propustljivosti i toplotne provodljivosti na potpuno razvijenu prinudnu konvekciju u kanalu paralelnih zidova i kruţnom kanalu ispunjenom zasićenom poroznom supstancijom. Analiza je analitička, a sprovedena je na Darcy-jevom modelu za slučaj da je na granicama stalan toplotni fluks i stalna temperatura. Razmatra se slučaj sredine sa tri i dva sloja sa susednim čvrstim slojem.

Celli i saradnici [55] su istraţivali 2002. godine dvodimenzionalni prinudno konvektivni granični sloj u poroznoj sredini. Pretpostavljeno je da su čvrsta i fluidna faza podloţne lokalnoj toplotnoj neravnoteţi. Usvojene su dve jednačine za transport toplote, po jedna za svaku fazu. Za dovoljno velike brzine osnovne struje, termička polja su opisivana korišćenjem aproksimacija graničnog sloja, a dobijeni sistem paraboličkih diferencijalnih jednačina analiziran je analitički i numerički. Pokazano je da su efekti lokalne termičke neravnoteţe najizraţeniji u okolini prednje zaustavne tačke, ali se smanjuju sa povećanjem rastojanja od zaustavne tačke i lokalna termička ravnoteţa se postiţe na velikim rastojanjima.

Nield i saradnici [56] su 2003. godine primenili modifikovanu Graetz-ovu metodologiju za istraţivanje termičkog razvoja prinudne konvekcije u kanalu sa paralelnim zidovima koji je ispunjen zasićenom poroznom supstancijom. Zidovi kanala se odrţavaju na konstantnim temperaturama. Analiziran je Brinkman-ov model, a uzeti su u obzir efekti aksijalne toplotne provodljivosti i viskozne disipacije. Analiza je dovela do izraza za lokalni Nusselt-ov broj, kao funkciju uzduţne bezdimenzione koordinate, Darcy-jev broj, Peclet-ov broj i Brinkman-ov broj.

Duval i saradnici [57] su 2004. godine zapazili da je za strujanje fluidnog para sa promenom faze u poroznoj sredini, pretpostavka lokalne termičke ravnoteţe previše restriktivna i ne moţe biti vaţeća. Zato su oni u ovom radu, koristeći metodu zapreminskog osrednjavanja, došli do makroskopskog matematičkog modela sa tri temperature, uzimajući u obzir termičku ravnoteţu izmeĎu tri faze. Dobijen je izraz za makroskopsku brzinu isparavanja u zavisnosti od makroskopskih temperatura i svojstava fluida. Dobijeni rezultati su uporeĎeni sa rezultatima simulacije i dobijeno je njihovo dobro poklapanje što potvrĎuje valjanost ove metode i predlaţe je za praktičnu primenu.

Ludwig Prandtl
(1875-1953)

Borujerdi i Nazari [58] su 2005. godine istraţivali kriterijume za validnost pretpostavke lokalne termičke ravnoteţe. Istraţivali su na primeru strujanja fluida i prenosa toplote u kanalu, izmeĎu dve paralelne ploče, ispunjenog zasićenom poroznom supstancijom, sa neuravnoteţenim graničnim uslovima. Model od dve jednačine koristi se za opisivanje transporta energije fluida i čvrste supstancije. Razvijena je numerička metoda konačnih zapremina za rešavanje simultanih energijskih jednačina, a ne-Darcy-jevi efekti se razmatraju u jednačini impulsa. Predloţena je pogodna bezdimenziona jednačina za širok spektar Peclet-ovih brojeva i toplotne provodnosti. Ova jednačina prikazuje temperatursku razliku izmeĎu čvrstih i fluidnih faza.

U ovom periodu veliki broj istraţivača, a neki od njih su Aregba sa saradnicima [59], Bihercz i Beke [60], Aregba i Nadeau [61], bavio se istraţivanjem sušenja debelih slojeva prehrambenih proizvoda. Razmatrali su zrnaste proizvode, kao što su pirinač, ţitarice, kukuruz. Pretpostavljali su da je brzina zagrejanog vazduha konstantna.

Bennamon i Belhamri [62] su 2008. godine razmatrali sušenje voća, konkretno groţĎa Sebi su postavili dva glavna cilja, prvi je da prouče ponašanje sloja groţĎa osušenog u prinudnom konvektivnom sušaču. Problem su izučavali korišćenjem Darcy-jevog zakona, a brzina vazduha nije konstantna. Drugi cilj je bio da se utvrdi uticaj spoljašnjih uslova, kao što su brzina, temperatura i vlaţnost, na ponašanje različitih osušenih slojeva.

Problemi sa višefaznim strujanjem i prenosom toplote i višekomponentnim transportom mase javljaju se u više naučnih i inţenjerskih disciplina i vaţni su praksi, na primer, u eksploataciji i transportu nafte. Značajan broj ovih problema, od praktičnog interesa, su neustaljeni. Neustaljenost moţe biti izazvana promenom brzine slobodne struje ili temperaturom površi ili i jednim i drugim. Umavati i saradnici [63] su 2009. godine izučavali nestacionarno oscilatorno strujanje i prenos toplote u horizontalnom kanalu kompozitno porozne sredine. Preko beskonačno dugačkog horizonalnog kompozitnog kanala odvija se nestacionarno laminarno strujanje viskoznog fluida. Strujanje je modelirano pomoću Darcy-Brinkman-ove jednačine. U energijsku jednačinu su uključene viskozna i Darcy-jeva disipacija. Dobijene parcijalne diferencijalne jednačine rešene su analitički korišćenjem dve harmonijske i neharmonijske funkcije za oba regiona kanala.

U literaturi mnogi istraţivači izučavaju ponašanje fluida pretpostavljajući da su svojstva fluida i karakteristike porozne sredine nepromenljive veličine. MeĎutim, u većini realnih situacija svojstva fluida se menjaju sa promenom temperature i koncentracije. Pokazano je da varijacije poroznosti i propustljivosti porozne sredine maksimalno utiču na fluide i na prenos toplote kroz poroznu sredinu.

Astanina [64] i saradnici su 2015. godine numerički istraţivali neustaljenu prirodnu konvekciju, sa viskoznošću koja zavisi od temperature, unutar kvadratnog poroznog kanala. Vertikalni zidovi kanala su na konstantnim, ali različitim, temperaturama, dok su horizontalni zidovi adijabatski. Matematički model je formulisan jednačinama u bezdimenzionom obliku sa bezdimenzionom strujnom funkcijom i bezdimenzionom temperaturom. Za rešavanje dobijenih jednačina korišćene su implicitne šeme konačnih razlika. Analiziran je uticaj Reyleigh-ovog broja, Darcy-jevog broja, parametra varijacije viskoznosti i bezdimenzionog vremena na transport mase i toplote.

Babu i saradnici [65] su 2018. godine istraţivali numerički dvostruko difuziono mešovito konvektivno strujanje nestišljivog viskoznog fluida kroz vertikalnu grejnu ploču ugraĎenu u ne-Darcy-jevu poroznu sredinu pod uticajem promenljivih karakteristika fluida. Jednačine su modelirane za strujanje u dvostrukom difuzionom graničnom sloju. Analizirali su brzinu strujanja, temperaturu, koncentraciju, trenje, intenzitet prenosa mase i toplote za različite fizičke parametre. Dobijeni rezultati su uporeĎeni sa rezultatima u ranije objavljenim radovima i utvrĎeno je da su u saglasnosti do šest decimalnih mesta tačnosti.

Hamdan i Kamel [66] su 2011. godine izučavali strujanje fluida kroz ravne propustljive porozne slojeve. Propustljivost je smatrana promenljivom i korišćeni su oblici promene propustljivosti koji su ranije predloţili Rees i Pop [67], Alloni i saradnici [68], Hassanien i saradnici [69] i Nield i Kuznetsov [70].

Zaytoon i saradnici [71] su 2016. godine razmatrali strujanje kroz konačan kanal ograničen odozdo poroznim slojem koji je konačne ili beskonačne dubine. U poroznom sloju vaţi Darcy-jeva jednačina pod predpostavkom promenljive propustljivosti. OdreĎen je oblik promenljive propustljivosti kako bi se ostvarila kontinuirana promena rasporeda brzine preko kanala i sloja, a da se ne koristi koncept klizanja.

1.3 Peristaltički transort i porozna sredina

Peristaltički transport je poznat transport fluida koji je izazvan progresivnim talasom kontrakcije ili ekspanzije područja duţ uzduţne cevi koja sadrţi fluid. Ideju o peristaltičkom transportu sa matematičke tačke gledišta prvi je koristio Lathem [72] još 1966. godine. Zbog velikih primena u fiziologiji i industriji, problemi peristaltičkog strujanja su bili predmet izučavanja velikog broja istraţivača, a i danas su vrlo aktuelni. Tako je Haroun [73] 2007. godine izučavao peristaltički transport fluida četvrtog stepena u nagnutom asimetričnom kanalu uzimajući u obzir dugu talasnu duţinu.

Hayat i saradnici [74] su 2008. godine razmatrali efekte klizanja na peristaltičko strujanje viskoznog fluida u poroznoj sredini. U ovom modelu korišćena je aproksimacija velike talasne duţine.

Mekheimer i Elmabond [75] su 2008. godine teorijski istraţivali peristaltički transport kroz poroznu sredinu u anulusu ispunjenim nestišljivim njutnovskim fluidom. Unutrašnja cev je uniformna i kruta, dok spoljašnja epruveta ima sinusoidni talas koji se prostire niz zid. Ispituje se strujanje u referentnom talasnom okviru koji se kreće brzinom talasa. OdreĎeni su efekti porozne sredine i endoskopa na brzinu, promena pritiska duţ pravca strujanja i sile trenja na spoljašnjem i unutrašnjem zidu.

Vajravelu i saradnici [76] su 2016. godine izučavali peristaltički transport nenjutnovskog fluida u asimetričnom kanalu koji je izazvan sinusnim peristaltičkim talasima na fleksibilnim zidovima kanala. Koriste se aproksimacije velike talasne duţine i malog Reynolds-ovog broja. Nelinearne jednačine razmatranog problema rešene su metodom perturbacije. Jedan od zaključaka, na osnovu dobijenih rezultata, je da karakteristike strujanja otkrivaju mnoga zanimljiva ponašanja koja zahtevaju dalje istraţivanje fenomena nenjutnovskog fluida, posebno peristaltičkih strujnih fenomena.

Selvi i saradnici [77] su 2017. godine istraţivali efekat prenosa toplote na peristaltički transport Jeffrey fluida u nagnutom poroznom sloju. Problem je formulisan pod predpostavkom velikih talasnih duţina i malih Reynolds-ovih brojeva. Za rešavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koristi se metoda perturbacije. Dobijeni rezultati pokazuju da je uticaj parametra nagiba i parametra propustljivosti na protok značajan. Temperatura se povećeva sa povećenjem parametra nagiba. Diskutovan je i fenomen zaustavljanja.

1.4 Biomehanika fluida u poroznim sredinama

Aktuelna su istraţivanja strujanja krvi u organima ţivotinja i ljudi. Tako su Khaled i Vafai [78] 2003. godine istraţivali strujanje i prenos toplote u biološkim tkivima. Njihov glavni koncept je bio transport u poroznim sredinama koristeći masenu difuziju i različite modele konvektivnog strujanja, kao što su Darcy i Brinkman-ov model. Analizirali su i transport energije u tkivima. Utvrdili su da je teorija poroznih sredina u biološkim tkivima najefikasnija jer sadrţi manje pretpostavki u odnosu na različite biotoplotne modele.

Fu-quan i saradnici [79] su 2007. godine proučavali strujanje krvi u tkivima koristeći model porozne sredine. Prednost ovog modela u odnosu na druge je istraţivanje celokupnih strujnih karakteristika i moţe se koristiti za proučavanje krvotoka kod unutrašnjih organa ţivotinja. Ovde data metoda je nov koristan pristup za izučavanje biomehanike fluida.

Mehmod i saradnici [80] su 2012. godine ispitivali karakteristike neustaljenog dvodimenzionalnog strujanja krvi u obolelom poroznom arterijskom segmentu sa fleksibilnim zidovima. Poroznu sredinu predstavlja lumen koji sadrţi trombove, holesterol i masne pločice. Zapaţeno je da se smanjenjem propustljivosti strujanje veoma usporava, dok se pad pritiska i napon na zidu povećavaju.

Sankar i Nagar [81] su 2013. godine istraţivali strujanje Herschel-Bulkley i Casson fluida za strujanje krvi u cevima ispunjenim homogenom poroznom supstancijom sa konstantnom i sa promenljivom propustljivošću. Zapaţeno je da su protok i napon smicanja veći u slučaju promenljive propustljivosti za oba fluida.

Peyrounette i saradnici [82] su 2018. godine učinili jedan hibridni pristup modelu strujanja krvi u većem obimu u mikrocirkulaciji mozga. Sloj kapilara, tretiran je kao porozna sredina i modeliran je pomoću homogenog kontinuuma. Veća arterijska i venska stabla, koja se ne mogu homogenizovati, tretiraju se kao mreţa meĎusobno povezanih cevi sa detaljnim prikazom njihove prostorne organizacije. Glavni doprinos ovog rada je kreiranje odgovarajućeg modela spajanja na razdelnoj površi ove dve komponente. Pokazano je da ovaj hibridni model vrlo precizno opisuje strujanje krvi na velikim opsezima i daje značajno smanjenje računarskog vremena u odnosu na klasične mreţe. Ovaj rad predstavlja vaţan korak ka velikim simulacijama cerebralnog strujanja krvi i predstavlja osnovu za uvoĎenje dodatnih nivoa sloţenosti u budućnosti.

1.5 MHD strujanja u poroznim sredinama

Istraţivanja strujanja fluida i prenosa toplote u poroznim sredinama pod uticajem spoljašnjeg magnetnog polja, javljaju se počev od osamdesetih godina prethodnog veka. Ova istraţivanja su svakako podstaknuta MHD strujanjima i transportom toplote u poroznim sredinama koja se pojavljuju u više inţenjerskih procesa, kao što su kompaktni izmenjivači toplote, metalurgija, livenje, filtracija tečnih metala, hlaĎenje nuklearnih reaktora, upravljanje fuzijom itd. Na dalje, u ovom uvodu, hronološki se navode neka od mnogobrojnih istraţivanja dostupnih u literaturi.

Godine 1982. Raptis i Kafousias [83] su teorijski istraţivali slobodnu konvekciju i transport mase viskoznog, nestišljivog i elektroprovodnog fluida koji struji kroz poroznu sredinu. Sredina je ograničena polu-beskonačnom, vertikalnom, poroznom pločom kroz koju se uduvava/isisava fluid i na koju deluje upravno homogeno magnetno polje. Toplotni fluks na ploči je konstantan.

Raptis i Perdikis [84] su 1983. godine razmatrali dvodimenzionalno, nestacionarno, slobodno konvektivno strujanje nestišljivog, viskoznog, elektroprovodnog fluida kroz poroznu sredinu. Porozna sredina je ograničena beskonačnom vertikalnom pločom, na koju upravno deluje homogeno spoljašnje magnetno polje. Problem se razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji. Raptis [85] je 1986. godine razmatrao nestacionarno slobodno konvektivno strujanje elektroprovodnog fluida kroz poroznu sredinu ograničenu vertikalnom poroznom pločom. Brzina slobodne struje fluida varira oko srednje konstantne vrednosti. Temperatura ploče je konstantna. Kumar i Prasad [86] su 1989. godine analitički istraţivali karakteristike izvora toplote pri slobodnom konvektivnom strujanju i transportu mase nestišljivog, viskoznog, elektroprovodnog fluida kroz poroznu sredinu pored beskonačne, vertikalne, neprovodne ploče. Normalno na ploču deluje spoljašnje homogeno magnetno polje, a ona se impulsivno dovodi u stanje kretanja.

Osborne Reynolds
(1842-1912)

Ram i Jain [87] su 1990. godine istraţivali raspodele brzine i temperature elektroprovodnog fluida koji prolazi kroz beskonačnu, vertikalnu, poroznu ploču i struji kroz poroznu sredinu u rotirajućem referentnom okviru. Razmatrani su slučajevi kada je spoljašnje magnetno polje upravno na slobodnu struju i kada gradi ugao α sa vertikalnim pravcem.

Jha [88] je 1991. godine proučavao MHD slobodnu konvekciju i transport mase strujanja pored jednako ubrzane vertikalne ploče kroz poroznu sredinu. Prisutno spoljašnje magnetno polje kreće se zajedno sa pločom i na isti način.

Aldoss i saradnici [89] su 1995. godine razmatrali mešovitu konvekciju na vertikalnoj ravnoj ploči u poroznoj sredini. Na ploču deluje upravno homogeno magnetno polje. Koristi se ne-Darcy-jev model koji uključuje inerciju i granične efekte. Chamhka [90] je 1996. godine razmatrao ne-Darcy-jevu MHD slobodnu konvekciju na vertikalnom konusu i klinu koji se nalaze u poroznoj sredini. Temperatura na konusu i klinu je stepena funkcija uzduţne koordinate. Problem je rešen numerički korišćenjem implicitne iterativne metode konačnih razlika. Bian sa saradnicima [91] je 1996. godine istraţivao uticaj magnetnog polja na slobodnu konvekciju u nagnutoj pravougaonoj poroznoj šupljini ispunjenoj elektroprovodnim fluidom. Spoljašnje primenjeno magnetno polje deluje normalno na zagrejane zidove. Porozna sredina je modelirana po Darcy-jevom zakonu. Camkha [92] je 1997.godine istraţivao problem MHD slobodno konvektivnog strujanja elektroprovodnog fluida duţ vertikalne ploče ugraĎene u termički slojevitu poroznu sredinu. Prisutno spoljašnje magnetno polje je homogeno i upravno na ploču. Osnovne jednačine koje sadrţe Darcy-jev efekat i ne-Darcy-jev efekat, Hartmann-ov i Hall-ov efekat, MHD i termičku slojevitost, rešene su numerički korišćenjem metode konačnih razlika. Alagoa i saradnici [93] su 1998. godine rešili problem slobodne MHD konvekcije sa prenosom toplote zračenjem u poroznoj sredini. Brzina usisavanja fluida je funkcija vremena. Pretpostavljeno je da fluks momenta i temperature slabo zavise od vremena. Problem je rešen asimptotskom aproksimacijom.

Chamkha i Khaled [94] su 2000. godine istraţivali transport toplote i mase pri prirodnoj konvekciji od vertikalne, polu-beskonačne propustljive ploče. Ploča je ugraĎena u poroznu sredinu, a prisutno je spoljašnje magnetno polje.

Geindrean i Auriault [95] su 2002. godine istraţivali uticaj tenzora filtracije u čvrstoj poroznoj sredini na ustaljeno sporo strujanje elektroprovodnog, nestišljivog, viskoznog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja. Pokazano je da zakon filtracije liči na Darcy-jev zakon, ali sa dodatnim članom koji je proporcionalan električnom polju. Jat i Ihankal [96] su 2003. godine istraţivali trodimenzionalno, nestacionarno strujanje nestišljivog viskoznog fluida u prisustvu upravnog magnetnog polja kroz poroznu sredinu. Porozna sredina se graniči poroznom pločom koja osciluje i kroz koju se uduvava/isisava fluid. Ceo sistem rotira konstantnom ugaonom brzinom oko ose koja je upravna na ploču. Iste godine je El-Amin [97] istraţivao uticaj otpora prvog i drugog reda, usled krute matrice ne-Darcy-jeve porozne sredine, Joule-ove toplotne i viskozne disipacije na prinudno konvektivno strujanje duţ horizontalnog cilindra pod dejstvom poprečnog magnetnog polja. Razmatran je slučaj promenljive temperature zida.

Godine 2004. Chamkha [98] razmatrao je problem nestacionarnog, dvodimenzionalnog, laminarnog strujanja viskoznog, nestišljivog, elektroprovodnog fluida koji apsorbuje toplotu u graničnom sloju pored vertikalne, polu-beskonačne, propustljive ploče koja se kreće konstantnom brzinom. Spoljašnje magnetno polje deluje upravno na ploču. Ploča se nalazi u poroznoj sredini. Temperatura i brzine slobodne struje su eksponencijalne funkcije vremena dok su temperatura i koncentracija konstante. Iste godine je Youn [99] istraţivao problem slobodne konvekcije sa transportom mase mikropolarnog fluida u poroznoj sredini. Porozna sredina je ograničena polu-beskonačnom, vertikalnom, poroznom pločom koja se kreće konstantnom brzinom u uzduţnom pravcu, a brzina slobodne struje je eksponencijalna funkcija sa malom perturbacijom. Homogeno magnetno polje deluje upravno na ploču koja apsorbuje mikropolarni fluid brzinom isisavanja koja se menja sa vremenom. TakoĎe te godine Postelnicu [100] je numerički odredio karakteristike prenosa toplote i mase prirodne konvekcije pored vertikalne ploče ugraĎene u zasićenu poroznu sredinu. Na ovu sredinu deluje spoljašnje magnetno polje. Uzimaju se u obzir efekti termo-difuzije (Dufour) i (Soret). Odgovarajuće simultane diferencijalne jednačine rešene su numerički korišćenjem metode konačnih razlika.

Khadrawi i saradnici [101] su 2005. godine izučavali nestacionarno MHD slobodno konvektivno strujanje preko polu-beskonačne, vertikalne, propustljive, pokretne ravne ploče ugraĎene u poroznu sredinu sa uniformnim usisavanjem. Ploča se kreće konstantnom brzinom u uzduţnom pravcu. Primenjeno homogeno magnetno polje deluje upravno na ploču koja apsorbuje elektroprovodni fluid sa uniformnom brzinom usisavanja. Problem je izučavan korišćenjem metode Laplace-ove transformacije.

Alam i saradnici [102] su 2006. godine proučavali Dufour-ove i Soret-ove efekte na nestacionarnu MHD slobodnu konvekciju i prenos mase pored beskonačne vertikalne porozne ploče ugraĎene u poroznu sredinu. Brzina isisavanja/uduvavanja fluida kroz ploču je funkcija vremena, a ploča se kreće vertikalno naviše konstantnom brzinom. Za poroznu sredinu iskorišćen je Darcy-Forchheimer-ov model. Problem je rešen numerički.

Kumar i saradnici [103] su 2007. godine izučavali neustaljeno MHD mešovito konvektivno strujanje viskoznog, nestišljivog fluida pored vertikalne, beskonačne, ravne, porozne ploče u prisustvu toplotnog izvora/ponora sa Hall-ovim efektom. Kroz ploču se uduvava/isisava fluid konstantnom brzinom. Iste godine su Chaudhary i Arpica [104] istraţivali MHD strujanje pored vertikalne ploče koja osciluje u poroznoj sredini, uzimajući u obzir slobodnu konvekciju i transport mase. Formirane jednačine rešene su u zatvorenom obliku korišćenjem Laplace-ovih transformacija.

Mansour i saradnici [105] su 2008. godine istraţivali efekte hemijske reakcije, termičke slojevitosti, Soret-ovog i Dufour-ovog broja na MHD slobodno konvektivni transport toplote i mase viskoznog, nestišljivog, elektroprovodnog fluida pored vertikalne površi koja se isteţe, a ugraĎena je u poroznu sredinu.

Anjali Devi i Ganda [106] su 2009. godine istraţivali uticaj viskozne i Joule-ove disipacije na MHD strujanje fluida pored isteţuće porozne ploče ugraĎene u poroznu sredinu. Izučeni su problemi kada se ploča isteţe različitim brzinama koje linearno zavise od rastojanja. Temperatura ploče je poznata. Iste godine su Das i Saha [107] razvili matematički model za pulsaciono strujanje krvi kroz stenoziranu poroznu sredinu sa periodičkim ubrzanjem tela pod uticajem uniformnog poprečnog magnetnog polja. Krv je smatrana njutnovskim nestišljivim fluidom. Korišćenjem konačnih Hankel-ovih i Laplace-ovih transformacija problem je rešen analitički. Iste godine Shehadeh i Duwairi [108] istraţivali su problem MHD prirodnog konvektivnog transporta toplote u poroznoj sredini u pravougaonom kanalu. Granični uslovi na zidovima pravougaonog kanala su dva adijabatska i dva izotermska zida. Za poroznu sredinu korišćen je Darcy-Forchheimer-ov model. Srinivas i Kothandapani [109] su iste godine istraţivali efekte prenosa toplote i mase na peristaltički transport u poroznoj sredini. Fluid je elektroprovodan i prisutno je spoljašnje magnetno polje. Korišćene su aproksimacije velike talasne duţine i mali Reynolds-ovi brojevi.

Mansour i saradnici [110] su 2010. godine numerički istraţivali MHD slobodnu konvekciju u nagnutom kvadratnom kanalu ispunjenom poroznom supstancijom sa unutrašnjim generisanjem toplote. Homogeno magnetno polje nagnuto je pod istim uglom kao i kanal. Razmatran je slučaj kada se svi zidovi kanala hlade i slučaj kada su vertikalni zidovi kanala adijabatski. Iste godine su Ahmed i saradnici [111] istraţivali nestacionarno MHD slobodno konvektivno strujanje pored vertikalne porozne ploče uronjene u poroznu sredinu sa Hall-ovom strujom, toplotnom difuzijom i izvorom toplote. Problem je rešen analitički. Poonoia i Chaudhary [112] su u istoj godini istraţivali 2D nestacionarno MHD laminarno slobodno konvektivno strujanje u graničnom sloju nestišljivog, elektroprovodnog fluida duţ beskonačne vertikalne ploče potopljene u poroznu sredinu sa prenosom toplote i mase. U razmatranje se uzima i viskozna disipacija. Problem je rešen analitički korišćenjem dvočlanih harmonijskih i neharmonijskih funkcija. Hayat i saradnici [113] su takoĎe iste godine istraţivali 2D mešovitu konvekciju u MHD stacionarnom graničnom sloju kroz poroznu sredinu. Ova sredina je ograničena vertikalnom pločom koja se isteţe i zrači toplotu. Pretpostavljeno je da se brzina istezanja i temperatura površi ploče linearno menjaju sa rastojanjem od referentne tačke. Rešenje je dobijeno analitički korišćenjem metode homotopske analize. Makinde i Aziz [114] su iste godine istraţivali prenos toplote i mase sa vertikalne ploče ugraĎene u poroznu sredinu u kojoj se dešava hemijska reakcija prvog reda. Spoljašnje magnetno polje deluje upravno na ploču. Koristi se konvektivni granični uslov. Vyas i Ranjan [115] su 2010. godine istraţivali uticaj toplotnog zračenja i disipacije na prenos toplote preko rastegljive ploče postavljene sa donje strane porozne sredine ispunjene fluidom. Srinivis i Muthuraj [116] su u ovoj godini izučavali MHD mešovito konvektivno strujanje kroz poroznu sredinu u vertikalnom kanalu sa izvorom toplote sa zračenjem. Pretpostavljeno je da su temperature zidova kanala konstantne. Odgovarajuće bezdimenzionalne jednačine rešene su korišćenjem metode homotopske analize.

Kesavaiah i saradnici [117] su 2011. godine istraţivali prenos toplote i mase laminarnog strujanja viskoznog, elektroprovodnog fluida koji generiše/apsorbuje toplotu na kontinuiranoj vertikalnoj propustljivoj površi u prisustvu zračenja, homogene hemijske reakcije prvog reda i masenog fluksa. Ploča se kreće konstantnom brzinom u smeru strujanja fluida. Homogeno magnetno polje deluje normalno na poroznu površ, koja apsorbuje fluid brzinom isisavanja koja zavisi od vremena. Problem se rešava analitički korišćenjem dvočlanih harmonijskih i neharmonijskih funkcija. Narayana i saradnici [118] su iste godine istraţivali prenos toplote i mase u poroznoj sredini duţ vertikalne porozne ploče usled sile pritiska, efekta toplote i difuzije u prisustvu poprečnog uniformnog magnetnog polja sa uzimanjem u obzir Hall-ove struje. Problem je rešen numerički. Ariful i saradnici [119] su izučavali MHD strujanje mikropolarnog fluida duţ vertikalne porozne ploče uronjene u poroznu sredinu. Hayat i saradnici [120] su izučavali efekte termičkog zračenja na 2D MHD strujanje Maxwell-ovog fluida u kanalu porozne sredine. Zidovi kanala su porozni. Problem je rešen korišćenjem metode homotopske analize. Rashidi i saradnici [121] su proučavali upravljanje, koristeći poprečno magnetno polje, filtriranje i prenos toplote krvi u krvotoku koji je predstavljen vertikalnom cevi. Ne-njutnovske karakteristike krvi modelirane su po Eringen-u, a za poroznu sredinu se koristi Darcy-Forchheimer-ov model. Rashidi i Erfani [122] su izučavali MHD Hiemenz-ovo strujanje pored ravne ploče sa promenljivom temperaturom površi u poroznoj sredini. Problem je rešen analitički.

U 2012. godini izdvajaju se sledeća istraţivanja. Barik i saradnici [123] su proučavali transport toplote i mase u prisustvu izvora toplote pored ploče koja se isteţe a uronjena je u poroznu sredinu. Prisutno magnetno polje je promenljivo. Razmatran je i efekat viskozne disipacije. Reddy i saradnici [124] su istraţivali efekte Hall-ove struje, hemijske reakcije i zračenja na slobodno konvektivno strujanje u poroznoj sredini ograničenoj vertikalnom površi ugraĎenom u poroznu sredinu. Spoljašnje uniformno magnetno polje deluje upravno na ovu površ. Problem je rešen analitički. Chand i saradnici [125] su izučavali oscilatorno MHD strujanje kroz poroznu sredinu ograničenu dvema vertikalnim paralelnim poroznim pločama od kojih je jedna nepokretna a druga se kreće jednoliko. Kroz ploče se ubrizgava/isisava fluid. U obzir je uzet izvor toplote i Soret-ov efekat. Rešenja su dobijena u zatvorenom obliku. Haque i saradnici [126] su istraţivali ponašanje mikropolarnog fluida pri stacionarnom MHD slobodno konvektivnom strujanju i prenosu mase u poroznoj sredini ograničenoj poroznom vertikalnom pločom. Magnetno polje deluje upravno na ploču a kroz nju se uduvava/isisava fluid. Pretpostavlja se da su toplotni i maseni fluks konstantni. Problem je rešen numerički. Al-Sudais [127] je istraţivao efekte promenljive toplotne provodljivosti i toplotnog izvora/ponora na 2D MHD stacionarno strujanje viskozne, nestišljive, elektroprovodne tečnosti u poroznoj sredini u prisustvu promenljivog slobodnog strujanja u okolini tačke stagnacije na neprovodnoj ploči. Prisutno je i termičko zračenje. Singh i Rastogi [128] su razmatrali MHD strujanje nestišljivog, viskoznog, elektroprovodnog fluida u horizontalnom kanalu sa paralelnim zidovima u prisustvu nagnutog magnetnog polja. Kanal rotira konstantnom ugaonom brzinom oko ose koja je normalna na zidove. Zidovi kanala su na različitim konstantnim temperaturama, donji je nepokretan, a gornji se kreće konstantnom brzinom. Donji deo kanala je porozna sredina, a gornji deo je potpuno propustljiv. Problem je rešen analitički. Ferdows i saradnici [129] su istraţivali strujanje nano fluida u MHD graničnom sloju u poroznoj sredini preko eksponencijalno isteţućeg lima. Rashidi i saradnici [130] su primenjujući metodu homotopske analize dobili aproksimativna analitička rešenja stacionarnog strujanja preko rotirajućeg diska u poroznoj sredini sa prenosom toplote. Hayat i saradnici [131] su istraţivali strujanje i prenos toplote nestišljivog Jeffery-jevog fluida u poroznoj sredini na površi koja se isteţe. Uzeti su u obzir toplotni fluks, izvor toplote i toplotno zračenje. Za rešenje problema korišćena je metoda homotopske analize.

U 2013. godini izdvajaju se istraţivanja koja su navedena naniţe. Rao i saradnici [132] su razmatrali 2D nestacionarni MHD granični sloj elektroprovodnog fluida u poroznoj sredini pored vertikalne propustljive pokretne ploče. Magnetno polje deluje upravno na ploču. Uzeti su u obzir hemijska reakcija, zračenje, Soret-ov efekat i termička difuzija. Usisavanje na propustljivoj ploči je funkcija vremena. Ploča se kreće konstantnom brzinom u smeru strujanja. Nalinakshi i saradnici [133] su izučavali mešoviti MHD konvektivni prenos toplote sa vertikalne grejane ploče ugraĎene u retku poroznu sredinu. Smatra se da su propustljivost, poroznost, toploprovodljivost i magnetno polje promenljive veličine. Manglesh i Gorla [134] su istraţivali nestacionarno slobodno konvektivno strujanje nestišljivog, viskoznog, elektroprovodnog fluida kroz vertikalni porozni kanal sa toplotnim zračenjem. Primenjeno magnetno polje upravno je na kanal. Brzina isisavanja/ubrizgavanja fluida kroz oba zida kanala je konstantna. Uzimaju se u obzir Hall-ov i Soret-ov efekat. Choudhury i Bhattacharjee [135] su istraţivali nestacionarno 2D MHD slobodno konvektivno strujanje nestišljivog viskozno-elastičnog fluida u poroznoj sredini pored vertikalne porozne ploče. Uzima se u obzir Dufour efekat i hemijska reakcija. Spoljašnje magnetno polje je upravno na ploču. Choudhury i Kumar [136] su istraţivali viskozno-elestično, nestacionarno MHD slobodno konvektivno strujanje u poroznoj sredini pored vertikalne porozne ploče u prisustvu zračenja i hemijske reakcije. Brzina usisavanja/uduvavanja zavisi od vremena. Za rešenje problema se koristi metoda višestrukih perturbacija. Devika i saradnici [137] su izučavali homogenu hemijsku reakciju prvog reda i izvor toplote pri oscilatornom MHD strujanju viskozno-elestičnog fluida kroz kanal ispunjen poroznom sredinom. Nadeem i saradnici [138] su istraţivali 3D MHD strujanje Casson fluida u dva bočna smera kroz poroznu sredinu. Strujanje je pored horizontalne ploče koja se isteţe. Turhyilmazoglu [139] je istraţivao MHD strujanje i prenos toplote elektroprovodnog visokoelastičnog fluida pored vertikalne ploče koja se nalazi u poroznoj sredini. Uzeti su u obzir Dufour-ov i Soret-ov efekat. Problem je rešen analitički. Sheikholeslami i saradnici [140] su izučavali laminarno MHD strujanje nano fluida u polu-poroznom kanalu u prisustvu poprečnog magnetnog polja. Korišćene su analitičke metode "Least Square" i Galerkin-a.

U 2014. godini bilo je mnogo istraţivanja u ovoj oblasti, a izdvojena su samo neka od njih. Raju i sardnici [141] su istraţivali ustaljeno MHD prinudno konvektivno strujanje fluida u zasićenoj poroznoj sredini u fiksnom horizontalnom kanalu sa termički izolovanim i nepropustljivim donjim zidom u prisustvu viskozne disipacije i Joule-ovog zagrevanja. Problem je rešen analitički. Dessie i Kishan [142] su istraţivali strujanje u MHD graničnom sloju i prenos toplote fluida promenljive viskoznosti kroz poroznu sredinu pored isteţuće ploče uzimajući u obzir efekte viskozne disipacije i izvora/ponora toplote. Odgovarajuće jednačine rešene su numerički korišćenjem metode Runge-Kutta četvrtog reda. Mishra i saradnici [143] razmatrali su problem nestacionarnog, laminarnog MHD graničnog sloja nestišljivog, elektroprovodnog fluida u poroznoj sredini pored polu-beskonačne vertikalne ploče sa zračenjem i hemijskom reakcijom. Koristi se metoda perturbacije. Neetu Srivastava [144] je analitički istraţivao MHD strujanje krvi u poroznoj nagnutoj stenzoidnoj arteriji pod uticajem nagnutog magnetnog polja. Krv je smatrana njutnovskim elektroprovodnim fluidom. Lavanya i Ratnam [145] su istraţivali prenos toplote i mase 2D stacionarnog MHD slobodno konvektivnog strujanja duţ vertikalne porozne ploče ugraĎene u poroznu sredinu sa toplotnim zračenjem, generisanjem toplote, viskoznom disipacijom i hemijskom reakcijom pod uticajem Dufour-ovog i Soret-ovog efekta. Problem je rešen numerički. Sreekala i Reddy [146] su istraţivali stacionarno MHD Couette-ovo strujanje nestišljivog fluida kroz poroznu sredinu izmeĎu dve beskonačne paralelne porozne ploče. Magnetno polje je nagnuto i uzima se u obzir viskozna disipacija. Donja ploča je nepokretna, a brzina usisavanja fluida i temperatura ploče su kosinusne funkcije dok se gornja ploča kreće konstantnom brzinom, a brzina isisavanja fluida i temperatura ploče su konstantne. Sagar i saradnici [147] su istraţivali nestacionarno 2D MHD slobodno konvektivno strujanje nestišljivog Kuvshinski fluida u poroznoj sredini pored polu-beskonačne vertikalne ploče sa hemijskom reakcijom i apsorpcijom zračenja. Barik i saradnici [148] su istraţivali nestacionarno MHD slobodno konvektivno strujanje nestišljivog fluida kroz poroznu sredinu u prisustvu izvora/ponora toplote. Porozna sredina je ograničena beskonačnom vertikalnom poroznom površi, a sistem rotira kao čvrsto telo. Kroz vertikalnu površ uniformno i upravno na nju se usisava fluid. Temperatura površi je funkcija vremena. Problem je rešen analitički metodom perturbacije. Kala i saradnici [149] izučavali su stacionarno 2D MHD laminarno slobodno konvektivno strujanje i prenos toplote nestišljivog, elektroprovodnog fluida preko nelinearno rastegljive ploče ugraĎene u poroznu sredinu. Porozna sredina je predstavljena proširenim Darcy-Forchheimmer-ovim modelom. Prisutno je homogeno upravno magnetno polje, a uzeta je u obzir i viskozna disipacija. Kumar [150] je istraţivao mešovito konvektivno MHD strujanje mikropolarnog fluida i prenos toplote i mase u poroznoj sredini pored beskonačne vertikalne ploče. Uzeto je u obzir Ohm-ovo zagrevanje, zračenje, viskozna disipacija. Ploča je izloţena konstantnom toplotnom fluksu i promeni koncentracije. Kroz ploču se ubrizgava fluid konstantnom brzinom.

I u 2015. godini realizovano je više istraţivanja u ovoj oblasti, a neka od njih izdvojena su ovde. Uddin [151] istraţivao je uticaj viskozne Joule-ove disipacije kod problema MHD strujanja kod isteţuće porozne površi ugraĎene u poroznu sredinu kanala koji rotira. Chauhan i saradnici [152] su istraţivali 2D ustaljeno MHD strujanje u kruţnoj cevi i izvan nje, gde je sredina unutar cevi porozna pod uticajem primenjenog magnetnog polja. Za poroznu sredinu je korišćen Brinkman-ov model. Problem je rešen analitički. Javaherdeh i saradnici [153] su istraţivali stacionarno, laminarno slobodno konvektivno strujanje preko pokretne vertikalne ploče u poroznoj sredini izloţene dejstvu poprečnog magnetnog polja. Predpostavlja se da temperatura i koncentracija na ploči imaju istu vrstu raspodele. Problem je rešen numerički. Rani i saradnici [154] su izučavali efekte zračenja i hemijske reakcije na MHD slobodno konvektivno strujanje elektroprovodnog fluida preko nagnute ploče ugraĎene u poroznu sredinu. Ploča se impulsivno pokreće a temperatura i koncentracija na njoj su promenljive. Problem je rešen analitički. Muondwe i saradnici [155] su razmatrali MHD strujanje elektroprovodnog fluida izmeĎu dve vertikalne paralelne ploče. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je upravno na ploče. Temperature ploča su konstantne i različite. Pokretna ploča je propustljiva, dok je druga nepropustljiva. Prakash i saradnici [156] su istraţivali efekte toplotnog zračenja, sile potiska i magnetnog polja na oscilatorno strujanje provodnog fluida sa česticama prašine u vertikalnom kanalu ispunjenom poroznom supstancijom. Zidovi kanala su na konstantnim, a različitim temperaturama. Bagh i saradnici [157] su istraţivali MHD strujanje fluida sa konvektivnim prenosom toplote u poroznoj sredini preko poroznog lima koji se eksponencijalno smanjuje. Shalini i Choudhary [158] su izučavali MHD strujanje i prenos toplote u graničnom sloju na propustljivom limu koji se eksponencijalno skraćuje, a nalazi se na dnu porozne sredine ispunjene fluidom. Kroz lim se usisava fluid brzinom koja je eksonencijalna funkcija, temperatura lima je takoĎe eksponencijalna funkcija. Problem je rešen numerički. Yirga i Shankar [159] su istraţivali konvektivni prenos toplote i mase pri strujanju nanofluida kroz poroznu sredinu zbog istezanja lima pri dejstvu magnetnog polja, viskozne disipacije, hemijske reakcije i Soret-ovog efekta. Khalid i saradnici [160] su istraţivali nestacionarnu MHD slobodnu konvekciju Casson fluida duţ vertikalne ploče koja se nalazi u poroznoj sredini i osciluje. Za rešavanje odgovarajućih jednačina korišćene su Laplace-ove transformacije.

Istraţivanja su nastavljena i tokom 2016. godine. Chaudhary i Choundahary [161] istraţivali su, numerički, ustaljeno 2D MHD strujanje pored zagrejane ploče koja se isteţe/sakuplja u poroznoj sredini. Fluid koji se nalazi u poroznoj sredini je nestišljiv, viskozan i elektroprovodan. Spoljašnje magnetno polje je homogeno i upravno na ploču. Kumar [162] je istraţivao MHD peristatički konduktivni transport pri strujanju krvi kroz poroznu sredinu u nagnutom koaksijalnom vertikalnom kanalu. Dobijena su analitička rešenja. Kumar i saradnici [163] su istraţivali MHD strujanje krvi kroz poroznu sredinu u nagnutoj konusnoj arteriji. Krv je smatrana njutnovskim elektroprovodnim fluidom. Problem je rešen analitički. Posmatrani su divergentni, konvergentni i valjkasti delovi arterije. Seth i saradnici [164] su istraţivali nestacionarno MHD prirodno konvektivno strujanje sa prenosom toplote i mase, nestišljivog, elektroprovodnog, hemijski reaktivnog fluida duţ vertikalne ploče. Ploča se u poroznoj sredini kreće eksponencijalnim ubrzanjem a njena temperatura je proizvoljna. Uzeto je u obzir i toplotno zračenje. Dobijena su rešenja u zatvorenom obliku korišćenjem Laplace-ovih transformacija. Misra i Adhikary [165] su istraţivali oscilatorno MHD strujanje krvi i transport mase i toplote u arterijama u prisustvu hemijske reakcije i spoljašnjeg magnetnog polja. Iftikhar i saradnici [166] su istraţivali strujanje i prenos toplote u nestacionarnom 3D MHD graničnom sloju nestišljivog, elektroprovodnog fluida u poroznoj sredini usled istezanja površi u horizontalnoj ravni. Analiza strujanja se vrši u prisustvu toplotne generacije/apsorpcije i spoljašnjeg homogenog magnetnog polja upravnog na površ. Indukovano magnetno polje je zanemareno. Shehzad i saradnici [167] su istraţivali MHD 3D strujanje nestišljivog Casson-ovog fluida u graničnom sloju u poroznoj sredini. Karakteristike prenosa toplote analizirane su u prisustvu izvora/ponora toplote. Gireesha i saradnici [168] su istraţivali teorijski MHD prenos toplote kontaminiranog fluida na kontinuirano istezanoj površi sa linearno promenljivom temperaturom ili toplotnim fluiksom. Uzeti su u obzir efekti Hall-a, Darcy-jeva porozna sredina, toplotno značenje i promenljivi izvor/ponor toplote. Površ je propustljiva tako da omogućava uduvavanje/isisavanje fluida.

I u 2017. godini bilo je više istraţivanja iz oblasti MHD prenosa mase i toplote u poroznoj sredini. Kumari i Goyal [169] su istraţivali efekte viskozne disipacije i prenosa mase na nestacionarno MHD oscilatorno strujanje fluida kroz poroznu sredinu izmeĐu dve vertikalne paralelne ploče konstantnih, a različitih temperatura. Slsedais [170] je proučavao efekte generisanja toplote i zračenja na MHD strujanje Casson fluida niz površ koja se proteţe kroz poroznu sredinu. Odgovarajuće bezdimenzione jednačine rešene su numerički. Khan i saradnici [171] su proučavali proces ekstruzije primarne izolacije provodljive ţice pomoću viskoznoelastičnog fluida trećeg stepena u prisustvu primenjenog magnetnog polja i porozne sredine. Za rešenje odgovarajućih jednačina korišćena je metoda homotopske analize. Dastagiri i saradnici [172] su istraţivali nestacionarno slobodno konvektivno MHD 2D strujanje elektroprovodnog nestišljivog nenjutnovskog fluida drugog stepena duţ vertikalne porozne ploče pod uticajem homogenog poprečnog magnetnog polja sa propustljivošću koja zavisi od vremena i oscilatornog usisavanja. Jednačine polja strujanja za malu amplitudu propustljivosti rešene su metodom perturbacije. Sinha i saradnici [173] su odredili tačno rešenje problema prirodnog konvektivnog MHD strujanja u tankom sloju elektroprovodnog fluida duţ vertikalne ploče u poroznoj sredini. Prisutno je značajno toplotno zračenje. Odgovarajuće jednačine rešene su u zatvorenom obliku korišćenjem Laplace-ovih transformacija. Krishna i saradnici [174] su istraţivali stacionarno MHD slobodno konvektivno strujanje, transport toplote i mase duţ polu-beskonačne porozne ploče u poroznoj sredini u prisustvu Soret-ovog i Dufour-ovog efekta. Odgovarajuće jednačine rešene su numerički. Bhavya i Sharma [175] su istraţivali efekte magnetnog polja na strujanje krvi kroz stenoznu nagnutu poroznu arteriju u prisustvu porozne sredine sa izvorom toplote. Viskoznost se pretpostavlja promenljivom sa promenljivim hematokritom u čitavom području arterije. Latha i Rushi [176] su istraţivali prenos toplote i mase pri nestacionarnom strujanju krvi kroz kanal izmeĐu paralelnih ploča u kome je porozna sredina, u prisustvu upravnog magnetnog polja, sa toplotnim zračenjem. Prashant je u doktorskoj disertaciji [177] teorijski istraţivao MHD strujanje, prenos toplote i mase njutnovske/nenjutnovske rashladne tečnosti, usled horizontalnog/vertikalnog istezanja ploče. Teorijska istraţivanja uključuju uticaje: magnetnog polja, uniformnog/neuniformnog izvora/ponora toplote i hemijsku reakciju prvog reda.

Navode se i istraţivanja iz 2018. godine. Astanina sa saradnicima [178] je istraţivala MHD prirodnu konvekciju sa generisanjem entropije nanofluida unutar otvorene trapezne šupljine ispunjene poroznim slojem i slojem ferofluida pod uticajem homogenog nagnutog magnetnog polja. Porozna sredina je modelirana Brinkman-ovom modelom. Sheikholeslami i Shehzad [179] su proučavali prenos toplote nanofluida na bazi vode sa nanočesticama u poroznoj sredini u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja. Porozna sredina je opisana Darcy-jevim modelom. Za numeričko rešavanje problema korišćena je metoda konačnih elemenata. Sheikholeslami i Rokni [180] su izvršili numeričku simulaciju uticaja Coulomb-ove sile na prenos toplote nanofluida u poroznoj sredini u prisustvu toplotnog zračenja. Na kanal deluje spoljašnje električno polje. Khalid i saradnici [181] su razmatrali nestacionarno MHD slobodno konvektivno strujanje krvi u ugljeničnim nanocevima. Strujanje je duţ oscilujuće vertikalne ploče ugraĎene u poroznu sredinu. Za rešavanje problema korišćene su Laplace-ove transformacije. Agoor [182] je istraţivao MHD strujanje mikropolarnog fluida kroz poroznu sredinu unutar pravougaonog mikrokanala. Spoljašnje primenjeno magnetno polje je homogeno. Odgovarajuće jednačine su rešene analitički.

1.6 Predmet istraživanja u disertaciji

Istraţivanja u oblasti magnetne hidrodinamike realizuju se već dugi niz godina na Katedri za Hidroenergetiku na Mašinskom fakultetu u Nišu. Trenutno se realizuju istraţivanja u okviru projekta "Istraţivanje MHD strujanja u okolini tela, procepima i kanalima i primena u razvoju MHD pumpi. Razmatraju se njutnovski i ne-njutnovski nestišljivi fluidi. Sredine kroz koje fluid struji su porozne i potpuno slobodne za strujanje fluida. Jedan od rezultata ovih istraţivanja je doktorska disertacija [183] koja je publikovana 2013. godine. U okviru ove disertacije razmatrana su MHD strujanja jednog i dva fluida u kanalima. Na ovoj katedri su nastavljena istraţivanja iz ove oblasti i objavljeno je više radova, od kojih se ovde navode samo neki koji su direkno povezani sa istraţivanjima u ovoj doktorskoj disertaciji. Stamenković sa saradnicima [184] je istraţivao stacionarno MHD strujanje fluida i transport toplote u horizontalnom poroznom kanalu. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno i upravno na kanal. Uzeto je i dejstvo spoljašnjeg homogenog električnog polja. Zidovi kanala su na stalnim a različitim temperaturama. Problem je istraţivan u bezdimenzionoj aproksimaciji. Odgovarajuće diferencijalne jednačine rešene su analitički. Autorka ove disertacije je u radu [185] sa saradnicima istraţivala stacionarno MHD strujanje i transport toplote u horizontalnom poroznom kanalu. Polovine kanala su različitih poroznosti i u njima struje različiti fluidi. Na kanal deluju spoljašnje električno i magnetno polje koje je nagnuto u odnosu na horizontalni kanal. Zidovi kanala su stalnih, a različitih temperatura. Problem je razmatran u bezindukcionoj aproksimaciji. Rešenje problema dato je u zatvorenom obliku. U radu [186] razmatrano je stacionarno MHD strujanje i transport toplote u horizontalnom poroznom kanalu. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno i upravno na zidove kanala. Uzet je i uticaj indukovanog magnetnog polja. Zidovi kanala su na stalnim a, različitim temperaturama. Problem je rešen analitički. U radu [187] razmatrano je stacionarno MHD strujanje i prenos toplote u poroznoj sredini izmeĎu dve horizontalne ploče koje su na konstantnim a različitim temperaturama. Spoljašnje magnetno polje je homogeno i upravno na ploče. Uzima se u obzir i indukovano magnetno polje.Tokom istraţivanja u okviru ove disertacije publikovan je rad [188] u kome je MHD strujanje fluida i prenos toplote u poroznoj sredini izmeĐudve horizontalne ploče. Gornja ploča se kreće konstantnom brzinom u smeru strujanja fluida. Na strujni prostor deluju homogeno spoljašnje magnetno i električno polje. Problem se razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji.

Na osnovu citirane literature u ovom radu, i literature koja je pregledana, od autora, a nije citirana ovde moţe se zaključiti da istraţivanja MHD strujanja, transporta mase i toplote u poroznoj sredini sa godinama ne jenjavaju već naprotiv, sve ih je više. Razlog ovome je, nesumnjivo, mnogo oblasti u kojima ova istraţivanja nalaze praktičnu primenu. Zato će se u ovoj disertaciji istraţivati MHD strujanja, transport mase i toplote u kanalima unutar kojih je sredina porozna. Zidovi kanala biće beskonačne ploče koje su na konstantnim a različitim temperaturama. Razmatraće se horizontalni, nagnuti i vertikalni kanali. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno upravno na zidove kanala ili nagnuto u odnosu na njih. Fizičke karakteristike fluida i sredine smatraće se konstantnim. Za neke od posmatranih problema uzima se i uticaj primenjenog spoljašnjeg homogenog električnog polja. Pojedini problemi će se posmatrati u bezindukcionoj aproksimaciji, a biće i onih kod kojih se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja. Razmatraće se slučajevi kada kroz kanal struji jedan fluid a i slučajevi kada kroz kanal struje dva fluida koja se ne mešaju. Zidovi kanala su ili oba nepokretna ili jedan nepokretan a drugi pokretan. Zidovi kanala su elektroneprovodni, a razmatraće se i slučaj kada su oni elektroprovodni. Svi problemi razmatraju se u stacionarnom stanju.

Ovde se najpre navodi šta je u kom poglavlju disertacije istraţivano. U drugom poglavlju je izvršeno matematičko modeliranje problema MHD strujanja, transporta mase i toplote. Prethodno su date osnovne geometrijske i strujne karakteristike poroznih sredina. Za matematičko modeliranje je korišćena metoda zapreminskog osrednjavanja. Tako su dobijene osrednjene jednačine koje ovaj problem matematički opisuju tj. dobijen je odgovarajući matematički model. To su jednačina kontinuiteta, jednačina impulsa, jednačina energije i osnovne jednačine elektromagnetike.

U poglavlju III se razmatraju, prvo, slučaj MHD strujanja, prenosa mase i toplote u horizontalnom poroznom kanalu u kome struji jedan fluid. Uzet je uticaj spoljašnjeg homogenog magnetnog polja upravnog na zidove kanala i uticaj spoljašnjeg homogenog električnog polja. Zidovi kanala su neprovodni, a na njima postoje izvori/ponori fluida. Problem se razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji. Zatim se razmatra slučaj kod koga je, za razliku od prethodnog, gornji zid kanala pokretan i kreće se u pravcu strujanja konstantnom brzinom. Na dalje, u ovom poglavlju, razmatra se slučaj kod koga je zanemaren uticaj spoljašnjeg električnog polja a problem se ne posmatra u bezindukcionoj aproksimaciji, već se uzima u obzir uticaj indukovanog magnetnog polja. Sledeći problem koji se razmatra u ovom poglavlju razlikuje se od prethodnog u tome što se gornji zid kanala kreće konstantnom brzinom u pravcu strujanja. Na kraju se razmatra problem kod koga je za razliku od prvog posmatranog problema u ovom poglavlju zanemaren uticaj spoljašnjeg električnog polja, a uzet je uticaj indukovanog magnetnog polja tj. problem se ne razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji. Pored toga, za razliku od prvog razmatranog problema, gde su zidovi bili elektroneprovodni ovde su oni elektroprovodni. Na kraju ovog poglavlja dat je zaključak, što će se učiniti na kraju svakog od sledećih poglavlja.

U četvrtom poglavlju se razmatra strujanje dva fluida koji se ne mešaju u kanalu čiji su zidovi dve horizontalne izolovane ploče. Ploče su na konstantnim a različitim temperaturama. Prvi problem koji se istraţuje je sa primenjenim spoljašnjim magnetnim poljem koje je homogeno i upravno na zidove kanala i spoljašnjim homogenim električnim poljem. Na zidovima i u kanalu nema izvora/ponora fluida. Problem se razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji. Drugi model koji se razmatra u ovom poglavlju razlikuje se od prethodnog u tome što je gornji zid kanala pokretan i kreće se konstantnom brzinom u pravcu strujanja fluida.

U petom poglavlju razmatraju se četiri različita modela MHD strujanja, transporta mase i toplote. Kod sva četiri modela kanal je nagnut u odnosu na horizontalnu ravan. Zidovi kanala su paralelne ploče koje su beskonačne, elektro izolovane, a na njima se nalaze izvori/ponori fluida. Zidovi kanala su na konstantnim a različitim temperaturama. Spoljašnje primenjeno magnetno polje je homogeno i nagnuto u odnosu na normalu na zidove kanala. Sredina u kanalu je porozna i kroz nju struji fluid stalnih fizičkih svojstava. Kod prva dva modela uzima se u obzir i uticaj spoljašnjeg homogenog električnog polja. Oba ova modela razmatraju se u bezindukcionoj aproksimaciji. Kod prvog modela oba zida kanala su nepokretna, a kod drugog se gornji zid kanala kreće. Kod trećeg i četvrtog modela, za razliku od prethodna dva, zanemaruje se primenjeno spoljašnje električno polje i uzima se uticaj indukovanog magnetnog polja. Kod trećeg modela zidovi kanala su nepokretni, a kod četvrtog modela se gornji zid kreće konstantnom brzinom. Sva četiri problema izučavana su u stacionarnom stanju.

U šestom poglavlju ovog rada istraţivano je MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u kanalu nagnutom u odnosu na horizontalnu ravan. Zidovi kanala su beskonačne nepokretne ploče koje su elektroizolovane i na različitim konstantnim temperaturama. Sredina unutar kanala je porozna i kroz nju struje dva fluida koji se ne mešaju, a konstantnih su fizičkih svojstava. Svojstva porozne sredine su takoĎe nepromenljiva. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno i nagnuto je u odnosu na normalu na zidove kanala a nalazi se u vertikalnoj ravni strujanja fluida. Uzet je i uticaj spoljašnjeg primenjenog homogenog električnog polja. Problem se proučava u bezindukcionoj aproksimaciji.

U svim poglavljima odreĎivani su rasporedi brzine, temperature i pritiska i to uvek u zatvorenom obliku.

U sedmom poglavlju su uraĎene numeričke simulacije u programu Ansys CFX. Simulacije su date za dva razmatrana modela. Prvi je horizontalni kanal u kome je porozna sredina, a zatim su dati rezultati numeričkih simulacija i za kosi kanal takoĎe sa poroznom sredinom.

Poglavlje 2

2. Matematički model

Čvrsta tela prirodnog ili veštačkog porekla u većini slučajeva mogu se smatrati "poroznim materijalom". Pod ovim pojmom se podrazumevaju tela - sredine koja imaju veći broj šupljina male veličine u poreĎenju sa karakteritičnom dimenzijom samog tela. Ove šupljine nazivaju se porama, a čvrsti sadrţaj se naziva skeletom ili nosačem.

Fenomeni strujanja fluida, prenosa mase i toplote u poroznim materijalima prisutni su u velikom broju procesa u energetici, procesnoj i hemijskoj industriji i oblasti zaštite ţivotne sredine. Samo ovi razlozi su sasvim dovoljni da istraţivanja u ovoj oblasti učine neophodnim.

Dosadašnja saznanja u ovoj oblasti su značajna. MeĎutim postoji čitav niz problema, kako objektivnih tako subjektivnih, te su istaţivanja u ovoj oblasti, i teorijska i eksprimentalna, neophodna.

Pre formiranja matematičkog modela ovde će se dati neke osnovne veličine koje karakterišu porozne materijale (sredine).

2.1 Geometrijske karakteristike poroznih materijala

Oblik pora u poroznom materijalu je izuzetno sloţen i veoma je bitan faktor koji utiče na formiranje strujnog i termodinamičkog reţima. Prostor pora izgleda kao mreţa isprepletenih kanala i zavisi od geometrije granula koje obrazuju sam sloj, a i od geometrije poroznog sloja u celini.

U cilju sagledavanja ovako sloţene strukture poroznih materijala, problema strujanja i prenosa mase i toplote neophodno je definisati karakteristične veličine, koje geometrijski opisuju porozne sredine. Za sada su to:

poroznost ε, specifična površina a_v i karakteristična duţina l^*.

Postoje različite vrste pora i to:

- prolazne (otvorene),
- neprolazne (slepe) i
- zatvorene.

One su definisane različitim izrazima:

$$\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V}, \tag{2.1.1}$$

gde je: ε - ukupna poroznost, V_ε - zapremina svih pora u materijalu, V - ukupna zapremina prostora pora i čvrste faze,

$$\varepsilon_f \equiv \varepsilon_{st} = \frac{V_f}{V} \tag{2.1.2}$$

gde je: $\varepsilon_f \equiv \varepsilon_{st}$ - stvarna poroznost, V_f - zapremina zatvorenih pora,

$$\varepsilon_z = \frac{V_z}{V} \tag{2.1.3}$$

gde je: ε_z - zatvorena poroznost, V_z - zapremina zatvorenih pora.

Zatvorena poroznost predstavlja razliku ukupne i stvarne poroznosti.

Za pravilne oblike "pakovanja" moguće je statičkim metodama odrediti vrednost poroznosti.

Specifična površina a_v u literaturi se definiše na dva načina i to kao odnos ukupne okvašene površine tela i njegove zapremine i kao odnos ukupne okvašene površine tela i njegove mase. Ova veličina je od posebnog značaja za odreĐivanje ukupne razmenjene količine toplote ili mase izmeĐu faza i u kvalitativnom odreĐivanju brzine hemijskih i biohemijskih reakcija koje se odvijaju na meĐufaznoj površi.

Za karakterističnu duţinu se, u literaturi, uzima ili "prečnik" čestica koje čine porozni sloj ili "ekvivalentni" prečnik pore koji se definiše kao hidraulički radijus R_h :

$$R_h = \frac{V_f}{V_A} \tag{2.1.4}$$

gde je: V_f - zapremina sloja slobodna za protok fluida, a A_f - ukupna okvašena površina čvrste faze u sloju.

Iako su ostvareni značajni rezultati u matematičkom modeliranju i dalje je osnovni način odreĐivanja geometrijskih karakteristika porozne sredine eksperimentalni.

2.2 Karakteristike strujanja u poroznim sredinama

U literaturi se kao karakteristične veličine strujanja u poroznim sredinama uglavnom koriste karakteristična brzina strujanja i efektivna propustljivost.

Stvarna brzina fluida u prostoru pora je promenljiva. Ona je jednaka nuli na zidovima pora i ima maksimalne vrednosti u osama pora. Ova brzina ima fizički smisao u definisanju strujanja fluida u poroznim materijalima ali ju je teško meriti pa se uglavnom koriste njeni osrednjeni oblici.

Najčešće se kao karakteristična brzina strujanja koristi osrednjena stvarna brzina fluida u porama po ukupnoj površini pora u bilo kom preseku poroznog materijala upravnom na pravac strujanja. Tako definisana brzina data je izrazom:

$$W_f^* = \frac{1}{A_\varepsilon} \int_{A_\varepsilon} W_f dA, \tag{2.2.1}$$

gde su: W_f - lokalna brzina strujanja fluida unutar pore, A_ε - ukupna površina pora u bilo kom preseku poroznog materijala upravnom na pravac strujanja.
Često se kao karakteristična brzina strujanja fluida koristi brzina definisana izrazom:

$$W = \frac{1}{A} \int_{A_\varepsilon} W_f dA, \tag{2.2.2}$$

gde je A- površina bilo kog preseka upravnog na pravac strujanja. Ovako definisana brzina u literaturi je poznata pod nazivom **Darcy-jeva brzina**. Zapaţa se da ona predstavlja osrednjenu stvarnu brzinu po ukupnoj površini preseka.

Veza izmeĎu brzina definisanih relacijama (2.2.1) i (2.2.2) data je izrazom:

$$W = \varepsilon W_f^*, \tag{2.2.3}$$

gde je:

$$\varepsilon = \frac{A\varepsilon}{A}. \tag{2.2.4}$$

Za definisanje Reynolds-ovog broja uglavnom se koristi Darcy-jeva brzina.

Propustljivost K^* je veličina koja odreĎuje sposobnost poroznog materijala da propusti fluid pod uticajem "gradijenta" pritiska. Ona je definisana **Darcy-jevim zakonom:**

$$K^* = \mu_f \frac{W}{\frac{dp}{dx}}\ , \tag{2.2.5}$$

gde su: μ_f - dinamička viskoznost fluida, W - Darcy-jeva brzina, $\frac{dp}{dx}$ - "gradijent" pritiska u pravcu strujanja.

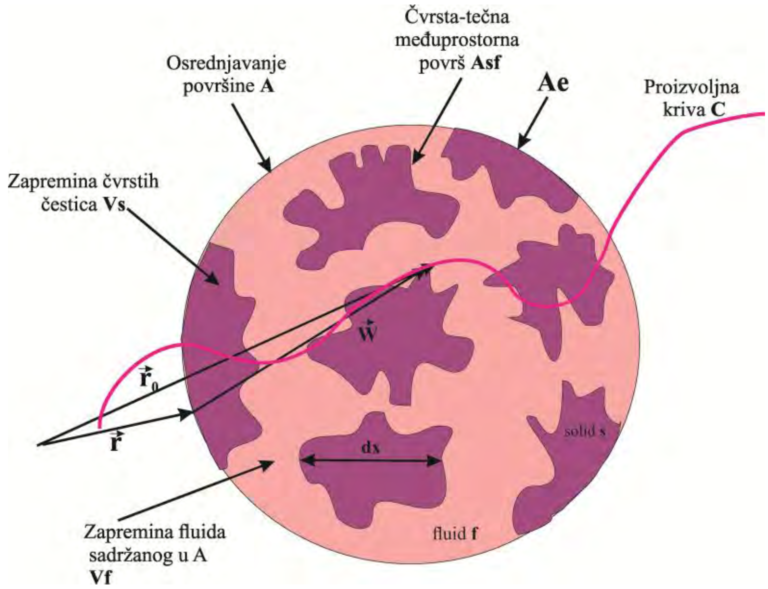
Na veličinu propustljivosti utiču geometrijski parametri poroznog materijala, poroznost, distribucija pora po veličini, zakrivljenost i isprepletanost poroznih kanala, površina kontakta čvrste faze i fluida i dr. Još uvek se za svaki porozni materijal njegova propustljivost mora odrediti eksperimentalno.

Zapaţa se da propustljivost K^* ima dimenziju površine $[m^2]$. Kako je jedinica za propustljivost $1m^2$ vrlo velika češće se koristi jedinica Darcy (D_a):

$$1D_a = 9,87 \cdot 10^{-13} m^2. \tag{2.2.6}$$

2.3 Zapreminsko osrednjavanje

Analitičko opisivanje strujanja fluida i prenosa toplote u poroznoj sredini zakonima kontiuuma veoma je sloţeno zbog njene izrazite nehomogenosti. Zato se ta sredina smatra pseudohomogenom odnosno kvazikontinuumom i onda se na nju primenjuju zakoni kontinuuma uz izvesne dopune i korekcije. Ovu ideju su prvi realizovali Slattery [189] i Whitaker [190] formiravši jedan postupak zapreminskog osrednjavanja. Postupak je zasnovan na izboru **reprezentativne elementarne zapremine (REZ)**. Ova zapremina je donja granična vrednost zapremine porozne sredine koja još uvek reprezentuje sve njene karakteristike (slika2.1).



Slika 2.1 Reprezentativna elementarna zapremina

Analiza strujanja i prenosa toplote zakonima kontinuuma unutar porozne sredine ispod ove granične sredine nema smisla.

Ovim postupkom osrednjavanja se "lokalne veličine" izvode iz matematičke tačke u nekoj od faza na makro nivu tj. nivu efektivnih veličina, odnosno osrednjavaju se na celu REZ ili na samo jednu fazu unutar REZ.

Izbor REZ zavisi od karakterističnih duţina na mikro i makro nivou i da bi ona bila kvalitetno izabrana potrebno je zadovoljiti sledeće uslove:

a) srednje vrednosti veličina treba da su jednoznačne funkcije vremena i poloţaja tačke, a onda su i nezavisne od REZ-e,

b) srednje vrednosti veličina treba da su neprekidne i diferencijalne po vremenu i prostornim koordinatama onoliko puta koliko je to potrebno,

c) odnos karakteristične mikroskopske duţine porozne sredine d i karakteristične duţine l^* REZ-e treba da je $l^* \gg d$,

d) odnos karakteristične makroskopske duţine porozne sredine duţ koje dolazi do značajnih promena osrednjenih veličina i karakteristične duţine l^* REZ-e je $L \gg l^*$.

Ako je ψ bilo koja veličina iz porozne sredine onda se njena "osrednjena vrednost" po celoj zapremini definiše izrazom:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \psi dV, \tag{2.3.1}$$

gde je $dV = dx'dy'dz'$ diferencijalna zapremina a x', y' i z' koordinate na mikro nivou.

"Osrednjavanje" se moţe izvršiti i samo unutar jedne faze zapremine V i tako se dobija "unutrašnja osrednjena vrednost" te veličine. Ovo osrednjavanje je definisano izrazom:

$$\langle \psi \rangle^k = \frac{1}{V_k} \int_V \psi dV, \tag{2.3.2}$$

gde je $k = f \vee s$ zavisno od toga da li se "osrednjavanje" vrši u fluidnoj (f) ili čvrstoj (s) fazi.

Kako je poroznost data izrazom:

$$\varepsilon_k = \frac{V_k}{V}, \tag{2.3.3}$$

to izmeĎu "osrednjenih" vrednosti (2.3.1) i (2.3.2) postoji sledeća veza:

$$\langle \psi \rangle = \varepsilon_k \langle \psi \rangle^k. \tag{2.3.4}$$

Veza izmeĎu konkretne vrednosti u tački i "unutrašnje osrednjene vrednosti" data je Gray-jevom [209] relacijom:

$$\psi = \langle \psi \rangle^k + \tilde{\psi}, \tag{2.3.5}$$

odakle proizilazi da je:

$$\langle \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi} \rangle^k = 0. \tag{2.3.6}$$

Pre nego se preĎe na samo matematičko modeliranje problema koji se u ovom radu izučava ukazaće se na neke relacije koje proizilaze iz ovakvog načina osrednjavanja.

Zapreminsko osrednjavanje zbira dve veličine dato je relacijom:

$$\langle \psi + \varphi \rangle^{k} = \langle \psi \rangle^{k} + \langle \varphi \rangle^{k}, \tag{2.3.7}$$

a proizvoda relacijom:

$$\langle \psi \varphi \rangle^{k} = \langle \psi \rangle^{k} \langle \varphi \rangle^{k} + \langle \tilde{\psi} \tilde{\varphi} \rangle^{k}. \tag{2.3.8}$$

Dokazi poslednjih relacija su vrlo jednostavni.

Za zapreminsko osrednjavanje parcijalnog izvoda po vremenu vaţi relacija:

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \psi \vec{u}_A \vec{n} dA, \tag{2.3.9}$$

odnosno za unutrašnje osrednjavanje relacije

$$\varepsilon_k \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle^{k} = \frac{\partial \left(\varepsilon_k \langle \psi \rangle^{k} \right)}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \psi \vec{u}_A \vec{n} dA, \tag{2.3.10}$$

gde su: A_{fs} - površina kontakta izmeĎu faza, $\vec{u}_A$ -brzina površi A_{fs} i $\vec{n}$ - jedinični vektor upravan na površ A_{fs}.

Zapreminsko osrednjavanje prostornog izvoda skalarne veličine dato je relacijom:

$$\langle \nabla \psi \rangle = \bar{\nabla} \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \psi \vec{n}_A dA, \tag{2.3.11}$$

odnosno relacijom:

$$\langle \nabla \psi \rangle = \bar{\nabla} \left(\varepsilon_k \langle \psi \rangle^{k} \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \psi \vec{n}_A dA. \tag{2.3.12}$$

Poslednje dve relacije vaţe i za slučaj kada je veličina ψ vektor i tada one predstavljaju teoremu zapreminskog osrednjavanja divergencije.

Oznaka" $^{-}$ " iznad operatora ∇ označava da se on odnosi na makroskopske koordinate a bez oznake" $^{-}$ " na mikroskopske koordinate. Ova oznaka se vrlo često izostavlja, ali se gore rečeno normalno podrazumeva.

Ovde se, ilustracije radi, pokazuje izvoĎenje relacije (2.3.11). Moţe se poći od poznate transportne jednačine [192] napisane u obliku

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_{A(t)} \psi \vec{u}_A \vec{n} dA, \tag{2.3.13}$$

gde su: $\vec{u}_A$ - brzina površi, $A(t)$ koja obuhvata zapreminu $V(t)$, a $\vec{n}$ je jedinični vektor normale na $A(t)$. Brzina $\vec{u}_A$ se razlikuje od brzine fluida na površi $A(t)$. Kada su ove dve brzine iste onda su opšta i Reynolds-ova transportna teorema identične.

Druga relacija koja se koristi prilikom ovog izvoĐenja je teorema divergencije

$$\int_{V(t)} \nabla\psi dV = \int_{A(t)} \psi n dA. \tag{2.3.14}$$

Sada se posmatra strujanje kroz poroznu sredinu i uoči tačka P na krivoj C (videti sliku 2.1) i oko P su onda lokalne vrednosti $V(s), V_f(s), A(s), A_f(s), \varepsilon(s)$ itd. Onda relacija (2.3.13) za bilo koju veličinu ψ povezanu sa fluidom moţe da se zapiše u obliku:

$$\frac{d}{ds}\int_{V_f(s)} \psi dV = \int_{V_f(s)} \frac{\partial\psi}{\partial s} dV + \int_{A_f(s)} \psi \frac{d\vec{r}}{ds}\vec{n} dA, \tag{2.3.15}$$

gde je $\vec{r}$ - vektor poloţaja. Kako je $\psi = \psi[x_i(s), t]$ to su:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s}. \tag{2.3.16}$$

Onda relacija (2.3.15) postaje:

$$\frac{d}{ds}\int_{V_f(s)} \psi dV = \int_{A_f(s)} \psi \frac{d\vec{r}}{ds}\vec{n} dA, \tag{2.3.17}$$

jer je na razdelnoj površi (fluid-čvrsta faza) vektor $\frac{d\vec{r}}{ds}$ upravan na vektor $\vec{n}$. $A_e(s)$ predstavljaju površi na ulazu i izlazu fluida.

Sada treba da se eliminiše $\frac{d\vec{r}}{ds}$ iz poslednjeg izraza. Zbog toga se uvodi vektor:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + \vec{W}(s), \tag{2.3.18}$$

u kome je $\vec{r}_0$ - vektor poloţaja tačke P, a $\vec{W}$ - vektor poloţaja tačke na površi $A_f(s)$ u odnosu na P i dobija se da je operator:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\vec{r}_0}{ds}\nabla. \tag{2.3.19}$$

Imajući u vidu da $\frac{d\vec{r}_0}{ds}$ nije fukcija od $A_f(s)$ i koristeći (2.3.17) - (2.3.19) dobija se relacija:

$$\frac{d\vec{r}_0}{ds}\left(\nabla \int_{V_f(s)} \psi dV - \int_{A_e(s)} \psi\vec{n} dA\right) = \int_{A_e(s)} \psi \frac{d\vec{W}}{ds}\vec{n} dA. \tag{2.3.20}$$

Kako su vektori $\frac{d\vec{W}}{ds}$ i $\vec{n}$ meĐusobno upravni, poslednja jednačina se svodi na relaciju:

$$\frac{d\vec{r}_0}{ds}\left(\nabla \int_{V_f(s)} \psi dV - \int_{A_e(s)} \psi \vec{n} dA\right) = 0, \tag{2.3.21}$$

koja je zadovoljena za svako $\vec{r}_0$ i onda se poslednja jednačina svodi na relaciju:

$$\nabla \int_{V_f(s)} \psi dV = \int_{A_e(s)} \psi \vec{n} dA. \tag{2.3.22}$$

Koristeći sada teoremu divergencije:

$$\int_{V_f} \nabla \psi dV = \int_{A_{sf}} \psi \vec{n} dA + \int_{A_e} \psi \vec{n} dA, \tag{2.3.23}$$

i zamenom (2.3.22) u njoj dobija se relacija:

$$\int_{V_f} \nabla \psi dV = \int_{A_{sf}} \psi \vec{n} dA + \int_{V_f} \psi dV. \tag{2.3.24}$$

Deleći poslednju relaciju sa V dobija se relacija (2.3.11) što je bio i zadatak dokazivanja.

Za formiranje matematičkog modela ovde razmatranog problema transporta mase i prenosa toplote u magnetnom i električnom polju polazi se od jednačina konzervacije (mase, impulsa i toplotne energije), Maxwell-ovih jednačina i Ohm-ovog zakona definisanih u "matematičkoj tački" koja pripada nekoj od faza. Zapreminskim osrednjavanjem po REZ osrednjena vrednost veličine se dodaje svim tačkama REZ ili svim tačkama te faze unutar REZ. Na taj način se od kontrolne zapremine mogu zapaziti "skokovite kontinualnosti" posmatrane veličine. Ovakva "polja" opisana su makroskopskim jednačinama. Ovaj postupak će se primeniti na osrednjavanje gore pomenutih jednačina.

2.4 Makroskopska jednačina kontinuiteta

Jednačina kontinuiteta definisana u tački koja pripada fluidnoj fazi tj. mikroskopska jednačina kontinuiteta ima oblik:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \rho_f \vec{W} = 0. \tag{2.4.1}$$

Posle zapreminskog osrednjavanja ona postaje:

$$\frac{\partial \langle \rho_f \rangle}{\partial t} + \frac{1}{V}\int_V \nabla \rho_f \vec{W} dV = 0. \tag{2.4.2}$$

Koristeći teoremu zapreminskog osrednjavanja divergencije (2.3.11) (kada je ψ vektor) i imajući u vidu da je brzina $\vec{W}$ na fluidno - čvrstoj površi A_{fs} jednaka nuli poslednja jednačina postaje:

$$\frac{\partial\langle\rho_f\rangle}{\partial t}+\nabla\left\langle\rho_f\vec{W}\right\rangle=0. \tag{2.4.3}$$

Ako se osrednjavanje vrši po fluidnoj fazi onda će makroskopska jednačina kontinuiteta imati oblik:

$$\frac{\partial\left(\varepsilon\langle\rho_f\rangle^f\right)}{\partial t}+\nabla\left(\varepsilon\left\langle\rho_f\vec{W}\right\rangle^f\right)=0. \tag{2.4.4}$$

2.5. Makroskopska jednačina impulsa

"Mikroskopska" jednačina impulsa za kretanje nestišljivog fluida kroz poroznu sredinu u prisustvu primenjenog spoljašnjeg magnetnog i električnog polja je poznata proširena Navier-Stokes-ova jednačina :

$$\rho_f\left[\frac{\partial\vec{W}_f}{\partial t}+\nabla\left(\vec{W}_f\vec{W}_f\right)\right]=-\nabla p_f+\rho_f\vec{g}+\mu_f\nabla^2\vec{W}_f+\vec{j}^*\times\vec{B} \tag{2.5.1}$$

gde indeks "f" označava da se veličine odnose na fluid. U daljem se ovaj indeks, radi jednostavnijeg zapisa, izostavlja ali se podrazumeva.

Primenjujući zapreminsko osrednjavanje na jednačinu (2.5.1) dobija se jednačina

$$\rho\left[\left\langle\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\nabla\left(\vec{W}\vec{W}\right)\right\rangle\right]=-\langle\nabla p\rangle+\langle\rho\vec{g}\rangle+\mu\left\langle\nabla^2\vec{W}\right\rangle+\left\langle\vec{j}^*\times\vec{B}\right\rangle. \tag{2.5.2}$$

Koristeći dalje izraze (2.3.9) , (2.3.11) i činjenicu da je brzina $\vec{W}$ na razdelnoj površi A_{fs} jednaka nuli poslednja jednačina postaje:

$$\begin{aligned}&\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\left\langle\vec{W}\right\rangle^f+\nabla\left(\varepsilon\left\langle\vec{W}\vec{W}\right\rangle^f\right)\right]=\\&=-\nabla\left(\varepsilon\langle p\rangle^f\right)+\varepsilon\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\left(\varepsilon\left\langle\vec{W}\right\rangle^f\right)+\left(\varepsilon\left\langle\vec{j}^*\times\vec{B}\right\rangle^f\right)-\\&-\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}p\vec{n}_{fs}dA+\frac{\mu}{V}\int_{A_{fs}}\left(\nabla\vec{W}\right)\vec{n}_{fs}dA.\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Dva poslednja sabirka mogu se zapisati u obliku:

$$\vec{R}^*=-\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}p\vec{n}_{fs}dA+\frac{\mu}{V}\int_{A_{fs}}\left(\nabla\vec{W}\right)\vec{n}_{fs}dA. \tag{2.5.4}$$

Za veličinu $\vec{R}^*$, se na osnovu analize jednačine (2.5.3), moţe reći da predstavlja rezultantu sila otpora po jedinici zapremine poroznog materijala koja je posledica prisustva čvrste faze u jedinici zapremine.

Na osnovu Gray-eve relacije brzina u tački fluidnog prostora $\vec{W}$ moţe se predstaviti u obliku:

$$\vec{W} = \langle \vec{W} \rangle^f + \tilde{\vec{W}}, \tag{2.5.5}$$

a onda je:

$$\langle \vec{W}\vec{W} \rangle^f = \langle \vec{W} \rangle^f \langle \vec{W} \rangle^f + \langle \tilde{\vec{W}}\tilde{\vec{W}} \rangle^f. \tag{2.5.6}$$

Koristeći dalje da je gustina struje $\vec{j}^*$ data izrazom:

$$\vec{j}^* = \sigma\left(\vec{E} + \vec{W} \times \vec{B}\right), \tag{2.5.7}$$

u kome su:

σ - elektroprovodnost fluida, $\vec{E}$ - jačina spoljašnjeg primenjenog električnog polja, $\vec{B}$ - magnetna indukcija spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja, dobija se da je:

$$\langle \vec{j}^* \times \vec{B} \rangle^f = \langle \vec{j}^* \rangle^f \times \langle \vec{B} \rangle^f. \tag{.(2.5.8)}$$

Uzimajući u obzir (2.5.4), (2.5.6) i (2.5.8) jednačina (2.5.3) postaje:

$$\begin{aligned} &\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\langle \vec{W} \rangle^f + \nabla\left(\varepsilon\langle \vec{W} \rangle^f \langle \vec{W} \rangle^f\right) + \nabla\left(\varepsilon\langle \tilde{\vec{W}}\tilde{\vec{W}} \rangle^f\right)\right] = \\ &= -\nabla\left(\varepsilon\langle p \rangle^f\right) + \varepsilon\rho\vec{g} + \mu\nabla^2\left(\varepsilon\langle \vec{W} \rangle^f\right) + \varepsilon\langle \vec{j}^* \rangle^f \times \langle \vec{B} \rangle^f + \vec{R}^*, \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

a posle podele sa ε ima oblik:

$$\begin{aligned} &\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle \vec{W} \rangle^f + \nabla\left(\langle \vec{W} \rangle^f \langle \vec{W} \rangle^f\right) + \nabla\left(\langle \tilde{\vec{W}}\tilde{\vec{W}} \rangle^f\right)\right] = \\ &= -\nabla\left(\langle p \rangle^f\right) + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\left(\langle \vec{W} \rangle^f\right) + \langle \vec{j}^* \rangle^f \times \langle \vec{B} \rangle^f + \frac{\vec{R}^*}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Jednačina (2.5.10) predstavlja makroskopsku jednačinu impulsa.

"Zatvaranje" problema, modeliranje sile otpora, izvršili su Hsu i Cheng [193] i dobili da je sila $\vec{R}^*$ data izrazom:

$$\vec{R}^* = -\frac{\mu}{K^*}\varepsilon\langle \vec{W} \rangle^f - \rho\frac{F}{\sqrt{K^*}}\varepsilon\left|\langle \vec{W} \rangle^f\right|\langle \vec{W} \rangle^f, \tag{2.5.11}$$

i onda jednačina (2.5.10) postaje:

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}+\nabla\left(\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}\right)+\nabla\left(\left\langle\tilde{\vec{W}}\tilde{\vec{W}}\right\rangle^{f}\right)\right]=$$
$$=-\nabla\left(\left\langle p\right\rangle^{f}\right)+\rho\vec{g}+\mu\nabla^{2}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}+\left\langle\vec{j}^{*}\right\rangle^{f}\times\left\langle\vec{B}\right\rangle^{f}- \tag{2.5.12}$$
$$-\frac{\mu}{K^{*}}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}-\rho\frac{F}{\sqrt{K^{*}}}\left|\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}\right|\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}.$$

Treći sabirak na levoj strani jednačine (2.5.12) predstavlja hidrodinamičku disperziju koja je zanemarljivog reda veličine [43]. U literaturi se i poslednji sabirak na desnoj strani poslednje jednačine uglavnom zanemaruje što će se i u ovoj disertaciji učiniti. Jednačina (2.5.12) se u literaturi uglavnom koristi u sledećem obliku:

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}+\left(\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}\nabla\right)\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}\right]=$$
$$=-\nabla\left(\left\langle p\right\rangle^{f}\right)+\rho\vec{g}+\mu\nabla^{2}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}+\left\langle\vec{j}^{*}\right\rangle^{f}\times\left\langle\vec{B}\right\rangle^{f}-\frac{\mu}{K^{*}}\left\langle\vec{W}\right\rangle^{f}. \tag{2.5.13}$$

Zanemaruje se gravitaciona sila, izostavljaju se uglaste zagrade i oznaka f, ali se podrazumeva da su sve veličine osrednjene u fluidnoj fazi, tako da će se koristiti jednačina impulsa u obliku:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{W}}{\partial t}+\left(\vec{W}\nabla\right)\vec{W}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^{2}\vec{W}+\vec{j}^{*}\times\vec{B}-\frac{\mu}{K^{*}}\vec{W}. \tag{2.5.14}$$

2.6 Makroskopska energijska jednačina

U cilju određivanja "makroskopskih" jednačina za fluid i čvrstu fazu polazi se od "mikroskopske" jednačine za fluid:

$$\rho_{f}c_{pf}\left[\frac{\partial T_{f}}{\partial t}+\nabla\left(\vec{W}_{f}T_{f}\right)\right]=\nabla\left(k_{f}\nabla T_{f}\right)+\mu_{f}\Phi+\frac{\vec{j}^{*}}{\sigma}, \tag{2.6.1}$$

i "mikroskopske" jednačine za čvrstu fazu:

$$\rho_{s}c_{s}\frac{\partial T_{s}}{\partial t}=\nabla\left(k_{s}\nabla T_{s}\right). \tag{2.6.2}$$

Ove dve jednačine povezane su graničnim uslovima na razdelnoj (kontaktnoj) površi faza $\left(A_{fs}\right)$ koji su dati izrazima:

$$T_{f}=T_{s},\ k_{f}\nabla T_{f}\vec{n}_{fs}=k_{s}\nabla T_{s}\vec{n}_{fs}. \tag{2.6.3}$$

Sada se vrši zapreminsko osrednjavanje jednačine (2.6.1) po zapremini V. Prvo se osrednjavaju pojedini članovi koji se nalaze u toj jednačini. Tako su [3]:

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle T_f \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} T_f \vec{V}_{fs} \vec{n}_{fs} dA = \frac{\partial \langle T_f \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \langle T_f \rangle^f \right), \tag{2.6.4}$$

$$\left\langle \nabla\left(\vec{W}_f T_f \right) \right\rangle = \bar{\nabla} \left\langle \vec{W}_f T_f \right\rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \vec{W}_f T_f \vec{n}_{fs} dA = \bar{\nabla} \left\langle \vec{W}_f T_f \right\rangle = \bar{\nabla}\left(\varepsilon \left\langle \vec{W}_f T_f \right\rangle^f \right), \tag{2.6.5}$$

pri čemu je kod poslednjeg izraza iskorišćena teorema zapreminskog osrednjavanja divergencije (2.3.1)

$$\left\langle \nabla\left(k_f T_f \right) \right\rangle = \bar{\nabla} \left\langle k_f T_f \right\rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_f \nabla T_f \vec{n}_{fs} dA,$$

koristeći i ovde za prvi sabirak na desnoj strani poslednjeg izraza teoremu divergencije izraz postaje

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla\left(k_f \nabla T_f \right) \right\rangle &= \bar{\nabla}\left[\varepsilon k_f \bar{\nabla} \langle T_f \rangle^f + k_f \langle T_f \rangle^f \left(\bar{\nabla} \varepsilon \right) \right] + \\ &+ \bar{\nabla}\left(\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_f T_f \vec{n}_{fs} dA \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_f \nabla T_f \vec{n}_{fs} dA. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Carbonell i Whitaker [39] pokazali su da je :

$$\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} T_f \vec{n}_{fs} dA \approx \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \tilde{T}_f \vec{n}_{fs} dA - \left(\bar{\nabla} \varepsilon \right) \langle T_f \rangle^f . \tag{2.6.7}$$

Koristeći izraze (2.6.4), (2.6.5), (2.6.6) i (2.6.7) dobija se da osrednjena jednačina (2.6.1) ima sledeći zapis:

$$\begin{aligned} &\rho_f c_{pf} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \langle T_f \rangle^f \right) + \rho_f c_{pf} \bar{\nabla}\left(\varepsilon \left\langle T_f \vec{W}_f \right\rangle^f \right) = \\ &= \bar{\nabla}\left[\varepsilon k_f \bar{\nabla} \langle T_f \rangle^f \right] + \bar{\nabla}\left(\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_f \tilde{T}_f \vec{n}_{fs} dA \right) + \\ &+ \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_f T_f \vec{n}_{fs} dA + \mu_f \varepsilon \langle \Phi \rangle^f + \varepsilon \left\langle \frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma} \right\rangle^f . \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Analogno se za (2.6.2) dobija jednačina:

$$\begin{aligned} \rho_s c_s \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\varepsilon) \langle T_s \rangle^s \right] &= \bar{\nabla}\left[(1-\varepsilon) k_s \bar{\nabla} \langle T_s \rangle^s \right] - \\ &- \bar{\nabla}\left(\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_s \tilde{T}_s \vec{n}_{fs} dA \right) - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} k_s \nabla T_s \vec{n}_{fs} dA, \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

gde je iskorišćena jednakost $\vec{n}_{fs} = -\vec{n}_{fs}$.

Uvodeći pretpostavku lokalne termičke ravnoteţe u obliku:

$$\langle T_f \rangle^f = \langle T_s \rangle^s = \langle T \rangle, \tag{2.6.10}$$

gde je $\langle T \rangle$ prostorno osrednjena temperatura, a na A_{fs} zbog graničnih uslova (2.6.3) je

$$\tilde{T}_f = \tilde{T}_s = \tilde{T}. \tag{2.6.11}$$

Unutar V_f i V_s rasporedi odstupanja $\tilde{T}_s$ i $\tilde{T}_f$ se razlikuju i zavise od strukture matrice.

Ovim je otvoren put za formiranje makroskopske energijske jednačine.

Da bi se to i realizovalo vrši se sabiranje jednačina (2.6.8) i (2.6.9) i pri tome koriste izrazi (2.6.10) i (2.6.11) i granični uslovi (2.6.3) i tako dolazi do sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\rho_f c_{pf}\varepsilon + \rho_s c_s (1-\varepsilon)\right]\langle T \rangle\right\} + \rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\left\langle \vec{W}_f Tf \right\rangle^f\right) = \\
&= \bar{\nabla}\left\{\left[\varepsilon k_f + (1-\varepsilon) k_s\right]\bar{\nabla}\langle T \rangle\right\} + \\
&+ \bar{\nabla}\left(\frac{k_f - k_s}{V}\int_{A_{fs}} \tilde{T}\vec{n}_{fs} dA\right) + \mu_f \varepsilon \langle \Phi \rangle^f + \varepsilon\left\langle \frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma} \right\rangle^f.
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Koristeći Gray-evu dekompoziciju biće:

$$T_f = \langle T \rangle + \tilde{T}_f, \tilde{W}_f = \left\langle \vec{W}_f \right\rangle + \tilde{\vec{W}}_f, \tag{2.6.13}$$

i jednačina (2.6.12) postaje:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\rho_f c_{pf}\varepsilon + \rho_s c_s (1-\varepsilon)\right]\langle T \rangle\right\} + \rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\langle T \rangle\left\langle \vec{W}_f \right\rangle^f\right) + \rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\left\langle \tilde{T}_f \tilde{\vec{W}}_f \right\rangle^f\right) = \\
&= \bar{\nabla}\left\{\left[\varepsilon k_f + (1-\varepsilon) k_s\right]\bar{\nabla}\langle T \rangle\right\} + \\
&+ \bar{\nabla}\left(\frac{k_f - k_s}{V}\int_{A_{fs}} \tilde{T}\vec{n}_{fs} dA\right) + \mu_f \varepsilon \langle \Phi \rangle^f + \varepsilon\left\langle \frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma} \right\rangle^f.
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Predmet velikog broja radova bilo je modeliranje prva dva sabirka na desnoj strani poslednje jednačine. Tako su Nazad, Carbonell i Whitaker [194] predloţili sledeće modeliranje

$$\bar{\nabla}\left\{\left[\varepsilon k_f + (1-\varepsilon) k_s\right]\bar{\nabla}\langle T \rangle\right\} + \bar{\nabla}\left(\frac{k_f - k_s}{V}\int_{A_{fs}} \tilde{T}\vec{n}_{fs} dA\right) = \bar{\nabla} k_0 \bar{\nabla}\langle T \rangle, \tag{2.6.15}$$

gde je k_0- "stignantna" toplotna provodnost koja u suštini predstavlja provodnost porozne sredine zasićene fluidom koji miruje.

Poslednji sabirak na levoj strani jednačine (2.6.14) predstavlja termički disperzioni efekat koji modeliran ima oblik

$$\rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\left\langle \tilde{T}_f \tilde{\tilde{\vec{W}}}_f \right\rangle^f\right) = -\bar{\nabla} k_d \bar{\nabla}\langle T\rangle , \qquad (2.6.16)$$

gde je k_d - disperziona toplotna provodnost.

Imajući u vidu izraze (2.6.15) i (2.6.16) jednačina (2.6.14) moţe se zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\rho_f c_{pf}\varepsilon+\rho_s c_s(1-\varepsilon)\right]\langle T\rangle\right\}+\rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\langle T\rangle\left\langle \vec{W}_f\right\rangle^f\right)= \\ =\bar{\nabla}k_{eff}\bar{\nabla}\langle T\rangle+\mu\varepsilon\langle\Phi\rangle^f+\varepsilon\left\langle\frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma}\right\rangle^f ,\end{gathered} \qquad (2.6.17)$$

gde je $k_{eff} = k_0 + k_d$ - efektivna toplotna provodnost.

UvoĎenjem efektivnog toplotnog kapaciteta

$$\left(\rho c_p\right)_{eff} = \varepsilon\rho_f c_{pf} + (1-\varepsilon)\rho_s c_s , \qquad (2.6.18)$$

izostavljanjem uglastih zagrada kao oznake za zapreminsko osrednjavanje i nadvučenog operatora kao oznake operatora na nivou "makroskopskih" koordinata $\left(\left\langle \tilde{W}_f\right\rangle \sim \vec{W}, \langle T\rangle \sim T, \tilde{\nabla} \sim \nabla, ...\right)$ jednačina (2.6.17) postaje:

$$\left(\rho c_p\right)_{eff}\frac{\partial T}{\partial t}+\rho_f c_{pf}\nabla\left(\vec{W}T\right)=k_{eff}\nabla T+\mu\Phi+\frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma}. \qquad (2.6.19)$$

U literaturi se vrlo često razmatra samo fluidna faza dok se uticaj čvrste faze unosi posredstvom graničnih uslova. U tom cilju, koristeći da je

$$\left\langle T_f\vec{W}_f\right\rangle^f = \left\langle T_f\right\rangle^f\left\langle \vec{W}_f\right\rangle^f + \left\langle \tilde{T}_f\tilde{\tilde{\vec{W}}}_f\right\rangle^f , \qquad (2.6.20)$$

jednačina (2.6.8) transformiše se na jednačinu:

$$\begin{gathered}\rho_f c_{pf}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\left\langle T_f\right\rangle^f\right)+\rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\left\langle T_f\right\rangle^f\left\langle \vec{W}_f\right\rangle^f\right)= \\ =\bar{\nabla}\left[\varepsilon k_f\bar{\nabla}\left\langle T_f\right\rangle^f\right]+\bar{\nabla}\left(\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}k_f\tilde{T}_f\vec{n}_{fs}dA\right)+ \\ +\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}k_f\nabla T_f\vec{n}_{fs}dA-\rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\left\langle \tilde{T}_f\tilde{\tilde{\vec{W}}}_f\right\rangle^f\right)+\mu_f\varepsilon\langle\Phi\rangle^f+\varepsilon\left\langle\frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma}\right\rangle^f .\end{gathered} \qquad (2.6.21)$$

Ako se izvrši sledeće modeliranje:

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{V}\int_{A_{fs}} k_f\tilde{T}_f\vec{n}_{fs}dA\right)+\frac{1}{V}\int_{A_{fs}} k_f\nabla T_f\vec{n}_{fs}dA-\rho_f c_{pf}\bar{\nabla}\left(\varepsilon\left\langle\tilde{T}_f\tilde{\vec{W}}_f\right\rangle^f\right)=$$
$$=\varepsilon\frac{\mu}{K^*}\left(\left\langle\vec{W}\right\rangle^f\left\langle\vec{W}\right\rangle^f\right), \tag{2.6.22}$$

onda se jednačina (2.6.21), posle uprošćenja zapisa

$$\left(\tilde{W}_f\sim\vec{W},\rho_f\sim\rho,c_{pf}\sim c_p,\left\langle T_f\right\rangle^f\sim T,k_f\sim k,\mu_f\sim\mu,\bar{\nabla}\sim\nabla,...\right),$$

transformiše na jednačinu:

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\nabla\left(T\vec{W}\right)\right]=k\nabla^2T+\frac{\mu}{K^*}\left(\vec{W}\vec{W}\right)+\mu\Phi+\frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma}. \tag{2.6.23}$$

Treba imati u vidu, da su u poslednjoj jednačini, veličine osrednjene po fluidnoj zapremini.

U literaturi se, umesto jednačine eneregije napisane u obliku (2.6.23), mnogo češće koristi jednačina energije napisana u sledećem obliku:

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\vec{W}\nabla\right)T\right]=k\nabla^2T+\frac{\mu}{K^*}\left(\vec{W}\vec{W}\right)+\mu\Phi+\frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma}, \tag{2.6.24}$$

što će, i u ovom radu, biti slučaj.

2.7 Osnovne jednačine elektromagnetike

Kako se u ovom radu izučava strujanje fluida i transport toplote u poroznoj sredini na koju deluju spoljašnja primenjena električna i magnetna polja to je pored do sada datih jednačina neophodno dati i osnovne jednačine elektromagnetike, koje će se u radu koristiti.

Ovde se daju Maxwell-ove jednačine u sledećim oblicima [195]:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E} \text{ - indukcija električnog polja,}$$
$$\vec{B}=\mu_0\vec{H} \text{ - indukcija magnetnog polja,}$$
$$\vec{j}^*=\nabla\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \text{ - gustina električne struje,}$$
$$\nabla\vec{B}=0,$$
$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0, \tag{2.7.1}$$

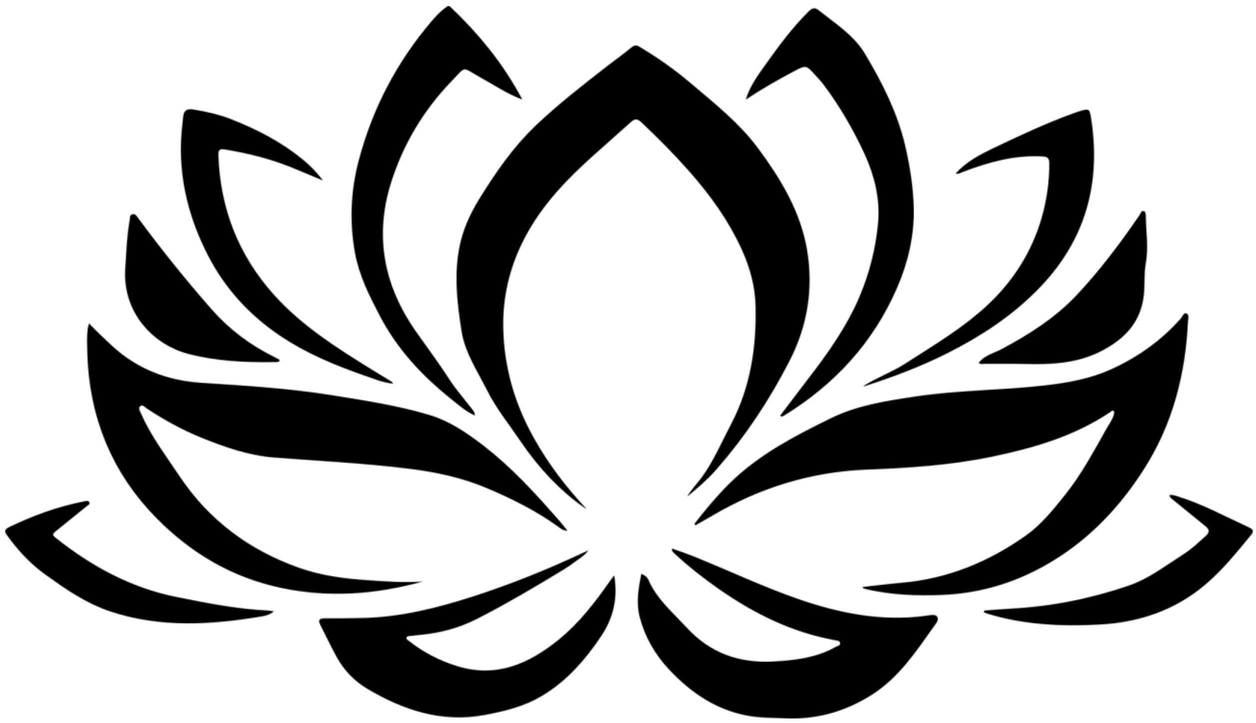
i Ohm-ov zakon u obliku:

$$\vec{j}^{*} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{W} \times \vec{B}\right). \tag{2.7.2}$$

Iz jednačina (2.7.1) i Ohm-ovog zakona dolazi se do jednačine magnetne indukcije [195]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left(\vec{W}\nabla\right)\vec{B} = \frac{1}{\sigma\mu_0}\nabla^2\vec{B} + \left(\vec{B}\nabla\right)\vec{W}. \tag{2.7.3}$$

I u ovim jednačinama veličine su osrednjene u fluidnom prostoru, a onda i same jednačine.

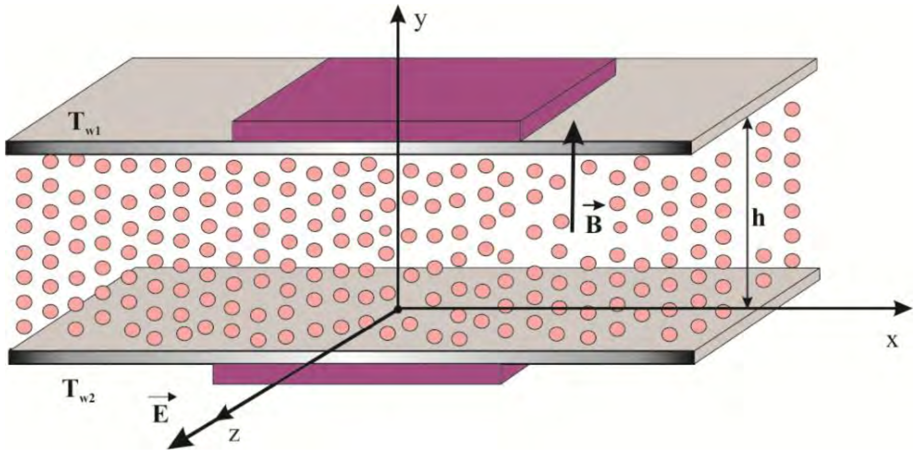


Poglavlje 3

3. MHD strujanje fluida i prenos toplote u poroznoj sredini između horizontalnih ploča

3.1 MHD strujanje i prenos toplote u poroznoj sredini između dve horizontalne nepokretne ploče

Razmatra se problem MHD laminarnog strujanja i prenosa toplote nestišljivog elektroprovodnog fluida u poroznoj sredini izmeĐu horizontalnih nepokretnih ploča. Ploče se nalaze na meĐusobnom rastojanju h i na konstantnim temperaturama T_{w1} i T_{w2}.



Slika 3a Fizički model strujanja

Potpuno razvijeno strujanje elektroprovodnog fluida se odvija izmeĐu ploča usled konstantne razlike pritisaka po jedinici duţine. Fluid i ploče su izloţeni dejstvu spoljašnjeg primenjenog homogenog magnetnog polja koje je pravca i smera y ose i čija je magnetna indukcija $\vec{B}$ i homogenog spoljašnjeg primenjenog električnog polja $\vec{E}$ koje deluje u pravcu z ose.

Razmatra se stacionarni problem tj. problem kod koga fizičke veličine strujanja i fluida ne zavise od vremena. Problem se izučava za slučajeve kada je magnetni Reynolds-ov broj manji od jedinice tj. u takozvanoj bezindukcionoj aproksimaciji. Ovaj naziv potiče od činjenice da se zanemaruje indukovano magnetno polje.

3.1.1 Matematički model

U cilju formiranja matematičkog modela ovog problema strujanja fluida i prenosa toplote polazi se od :
jednačine kontinuiteta

$$\mathrm{div}\vec{W} = 0, \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W}) = 0, \tag{3.1.1}$$

proširene Navier-Stokes-ove jednačine

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \rho\left(\vec{W}\nabla\right)\vec{W} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{W} - \frac{\mu}{K^*}\vec{W} + \vec{j}^* \times \vec{B}, \tag{3.1.2}$$

energijske jednačine

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{W}\nabla T\right) = k\nabla^2 T + \mu\Phi + \frac{\mu}{K^*}\left(\vec{W}\cdot\vec{W}\right) + \frac{\vec{j}^{*2}}{\sigma}, \tag{3.1.3}$$

gde je Φ Reyleigh-eva funkicija disipacije definisana izrazom:

$$\begin{gathered}\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\nabla\vec{W}\right)^2,\end{gathered} \tag{3.1.4}$$

gde su sa u, v i w označene projekcije brzine strujanja fluida na ose x, y, z respektivno,i Ohm-ovog zakona, koji u ovom slučaju, ima zapis:

$$\vec{j}^* = \sigma\left(\vec{E} + \vec{W} \times \vec{B}\right). \tag{3.1.5}$$

Uzimajući u obzir da je problem ravanski (strujanje se odvija u ravni xy) zaključuje se da fizičke veličine strujanja i prenosa toplote ne zavise od koordinate z. Iz činjenice da je strujanje potpuno razvijeno zaključuje se da ove veličine ne zavise ni od koordinate x. Već je ranije rečeno da se izučava stacionarni problem tako da ove veličine ne zavise ni od vremena t.

Imajući u vidu rečeno, iz jednačine (3.1.1) se dobija da je $\partial v/\partial y = 0$ odakle sleduje da je komponenta brzine u pravcu y ose (upravna na ploče) konstantna

$$\vec{v} = \mathrm{const.} \tag{3.1.6}$$

Ova komponenta brzine strujanja postoji samo u slučajevima kada na pločama postoje izvori (ponori), ako toga nema ona je jednaka nuli. U ovom radu, u slučajevima kada je magnetni Reynolds-ov broj manji od jedinice, izučavaće se problemi kada na pločama postoje izvori (ponori).

Onda je brzina strujanja fluida data sledećim vektorom:

$$\vec{W} = u(y)\vec{i} + v\vec{j}. \tag{3.1.7}$$

Kako su indukcija $\vec{B}$ spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja i jačina $\vec{E}$ spoljašnjeg primenjenog električnog polja dati izrazima:

$$\vec{B} = B\vec{j}, \quad \vec{E} = E_z\vec{k}, \tag{3.1.8}$$

dobija se, iz Ohm-ovog zakona (3.1.5), da je gustina struje:

$$\vec{j}^* = \sigma(E_z + Bu)\vec{k}. \tag{3.1.9}$$

Poslednji sabirak u proširenoj Navier- Stokes-ovoj jednačini (3.1.2) sada moţe da se zapiše u obliku:

$$\vec{j} \times \vec{B} = -B\sigma(E_z + Bu)\vec{i}. \tag{3.1.10}$$

Unoseći vektore (3.1.7) i (3.1.10) u jednačinu (3.1.2), sprovodeći naznačene matematičke operacije uz već navedene uslove i projektujući je na ose x i y dolazi se respektivno do jednačina

$$\rho v \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} - \frac{\mu}{K^*}u - B\sigma(E_z + Bu), \tag{3.1.11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{K^*}v = 0. \tag{3.1.12}$$

Unoseći iste vektore u jednačinu konzervacije energije (energijsku jedanačinu) ista se transformiše na jednačinu

$$\rho c_p v \frac{dT}{dy} = k\frac{d^2T}{dy^2} + \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{\mu}{K^*}\left(u^2 + v^2\right) + \sigma(E_z + Bu)^2. \tag{3.1.13}$$

U ovom radu, u daljem, će se umesto jednačine (3.1.13) koristiti jednačina

$$k\frac{d^2T}{dy^2} + \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{\mu}{K^*}u^2 + \sigma(E_z + Bu)^2 = 0. \tag{3.1.14}$$

Zapaţa se da je jednačina (3.1.14) nastala tako što je u jednačini (3.1.13) na desnoj strani zanemaren kvadrat poprečne brzine v^2 što se moţe opravdati činjenicom da je $v^2 \ll u^2$ što je i uobičajeno u literaturi. Inače, zadrţavanje ove veličine ne bi predstavljalo nikakve suštinske probleme pri rešavanju jednačine (3.1.13). U istoj jednačini zanemaren je i član na njenoj levoj strani jer ne utiče značajno na prenošenje toplote. On bi zakomplikovao rešavanje jednačine (3.1.13), opet ne suštinski, ali u smislu obimnosti. Leva strana jednačine predstavlja supstangencijalni izvod tempetarure pomnoţen sa ρc_p, a implicitno supstangencijalni izvod entalpije fluida.

Dakle, matematički model ovog razmatranog problema predstavljaju jednačine (3.1.11), (3.1.12) i (3.1.14) i odgovarajući granični uslovi za brzinu i za temperaturu. Ovde će se razmatrati slučaj kada su obe ploče nepokretne tako da će ovim graničnim uslovima odgovarati sledeći zapisi:

$$u(0)=0,\ u(h)=0,$$
$$T(0)=T_{w2},\ T(h)=T_{w1}. \tag{3.1.15}$$

Za dalje izučavanje opisanog sistema transformišu se jednačine (3.1.11), (3.1.12) na bezdimenzione oblike. U tom cilju uvode se bezdimenzione veličine:

$$y^*=\frac{y}{h},\ u^*=\frac{u}{U},\ \Theta=\frac{T-T_{w2}}{T_{w1}-T_{w2}}, \tag{3.1.16}$$

gde su:

$$P=-\frac{\partial p}{\partial x}=\text{const},\quad U=\frac{h^2P}{\mu}. \tag{3.1.17}$$

Unošenjem bezdimenzionih veličina (3.1.16) u jednačine (3.1.11), (3.1.12) i (3.1.14) respektivno se iste mogu napisati u oblicima:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}-R_1\frac{du^*}{dy^*}-R_2u^*=Q_1, \tag{3.1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{h}{\mu U}p\right)=-\Lambda\beta, \tag{3.1.19}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}}+\Pr Ec\left[\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2+\Lambda u^{*2}+Ha^2\left(K+u^*\right)^2\right]=0, \tag{3.1.20}$$

gde su uvedene oznake date izrazima:

$$R_1=\beta\,\mathrm{Re},$$

$$R_2=\Lambda+Ha^2,$$

$$\beta=\frac{v}{U},$$

$$\mathrm{Re}=\frac{hU}{\nu}\ \text{- Reynolds-ov broj,}$$

$$\Lambda=\frac{h^2}{K^*}\ \text{- parametar (faktor) poroznosti,}$$

$$Ha = Bh\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \text{ - Hartmann-ov broj,}$$

$$Q_1 = KHa^2 - 1,$$

$$K = \frac{E_z}{BU} \text{ - faktor električnog opterećenja,}$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \text{ - Prandtl-ov broj,}$$

$$Ec = \frac{U^2}{c_p\left(T_{w1} - T_{w2}\right)} \text{ - Eckert-ov broj.} \qquad (3.1.21)$$

Odgovarajući granični uslovi u bezdimenzionom obliku dobijaju se iz graničnih uslova (3.1.15) i imaju reprezentacije:

$$u^*(0) = 0, \quad u^*(1) = 0,$$

$$\Theta(0) = 0, \quad \Theta(1) = 1. \qquad (3.1.22)$$

Dakle, matematički model opisanog problema u bezdimenzionom obliku predstavljaju jednačine (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20) i granični uslovi (3.1.22).

Za dalje teorijsko izučavanje opisanog problema neophodno je rešiti ove jednačine sa njima odgovarajućim graničnim uslovima.

3.1.2 Raspored brzine strujanja fluida

Za odreĎivanje rasporeda brzine strujanja fluida neophodno je rešiti jednačinu (3.1.18) sa graničnim uslovima (3.1.22). Zapaţa se da je ovu jednačinu moguće rešiti nezavisno od rešenja jednačina (3.1.19) i (3.1.20). Diferencijalna jednačina je linearna nehomogena drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Rešenje odgovarajuće homogene jednačine predstavlja se u obliku:

$$u_h^*(y) = C_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + C_2 \exp\left(r_2 y^*\right), \qquad (3.1.23)$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante, a r_1 i r_2 rešenja odgovarajuće karakteristične jednačine koja ima sledeći zapis:

$$r^2 - R_1 r - R_2 = 0. \qquad (3.1.24)$$

Iz poslednje jednačine se dobija da su r_1 i r_2:

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_2}\right). \tag{3.1.25}$$

Partikularno rešenje jednačine (3.1.18) je konstanta data izrazom:

$$u_p^* = -\frac{Q_1}{R_2}, \tag{3.1.26}$$

tako da je opšte rešenje pomenute jednačine:

$$u^*\left(y^*\right) = C_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + C_2 \exp\left(r_2 y^*\right) - \frac{Q_1}{R_2}. \tag{3.1.27}$$

Integracione konstante C_1 i C_2 odreĎuju se korišćenjem graničnih uslova (3.1.22) i imaju sledeće reprezentacije:

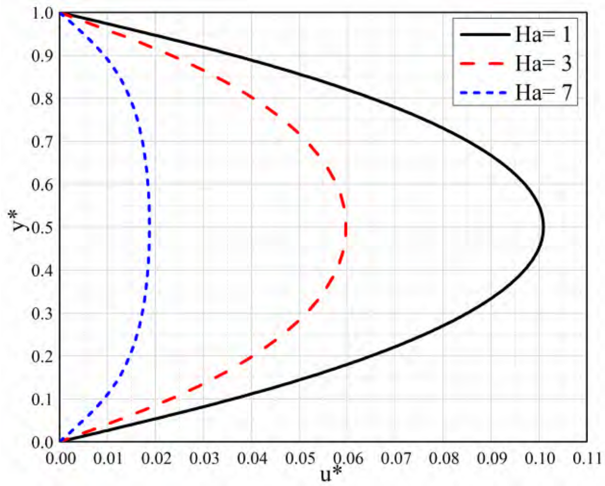
$$C_1 = \frac{Q_1}{R_2}\frac{\exp\left(r_2\right) - 1}{\exp\left(r_2\right) - \exp\left(r_1\right)},$$

$$C_2 = \frac{Q_1}{R_2}\frac{1 - \exp\left(r_1\right)}{\exp\left(r_2\right) - \exp\left(r_1\right)}. \tag{3.1.28}$$

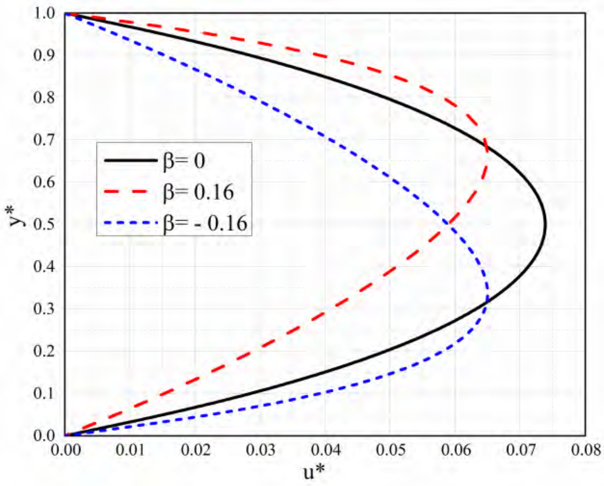
Radi bolje preglednosti, raspored brzine dobijen iz jednačine (3.1.27) sa vrednostima konstanti C_1 i C_2 (3.1.28) dat je grafički na slikama 3.3 i 3.4.

Na slici 3.1 dat je raspored uzduţne brzine u kanalu za različite vrednosti Hartmann-ovog broja. Sa ove slike se zapaţa da povećanje Hartmann-ovog broja tj. intenziteta primenjenog spoljašnjeg polja dovodi do poravnanja profila brzine strujanja fluida. Za sve vrednosti Hartmann-ovog broja ova brzina postiţe svoj maksimalni intenzitet u sredini kanala. Kriva brzine uz zidove, sa porastom Hartmann-ovog broja, je manje nagnuta u odnosu na y^* osu što znači da povećanje intenziteta spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja dovodi do smanjenja napona trenja na zidovima. Za slučaj kada je "gradijent" pritiska konstantan, za koji su i dati rezultati, povećanje intenziteta spoljašnjeg magnetnog polja povećava i intenzitet Lorentz-ove sile, a protok u kanalu smanjuje.

Na slici 3.2 prikazan je raspored bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti faktora β. Za slučaj $\beta = 0$ (kada na pločama nema ni izvora ni ponora) uţduţna brzina u je maksimalna na sredini kanala. U slučaju postojanja izvora i ponora na pločama intenzitet uzduţne brzine u opada. Kada je $\beta > 0$ (na donjoj ploči izvor a na gornjoj ponor) maksimalni intenzitet brzine je pomeren ka gornjoj ploči i na njoj se povećava napon trenja dok je za slučaj $\beta < 0$ maksimalni intenzitet uzduţne brzine pomeren ka donjoj ploči, a napon trenja na gornjoj ploči se smanjuje.

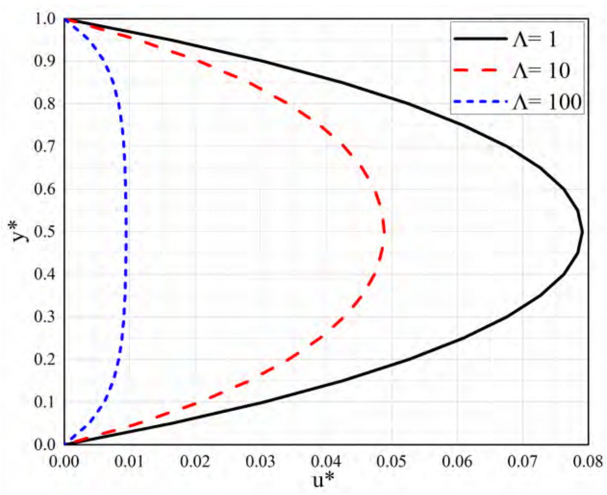


Slika 3.1 Raspored uzduţne brzine
za različite vrednosti Hartmann-ovog broja

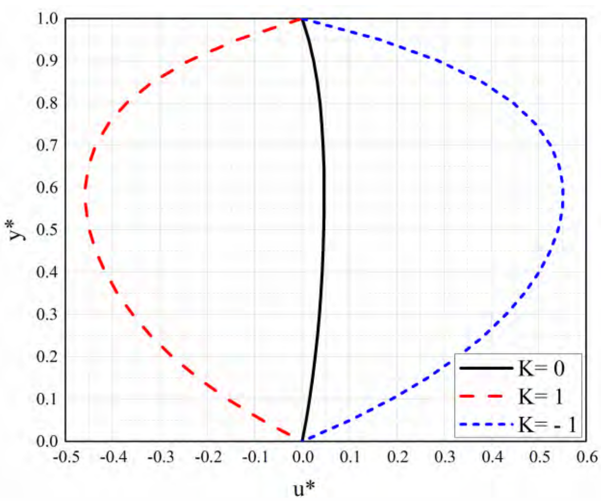


Slika 3.2 Raspored bezdimenzione uzduţne brzine
za različite vrednosti faktora β

Na slici 3.3 prikazan je raspored brzine za različite vrednosti faktora poroznosti. Zapaţa se da je za veće vrednosti ovog faktora intenzitet brzine manji i da praktično dolazi do "poravnanja" profila brzine. Najintenzivniji je rast brzine u okolini ploča za najmanju vrednost faktora poroznosti. Dakle, na pločama je najveći napon trenja kada faktor poroznosti ima najmanju vrednost. Brzina postiţe maksimalni intenzitet u sredini kanala ukoliko je $\beta = 0$.



Slika 3.3 Raspored bezdimenzione uzduţne brzine
za različite vrednosti faktora poroznosti



Slika 3.4 Raspored bezdimenzione brzine
za različite vrednosti faktora električnog opterećenja

Na sllici 3.4 prikazan je raspored brzine za različite vrednosti faktora električnog opterećenja. Za sve vrednosti faktora opterećenja brzina postiţe maksimalnu vrednost u sredini kanala za $\beta = 0$, dok je za $\beta \neq 0$ maksimalna brzina u okolini sredine kanala.

Promenom znaka faktora opterećenja tj. promenom smera primenjenog spoljašnjeg električnog polja moţe se promeniti i smer strujanja fluida u kanalu. Povećanjem intenziteta primenjenog spoljašnjeg električnog polja povećava se i napon viskoznog trenja na pločama.

3.1.3 Raspored bezdimenzione temperature

Za odreĎivanje bezdimenzione temperature neophodno je rešiti jednačinu (3.1.20) sa graničnim uslovima (3.1.22). U tom cilju prvo se jednačina (3.1.20) piše u obliku:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} = -\Pr Ec\left[\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + \Lambda u^{*2} + Ha^2\left(K+u^*\right)^2\right]. \tag{3.1.29}$$

Posle unošenja izraza (3.1.27) za $u^*\left(y^*\right)$ u prethodnu jednačinu i sprovoĎenja naznačenih matematičkih operacija ona se transformiše na oblik:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} = &-\Pr EcC_1^2\left(r_1^2+R_2\right)\exp\left(2r_1y^*\right)+C_2^2\left(r_2^2+R_2\right)\exp\left(2r_2y^*\right)+\\ &+2C_1C_2\left(r_1r_2+R_2\right)\exp\left(\left(r_1+r_2\right)y^*\right)+2C_1\left(KHa^2-Q_1\right)\exp\left(r_1y^*\right)+\\ &+2C_2\left(KHa^2-Q_1\right)\exp\left(r_2y^*\right)+K^2Ha^2+\frac{Q_1}{R_2}\left(Q_1-2KHa^2\right).\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Dvostrukom integracijom poslednje jednačine njeno rešenje dobija se u obliku:

$$\begin{aligned}\Theta\left(y^*\right) = &-\Pr Ec[R_3\exp\left(2r_1y^*\right)+R_4\exp\left(2r_2y^*\right)+R_5\exp\left(\left(r_1+r_2\right)y^*\right)+\\ &+R_6\exp\left(r_1y^*\right)+R_7\exp\left(r_2y^*\right)+R_8y^{*2}+C_3y^*+C_4],\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

gde su C_3 i C_4 integracione konstante, a radi kraćeg zapisa uvedene su oznake:

$$\begin{aligned}R_3 &= \frac{C_1^2}{4r_1^2}\left(r_1^2+R_2\right),\\ R_4 &= \frac{C_2^2}{4r_2^2}\left(r_2^2+R_2\right),\\ R_5 &= \frac{2C_1C_2}{\left(r_1+r_2\right)^2}\left(r_1r_2+R_2\right),\\ R_6 &= \frac{2C_1}{r_1^2}\left(KHa^2-Q_1\right),\\ R_7 &= \frac{2C_2}{r_2^2}\left(KHa^2-Q_1\right),\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

$$R_8 = \frac{1}{2}\left[K^2Ha^2 + \frac{Q_1}{R_2}\left(Q_1 - 2KHa^2\right)\right].$$

Integracione konstante C_3 i C_4 odreĎuju se iz graničnih uslova (3.1.22) za bezdimenzionu temperaturu i imaju sledeće reprezentacije:

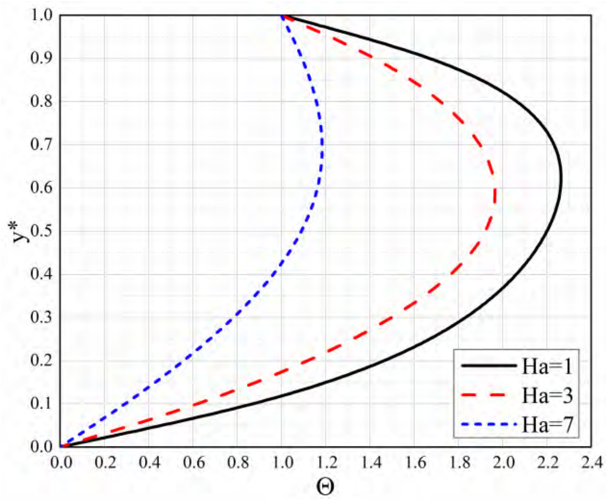
$$C_3 = R_3\left[1-\exp(2r_1)\right] + R_4\left[1-\exp(2r_2)\right] + R_5\left[1-\exp(r_1+r_2)\right] +$$

$$+R_6\left[1-\exp(r_1)\right] + R_7\left[1-\exp(r_2)\right] - R_8 - \frac{1}{\Pr Ec},$$

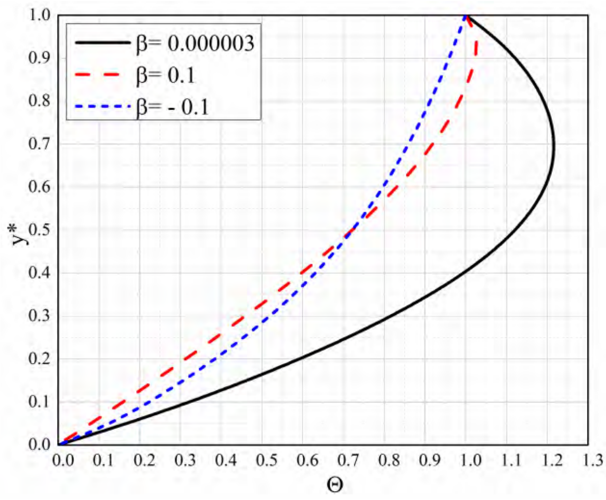
$$C_4 = -\left(R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7\right). \tag{3.1.33}$$

Radi preglednosti, za donošenje zaključaka, bezdimenziona temperatura (3.1.31) je predstavljena grafički na slikama 3.7 , 3.8 , 3.9 i 3.10.

Na slici 3.5 dat je raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja. Sa povećanjem vrednosti ovog broja temperatura u kanalu opada. Temperatura u kanalu u okolini ploča se intenzivnije menja za manje vrednosti Hartmann-ovog broja tj. za manje intenzitete spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja. Specifični toplotni fluks u okolini ploče opada sa povećanjem vrednosti Hartmann-ovog broja što se zapaţa sa grafika i zaključuje na osnovu Fourier-ovog zakona. Temperatura u kanalu postiţe maksimalnu vrednost u gornjoj polovini kanala za sve vrednosti Hartmann-ovog broja, a za $\beta \approx 0$.

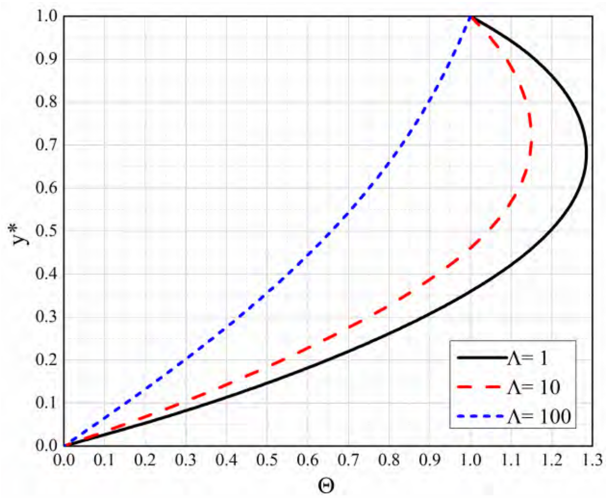


Sllika 3.5 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja

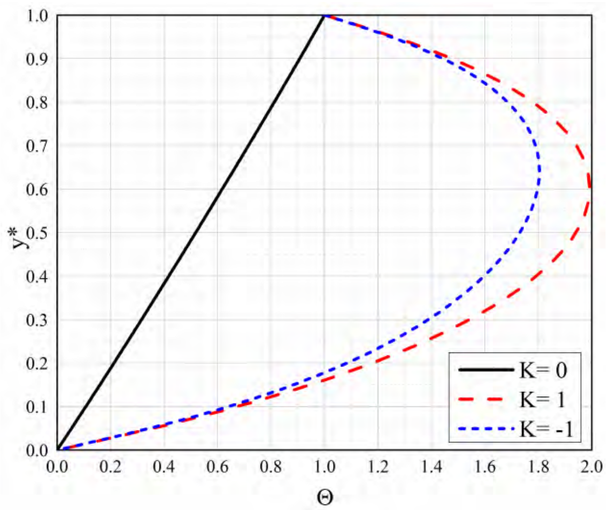


Slika 3.6 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora β

Na slici 3.6 dat je raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora β. Sa porastom vrednosti β, a za slučaj da su na donjoj ploči izvori, a na gornjoj ponori temperatura fluida u kanalu opada. Temperatura u kanalu postiţe maksimalnu vrednost, za sve vrednosti $\beta > 0$, u gornjoj polovini kanala, a što je vrednost β veća to je poloţaj maksimalne temperature bliţi gornjoj ploči. Specifični toplotni fluks u okolini ploča se smanjuje sa porastom vrednosti faktora β. Ovi uticaji su slični uticaju Hartmann-ovog broja.



Slika 3.7 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora poroznosti



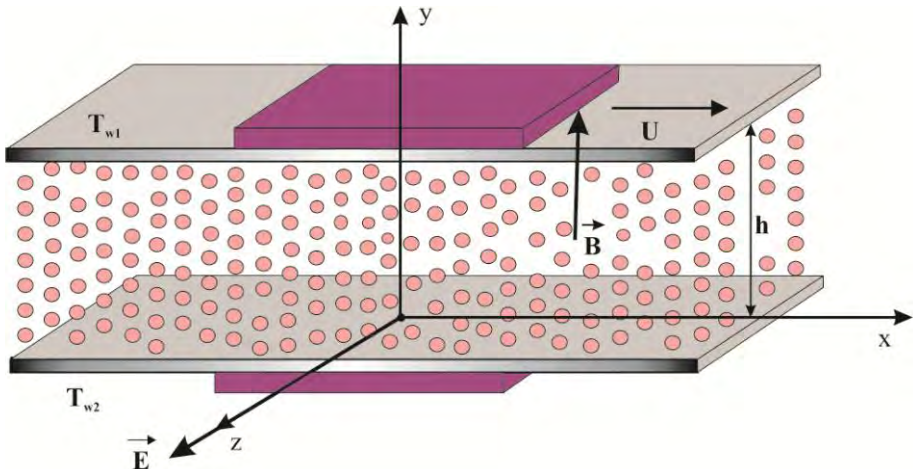
Slika 3.8 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora električnog opterećenja

Na slici 3.7 predstavljen je bezdimenzioni raspored temperature za različite vrednosti faktora poroznosti. Zaključuje se da većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju niţe temperature u kanalu. Maksimalne temperature, za sve vrednosti ovog parametra, su u gornjoj polovini kanala. Specifični toplotni fluks na pločama opada sa porastom ovog parametra.

Na slici 3.8 predstavljen je bezdimenzioni raspored temperature za različite vrednosti faktora električnog opterećenja. Za slučaj reţima kratkog spoja $(K = 0)$ temperatura u kanalu je linearna funkcija rastojanja od zidova kanala (slučaj kada je kondukcija dominantna u prenosu toplote). Za slučaj praznog hoda $(K = -1)$ temperatura je u kanalu viša od temperature u slučaju kratkog spoja, dok je temperatura najveća za slučaj $(K = 1)$. Temperatura postiţe maksimalnu vrednost u gornjoj polovini kanala.

3.2 MHD strujanje fluida i prenos toplote u poroznoj sredini između dve horizontalne ploče od kojih je gornja pokretna

U ovom delu rada izučava se MHD laminarno strujanje nestišljivog fluida i prenos toplote u poroznoj sredini izmeĎudve horizontalne ploče. Donja ploča je nepokretna i na njoj se odrţava konstantna temperatura T_{w2}. Gornja ploča se kreće translatorno u horizontalnoj ravni konstantnom brzinom čiji je intenzitet U. Temperatura gornje ploče je konstantna i iznosi T_{w1}.



Slika 3b Fizički model strujanja

Spoljašnje primenjeno magnetno polje je homogeno, upravno na ploče, smera od donje prema gornjoj ploči, a njegova indukcija je intenziteta $\vec{B}$. Spoljašnje primenjeno električno polje je takoĎe homogeno, pravca i smera z ose i intenziteta E.

Opisani problem se rešava za male vrednosti Reylnolds-ovog magnetnog broja tj. zanemaruje se indukovano magnetno polje. Smatra se da je strujanje ustaljeno.

3.2.1 Matematički model

Sprovodeći proceduru kao u poglavlju 3.1.1 dobija se da matematički model ovog problema predstavljaju ranije izvedene jednačine (3.1.11), (3.1.12) i (3.1.13) dok su sad granični uslovi:

$$u(0)=0,\quad u(h)=U,$$
$$T(0)=T_{w2},\quad T(h)=T_{w1}. \tag{3.2.1}$$

koji odgovaraju slučaju pokretne gornje ploče.

Za transformisanje jednačina (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13) i graničnih uslova (3.2.1) na bezdimenzione oblike uvode se bezdimenzione veličine date izrazima (3.1.16). U ovom delu rada u izrazima (3.1.16) veličina U će predstavljati intenzitet brzine gornje ploče za razliku od prethodnog problema gde je ona bila definisana izrazom (3.1.17).

Unoseći bezdimenzione veličine (3.1.16) u jednačinu (3.1.11) ista se transformiše u jednačinu (3.1.18) u kojoj su sada:

$$Q_1 = KHa^2 - G,$$
$$G = P\frac{h^2}{\mu U}. \tag{3.2.2}$$

Zapaţa se, da se kod ovog problema veličina Q_1 razlikuje od odgovarajuće veličine Q_1 kod prethodnog problema. U prethodnom problemu je veličina G jednaka jedinici dok je ovde data izrazom (3.2.2). Ostale veličine u jednačini (3.1.18) imaju iste zapise kao i kod prethodnog problema.

Jednačina (3.1.12) transformiše se na jednačinu (3.1.19), a jednačina (3.1.13) na jednačinu (3.1.20). Kod poslednje dve jednačine nema nikakvih promena u odnosu na prethodni problem. Naravno, stalno treba imati na umu da se brzina U razlikuje u jednom i u drugom slučaju.

Granični uslovi (3.2.1) u bezdimenzionom obliku dati su sledećim zapisima:

$$u^*(0)=0,\quad u^*(1)=1,$$
$$\Theta(0)=0,\quad \Theta(1)=1. \tag{3.2.3}$$

Dakle, matematički model opisanog problema u bezdimenzionom obliku predstavljaju jednačine (3.1.18), (3.1.19) i (3.1.20) i granični uslovi (3.2.3).

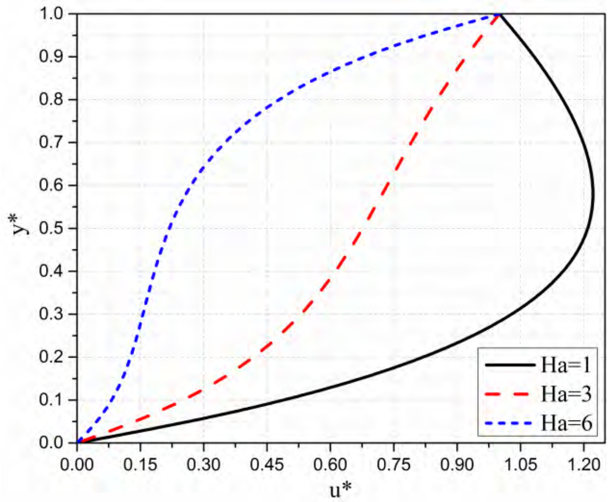
Za dalje teorijsko izučavanje opisanog problema neophodno je rešiti ove jednačine sa odgovarajućim graničnim uslovima.

3.3.2 Raspored brzine strujanja fluida

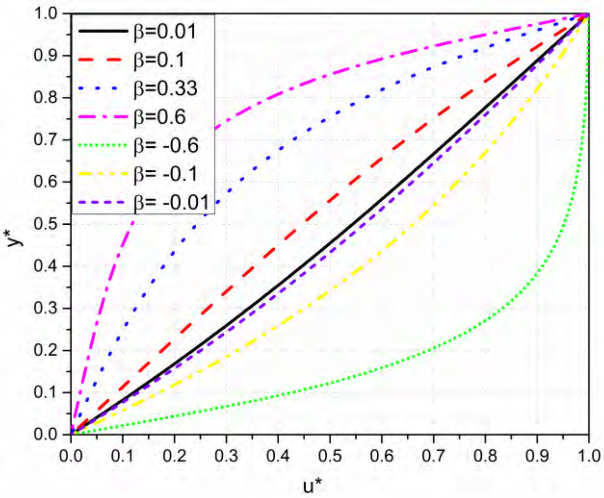
Za odreĎivanje brzine strujanja fluida treba rešiti jednačinu (3.1.18) sa graničnim uslovima (3.2.3). Rešenje ove jednačine ima oblik (3.1.27) gde su konstante integracije C_1 i C_2 date izrazima:

$$C_1 = \frac{1}{R_2}\frac{Q_1\left[\exp(r_2)-1\right]-R_2}{\exp(r_2)-\exp(r_1)},$$
$$C_2 = \frac{1}{R_2}\frac{R_2+Q_1\left[1-\exp(r_1)\right]}{\exp(r_2)-\exp(r_1)}. \tag{3.2.4}$$

Radi jednostavnije analize i donošenja zaključaka raspored brzine strujanja fluida je predstavljen grafički na slikama 3.9 , 3.10 , 3.11 i 3.12.



Slika 3.9 Raspored bezdimenzione brzine za različite vrednosti Ha

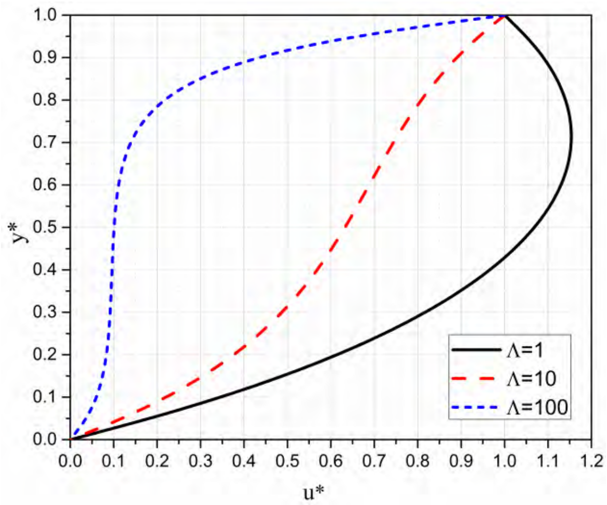


Slika 3.10 Raspored bezdimenzione brzine za različite vrednosti β

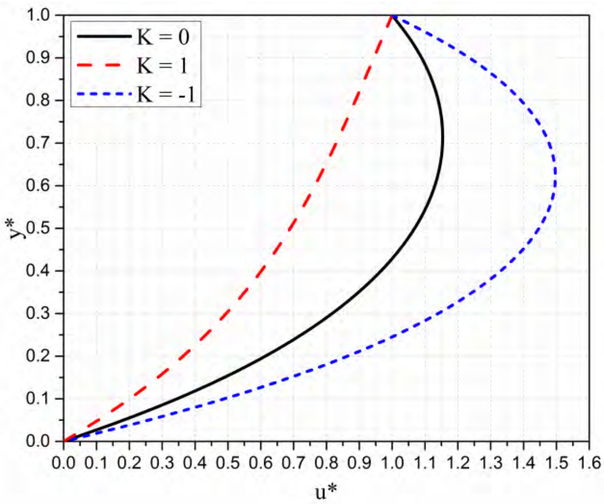
Na slici 3.9 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione brzine za različite vrednosti Hartmann-ovog broja. Sa te slike se zapaţa da za veće vrednosti Hartmann-ovog broja tj. za intenzivnije spoljašnje magnetno polje, raspored brzine u donjem delu kanala postaje ravniji. Ovakva tendencija je zapaţena i u slučaju kada su ploče bile nepokretne, ali se ona tada odnosila na celu visinu kanala. Krive rasporeda bezdimenzione brzine, uz donju ploču (zid) imaju manji nagib u odnosu na y osu, sa porastom spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja . Sa pribliţavanjem gornjoj pokretnoj ploči situacija je obrnuta. Ovo dovodi do zaključka da intenzivnije spoljašnje magnetno polje smanjuje tangencijalni napon na donjoj ploči, a povećava ga na gornjoj.

Na slici 3.10 predstavljeni su grafici bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti veličine β. Zapaţa se da se za slučaj, izvora na donjoj a ponora na gornjoj ploči, sa porastom brzine u poprečnom pravcu smanjuje srednja uzduţna brzina, a samim tim i protok fluida u kanalu. U tom slučaju se napon trenja na donjoj ploči smanjuje, a na gornjoj pokretnoj povećava.

Ako se pak izvori nalaze na gornjoj pokretnoj ploči, a ponori na donjoj što odgovara vrednostima $\beta < 0$, onda se zaključuje da sa porastom poprečne brzine raste srednja uzduţna brzina strujanja fluida u kanalu a samim tim i protok fluida u kanalu. U ovom slučaju tangencijalni napon na donjoj ploči raste, a na gornjoj opada.



Slika 3.11 Raspored bezdimenzione brzine za različite vrednosti Λ



Slika 3.12 Raspored bezdimenzione brzine za različite vrednosti K

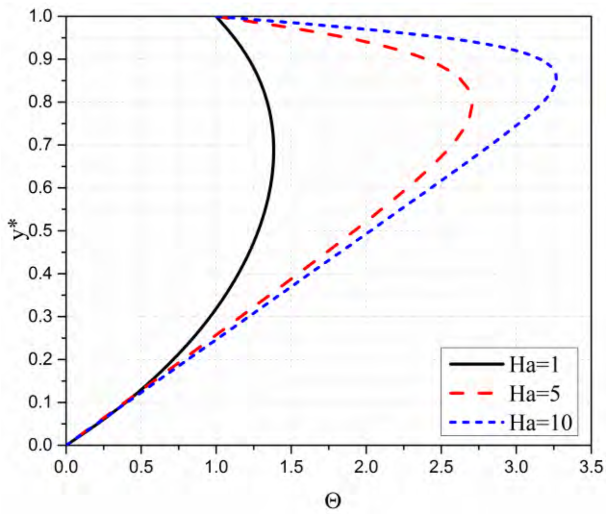
Na slici 3.11 predstavljeni su grafici rasporeda bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti faktora poroznosti Λ. Na osnovu ovih dijagrama zaključuje se da povećanje faktora poroznosti tj. smanjenje propustljivosti sredine dovodi do poravnavanja profila brzine u kanalu. Velike vrednosti faktora poroznosti bi mogle da dovedu do zaustavljanja kretanja fluida blizu donje ploče kanala. Ovakav se rezultat mogao očekivati s obzirom da čvrsta faza sredine predstavlja prepreku kretanju fluida. Ugao nagiba grafika brzine u odnosu na y osu u okolini donje ploče opada sa porastom faktora poroznosti. Ovo dovodi do zaključka da sa porastom faktora poroznosti opada tangencijalni napon na donjem zidu kanala. Na gornjem zidu pak povećanje faktora poroznosti dovodi do povećanja tangentnog napona tj. napona trenja. Sa iste slike moţe se zaključiti da povećanje faktora poroznosti dovodi do smanjenja srednje brzine strujanja fluida u kanalu, a samim tim i do smanjenja protoka fluida u kanalu.

Na slici 3.12 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine strujanja fluida za različite vrednosti faktora električnog opterećenja K. Zapaţa se da je uzduţna brzina strujanja fluida istog smera sa brzinom kretanja ploče za sve vrednosti faktora električnog opterećenja K. Uzduţna brzina strujanja fluida u kanalu je najvećeg intenziteta za $K = -1$, a najmanjeg za $K = 1$.

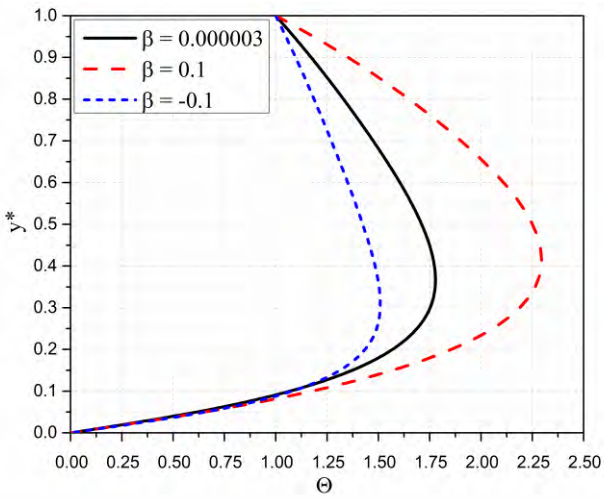
3.2.3 Raspored bezdimenzione temperature

I kod ovog modela jednačina koja definiše bezdimenzionu temperaturu je istog oblika kao i u prethodnom poglavlju tj. data je izrazom (3.1.31). Integracione konstante, takoĎe, imaju iste zapise kao u izrazima (3.1.33). Naravno ove konstante će imati različite vrednosti od vrednosti konstanti u prethodnom poglavlju jer se veličina Q_1 razlikuje kao i veličina G koja je kod prethodnog modela jednaka jedinici.

Deo rezultata predstavljen je u obliku grafika na slikama 3.13 , 3.14 , 3.15 i 3.16.



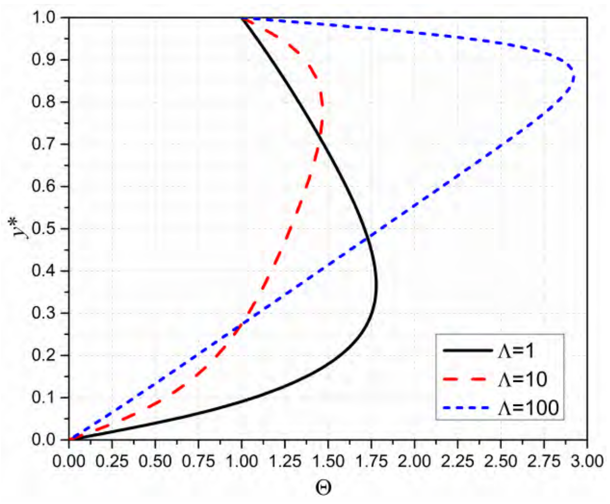
Slika 3.13 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti Ha



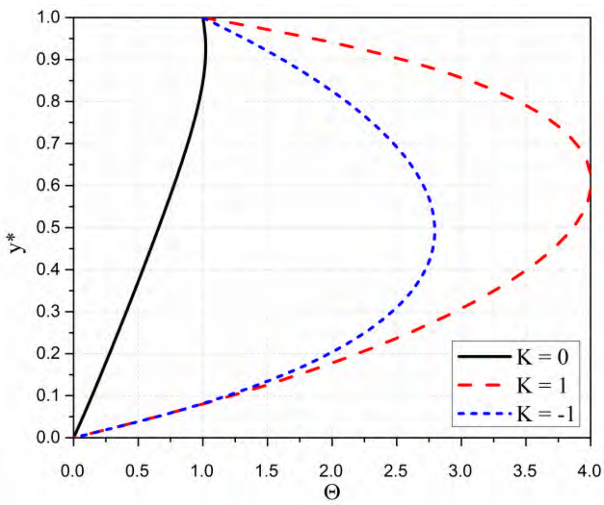
Slika 3.14 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti β

Na slici 3.13 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja. Zapaţa se da bezdimenziona temperatura u kanalu raste u blizini gornje pokretne ploče sa povećanjem vrednosti Hartmann-ovog broja tj. sa povećanjem jačine spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja. Sa povećanjem Hartmann-ovog broja poloţaj maksimalne bezdimenzione temperature se pomera ka gornjoj pokretnoj ploči, a onda naglo pada na vrednost jednaku jedan. Najmanja neravnomernost temperature u kanalu javlja se za male vrednosti Hartmann-ovog broja. Blizu donjeg zida kanala spoljašnje primenjeno magnetno polje ima vrlo mali uticaj na intenzitet razmene toplote. Blizu gornjeg, pokretnog zida, kanala spoljašnje primenjeno magnetno polje značajno utiče na intenzitet razmene toplote.

Na slici 3.14 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti veličine β. Za slučaj da se na donjoj ploči nalaze izvori, a na gornjoj ponori $(\beta > 0)$ onda sa rastom poprečne brzine raste i temperatura u kanalu i postiţe svoj maksimum u okolini donje trećine kanala. Rast temperature je brţi a donjoj ploči. Za slučaj kada su na gornjoj ploči izvori, a na donjoj ponori, što odgovara vrednostima $(\beta < 0)$, intenzivnija je razmena toplote na donjoj ploči nego na gornjoj što odgovara i prethodnom slučaju $(\beta > 0)$.



Slika 3.15 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti Λ



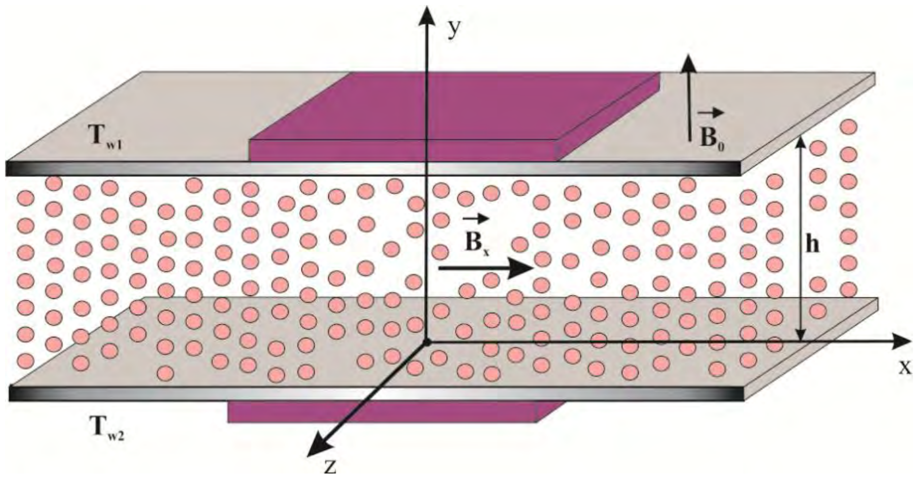
Slika 3.16 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti K

Na slici 3.15 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora poroznosti. Zapaţa se da je za veće vrednosti faktora poroznosti tj. smanjene propustljivosti sredine maksimalna temperatura bliţe gornjoj ploči. Intenzitet razmene toplote na gornjoj ploči je veći za veće vrednosti ovog faktora, a toplota se transportuje sa fluida na gornju ploču za sve vrednosti faktora poroznosti. Za manje vrednosti faktora poroznosti maksimalna temperatura je bliţe donjoj ploči.

Rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora električnog opterećenja dati su na slici 3.16. Zapaţa se da je za slučaj reţima kratkog spoja $K = 0$ temperatura u kanalu linearna funkcija rastojanja od donjeg zida sve do tri četvrtine visine kanala, a dalje se ta linearnost blago narušava. Za slučaj praznog hoda $K = -1$ temperatura u kanalu je viša u odnosu na slučaj kratkog spoja. Sa porastom apsolutne vrednosti veličine K raste i temperatura u kanalu kao i intenzitet razmene toplote posebno blizu zidova kanala.

3.3 Poiseuille-ovo MHD strujanje u poroznoj sredini sa uticajem indukovanog magetnog polja

U ovom delu razmatra se strujanje viskoznog fluida u poroznoj sredini koja se nalazi izmeĎu dve horizontalne nepokretne ploče. Spoljašnje primenjeno magnetno polje $\vec{B}_0$ je homogeno i upravno na ploče. Ploče se odrţavaju na stalnim temperaturama, donja na temperaturi T_{w2} a gornja na temperaturi T_{w1}. Elektroprovodnost fluida σ je nepromenljiva. Rastojanje izmeĎu ploča je h. Fluid se kreće usled razlike pritisaka, a ovaj pad pritiska po jedinici duţine odrţava se konstantnim. Usled kretanja fluida indukuje se magnetno polje u pravcu kretanja sa indukcijom magnetnog polja $\vec{B}_x$.



Slika 3c Fizički model strujanja

3.3.1 Matematički model

U cilju formiranja matematičkog modela ovog strujanja i transporta toplote polazi se od jednačine kontinuiteta (2.4.4), proširene Navier-Stokes-ove jednačine (2.5.14), jednačine magnetne indukcije (2.7.3) i energijske jednačine (2.6.24).

Imajući u vidu da je strujanje ravansko i razvijeno iz jednačine kontinuiteta se dobija da je projekcija brzine strujanja fluida na osu y konstantna i različita od nule jer će se ovde razmatrati slučajevi kada na donjoj ploči postoje izvori (ponori), a na gornjoj ponori (izvori) fluida. Onda je brzina strujanja fluida data izrazom:

$$\vec{W} = u(y)\vec{i} + v\vec{j}. \tag{3.3.1}$$

Koristeći Maxwell-ove jednačine (2.71) dobija se da je magnetna indukcija data izrazom:

$$\vec{B} = B_x(y)\vec{i} + B_0\vec{j}, \tag{3.3.2}$$

a gustina električne struje definisana je izrazom:

$$\vec{j}^* = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B}. \tag{3.3.3}$$

Unošenjem izraza (3.3.1),(3.3.2) i (3.3.3) u Navier-Stokes-ovu jednačinu i njenim projektovanjem na ose x i y dobijaju se jednačine:

$$\rho v \frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{\mu}{K^*} u + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{dB_x}{dy}, \tag{3.3.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{K^*} v + \frac{B_x}{\mu_0}\frac{dB_x}{dy} = 0, \tag{3.3.5}$$

respektivno. Zamenom izraza (3.3.1) i (3.3.2) u jednačini magnetne indukcije (2.7.3) dobija se sledeća jednačina:

$$\frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{d^2 B_x}{dy^2} - v\frac{dB_x}{dy} + B_0\frac{du}{dy} = 0. \tag{3.3.6}$$

Jednačina energije (2.6.24) posle unošenja izraza (3.3.1) i (3.3.3), imajući u vidu da je problem stacionaran, zanemarujući kvadrat poprečne brzine i veličinu $\vec{v}\nabla T$ (zanemaren je konvektivni prenos toplote), transformiše se na jednačinu:

$$k\frac{d^2 T}{dy^2} + \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{\mu}{K^*}u^2 + \frac{1}{\sigma\mu_0^2}\left(\frac{dB_x}{dy}\right)^2 = 0. \tag{3.3.7}$$

Ovim jednačinama, za opisani problem strujanja i transporta toplote, odgovaraju sledeći granični uslovi:

$$\begin{gathered} u(0) = 0, \quad u(h) = 0, \\ B_x(0) = 0, \quad B_x(h) = 0, \\ T(0) = T_{w2}, \quad T(h) = T_{w1}. \end{gathered} \tag{3.3.8}$$

Dobijene jednačine (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) i granični uslovi (3.3.8) predstavljaju matematički model ovde opisanog MHD strujanja i prenosa toplote u poroznoj sredini izmeĐu dvehorizontalne ploče. Zapaţa se da su jednačine meĐusobno spregnute.

Za dalje izučavanje opisanog problema izvršiće se transformcija matematičkog modela na bezdimenzioni oblik. Uvode se bezdimenzione veličine:

$$y^* = \frac{y}{h},\ u^* = \frac{u}{U},\ \Theta = \frac{T - T_{w1}}{T_{w1} - T_{w2}},\ b = \frac{B_x}{B_0}, \tag{3.3.9}$$

gde je:

$$U = \frac{h^2 P}{\mu}, \tag{3.3.10}$$

i

$$P = -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \tag{3.3.11}$$

pad pritiska po jedinici duţine kanala koji se moţe definisati spoljašnjim silama tj. moţe biti zadata veličina. Naravno, razmeru U moguće je izabrati i na neki drugi način.

Koristeći bezdimenzione veličine (3.3.9), kao nove promenljive, jednačina (3.3.4) se transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - \beta \operatorname{Re}\frac{du^*}{dy^*} - \Lambda u^* + \frac{Ha^2}{Rm}\frac{db}{dy^*} + 1 = 0, \tag{3.3.12}$$

jednačina (3.3.6) na jednačinu:

$$\frac{du^*}{dy^*} - \beta\frac{db}{dy^*} + \frac{1}{Rm}\frac{d^2b}{dy^{*2}} = 0, \tag{3.3.13}$$

jednačina (3.3.7) na jednačinu:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} + \Pr Ec\left[\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + \Lambda u^{*2} + \frac{Ha^2}{Rm^2}\left(\frac{db}{dy^*}\right)^2\right] = 0, \tag{3.3.14}$$

i jednačina (3.3.5) na jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{\mu_0 p}{B_0^2}\right) + b\frac{db}{dy^*} + \beta\Lambda\frac{Rm}{Ha^2} = 0, \tag{3.3.15}$$

gde je Reynodls-ov magnetni broj Rm dat izrazom:

$$Rm = \sigma\mu_0 hU, \tag{3.3.16}$$

a veličine β, Re, Ha, Pr, Ec i Λ izrazima (3.1.21).

Iz graničnih uslova (3.3.8) dobijaju se odgovarjući granični uslovi u bezdimenzionom obliku i to:

$$u^*(0) = 0,\ \ u^*(1) = 0,$$

$$b(0)=0,\quad b(1)=0,$$
$$\Theta(0)=0,\quad \Theta(1)=1. \tag{3.3.17}$$

Jednačine (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14), (3.3.15) i granični uslovi (3.3.17) predstavljaju matematički model u bezdimenzionom obliku opisanog MHD strujanja fluida i transporta toplote u poroznoj sredini izmeĎu nepokretnih horizontalnih izolovanih ploča koje se odrţavaju na stalnim temperaturama.

Za dalje izučavanje opisanog problema neophodno je rešiti ovaj sistem jednačina sa odgovarajućim graničnim uslovima.

3.3.2 Rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine i bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja

Prvo se iz jednačine (3.3.12) odreĎuje izvod veličine b i on je dat izrazom:

$$\frac{db}{dy^*}=\frac{Rm}{Ha^2}\left(\beta Re\frac{du^*}{dy^*}+\Lambda u^*-\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}-1\right), \tag{3.3.18}$$

zatim se poslednji izraz diferencira po y^* i dobija izraz:

$$\frac{d^2b}{dy^{*2}}=\frac{Rm}{Ha^2}\left(\beta Re\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}+\Lambda\frac{du^*}{dy^*}-\frac{d^3u^*}{dy^{*3}}\right). \tag{3.3.19}$$

Zamenom izraza (3.3.18) i (3.3.19) u jednačini (3.3.13) dobija se jednačina:

$$\frac{d^3u^*}{dy^{*3}}-a_1\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}+a_2\frac{du^*}{dy^*}+a_3u^*=\beta Rm, \tag{3.3.20}$$

gde su radi kraćeg zapisa uvedene oznake:

$$a_1=\beta(Re+Rm),\ a_2=\beta^2 Re\,Rm-\Lambda-Ha^2,\ a_3=\beta\Lambda Rm. \tag{3.3.21}$$

Dakle, dobijena je nehomogena diferencijalna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima.

Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine je:

$$r^3-a_1r^2+a_2r+a_3=0, \tag{3.3.22}$$

koja se smenom:

$$r=\eta+\frac{1}{3}a_1 \tag{3.3.23}$$

transformiše na jednačinu:

$$\eta^3+m\eta+n=0, \tag{3.3.24}$$

gde su uvedene oznake:

$$m = a_2 - \frac{1}{3} a_1 \ , \ n = a_3 + \frac{1}{3} a_1 a_2 - \frac{2}{27} a_1^3 \ . \tag{3.3.25}$$

Zapaţa se da su veličine m i n uvek realne. Onda se za rešavanje jednačina (3.3.24) razlikuju tri slučaja [196,197] i to:

I slučaj

Kada je veličina:

$$D = \frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27} > 0, \tag{3.3.26}$$

jednačina (3.3.24) ima realno rešenje

$$\eta_1 = I_1 + I_2, \tag{3.3.27}$$

i kompleksna rešenja:

$$\eta_2 = \alpha I_1 + \alpha^2 I_2, \quad \eta_3 = \alpha^2 I_1 + \alpha I_2, \tag{3.3.28}$$

gde su uvedene oznake:

$$I_1 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{D}}, \ I_2 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{D}}, \quad I_1, I_2 \in R,$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3.3.29}$$

Zamenom rešenja η_1, η_2 i η_3 u (3.3.23) dobijaju se rešenja jednačine (3.3.22) i to realno rešenje

$$r_1 = \frac{1}{3} a_1 + I_1 + I_2, \tag{3.3.30}$$

i kompleksna rešenja:

$$r_2 = c_1 + ic_2 \ , \ r_3 = c_1 - ic_2, \tag{3.3.31}$$

gde su, radi kraćih zapisa, uvedene oznake:

$$c_1 = \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right), \ c_2 = \left(I_1 - I_2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3.3.32}$$

Kako je partikularno rešenje jednačine (3.3.20) dato izrazom:

$$u_p = \frac{1}{\Lambda}, \tag{3.3.33}$$

to je njeno opšte rešenje:

$$u^*\left(y^*\right) = A_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + \left[A_2 \cos\left(c_2 y^*\right) + A_3 \sin\left(c_2 y^*\right)\right] \exp\left(c_1 y^*\right) + \frac{1}{\Lambda}, \tag{3.3.34}$$

u kome su A_1, A_2 i A_3 integracione konstante.

II slučaj

Kada je veličina $D = 0$, jednačina (3.3.24) ima sva tri realna rešenja od kojih je jedno dvostruko i to:

$$\eta_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{n}{2}},\ \ \eta_2 = \eta_3 = \sqrt[3]{\frac{n}{2}}. \tag{3.3.35}$$

Onda su rešenja jednačine (3.3.22) data izrazima:

$$r_1 = \frac{1}{3}a_1 + 2\sqrt[3]{-\frac{n}{2}} = m_1,$$

$$r_2 = r_3 = \frac{1}{3}a_1 + \sqrt[3]{\frac{n}{2}} = m_2, \tag{3.3.36}$$

gde su uvedene oznake m_1 i m_2 da bi bila uočljivija razlika u odnosu na rešenja u I slučaju.

U ovom slučaju je opšte rešenje jednačine (3.3.20) dato izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = B_1 \exp\left(m_1 y^*\right) + B_2 \exp\left(m_2 y^*\right) + B_3 y^* \exp\left(m_2 y^*\right) + \frac{1}{\Lambda}, \tag{3.3.37}$$

gde su B_1, B_2 i B_3 integracione konstante.

III slučaj

Kada je veličina $D < 0$ onda jednačina (3.3.22) ima tri realna različita rešenja i to:

$$r_1 = \frac{1}{3}a_1 + 2\sqrt[3]{-\frac{m}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} = n_1,$$

$$r_2 = \frac{1}{3}a_1 + 2\sqrt[3]{-\frac{m}{3}}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} = n_2, \tag{3.3.38}$$

$$r_3 = \frac{1}{3}a_1 + 2\sqrt[3]{-\frac{m}{3}}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} = n_3,$$

gde je:

$$\cos\varphi = -\frac{n}{2}\left(-\frac{m}{3}\right)^{-\frac{3}{2}},\ \ 0 < \varphi < \pi, \tag{3.3.39}$$

a oznake n_1, n_2 i n_3 su i ovde uvedene da bi se istakla razlika u odnosu na slučajeve I i II.

U ovom slučaju opšte rešenje jednačine (3.3.20) dato je jednačinom:

$$u^*\left(y^*\right)=C_1\exp\left(n_1y^*\right)+C_2\exp\left(n_2y^*\right)+C_3\exp\left(n_3y^*\right)+\frac{1}{\Lambda}, \tag{3.3.40}$$

u kome su C_1, C_2 i C_3 integracione konstante.

Da bi se odredile vrednosti integracionih konstanti u sva tri slučaja neophodno je prethodno odrediti rasporede bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja.

U tom cilju koristi se jednačina (3.3.18). Zamenom izraza (3.3.14) i njegovog prvog i drugog izvoda u jednačinu (3.3.18) i integracijom dobijene jednačine dobija se da je, u I slučaju, raspored bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja dat izrazom:

$$\begin{aligned} b(y^*)=\frac{Rm}{Ha^2}\{&A_1L_1\exp(r_1y^*)+\\ &+(L_2A_2-L_3A_3)\cos(c_2y^*)\exp(c_1y^*)+\\ &+(L_2A_3+L_3A_2)\sin(c_2y^*)\exp(c_1y^*)+\beta\,\mathrm{Re}\frac{1}{\Lambda}+A_4\}, \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

u kome je A_4 integraciona konstanta, a radi kraćeg zapisa uvedene u oznake:

$$L_1=\beta\,\mathrm{Re}+\frac{\Lambda}{r_1}-r_1,\ L_2=\beta\,\mathrm{Re}+\frac{\Lambda}{c_1^2+c_2^2}c_1-c_1,\ L_3=\frac{\Lambda}{c_1^2+c_2^2}c_2+c_2. \tag{3.3.42}$$

Sada je, za I slučaj, moguće odrediti integracione konstante A_1, A_2, A_3 i A_4. U tom cilju koriste se granični uslovi za bezdimenzionu uzdužnu brzinu i bezdimenzionu indukciju indukovanog magnetnog polja (3.3.17) i dobijaju se sledeće konstante:

$$\begin{aligned} A_1&=-A_2-\frac{1}{\Lambda},\\ A_2&=-\frac{L_5L_{17}+L_{10}L_{16}}{L_9L_{16}+L_5L_{15}},\\ A_3&=\frac{L_{15}A_2+L_{17}}{L_{16}},\\ A_4&=-L_{13}A_2-L_8A_3-L_{14}, \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

gde su, radi kraćih zapisa, uvedene oznake:

$$L_4=\cos\left(c_2\right)\exp\left(c_1\right),\ \ L_5=\sin\left(c_2\right)\exp\left(c_1\right),$$

$$L_6=L_1\exp\left(r_1\right),\ \ L_7=\left(L_2\cos\left(c_2\right)+L_3\sin\left(c_2\right)\right)\exp\left(c_1\right),$$

$$L_8=\left(L_2\sin\left(c_2\right)-L_3\cos\left(c_2\right)\right)\exp\left(c_1\right),\ L_9=L_4-\exp\left(r_1\right),$$

$$L_{10}=\frac{1}{\Lambda}\left(1-\exp\left(r_1\right)\right),\ L_{11}=L_2-L_1,$$

$$L_{12}=\frac{1}{\Lambda}\left(\beta\,\mathrm{Re}-L_1\right),\ \ L_{13}=L_7-L_6,$$

$$L_{14} = \frac{1}{\Lambda}\left(\beta\,\mathrm{Re} - L_6\right),\; L_{15} = L_{11} - L_{13},$$

$$L_{16} = L_3 + L_8,\;\; L_{17} = L_{12} - L_{14}. \qquad (3.3.44)$$

Ovim su, u slučaju I, bezdimenzioni raspored uzduţne brzine i bezdimenzioni raspored indukcije indukovanog magnetnog polja postali poznati i dati su izrazima (3.3.34) i (3.3.41).

Za dalja istraţivanja, za bezdimenzionu indukciju indukovanog magnetnog polja umesto izraza (3.3.41) koristiće se isti izraz napisan u jednostavnijem obliku:

$$b(y^*) = \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}\{L_{18}\exp(r_1 y^*) + [L_{19}\cos(c_2 y^*) + L_{20}\sin(c_2 y^*)]\exp(c_1 y^*) + L_{21}\}, \qquad (3.3.45)$$

u kome su uvedene oznake date izrazima:

$$L_{18} = A_1 L_1,\;\; L_{19} = L_2 A_2 - L_3 A_3,$$

$$L_{20} = L_2 A_3 + L_3 A_2,\;\; L_{21} = \frac{\beta\,\mathrm{Re}}{\Lambda} + A_4. \qquad (3.3.46)$$

Za slučaj II, polazeći od jednačine (3.3.18) a zatim zamenjujući (3.3.37) i njegov prvi i drugi izvod u njoj dobija se da je bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja data izrazom:

$$\begin{aligned} b\left(y^*\right) = \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}[&L_{22}B_1\exp\left(m_1 y^*\right) + \\ &+\left(L_{23}B_2 - L_{24}B_3\right)\exp\left(m_2 y^*\right) + \\ &+L_{23}B_3 y^*\exp\left(m_2 y^*\right) + \frac{\beta\,\mathrm{Re}}{\Lambda} + B_4], \end{aligned} \qquad (3.3.47)$$

u kome su uvedene oznake:

$$L_{22} = \beta\,\mathrm{Re} + \frac{\Lambda}{m_1} - m_1,\; L_{23} = \beta\,\mathrm{Re} + \frac{\Lambda}{m_2} - m_2,\;\; L_{24} = \frac{\Lambda}{m_2^2} + 1, \qquad (3.3.48)$$

a B_4 je integraciona konstanta.

Za odreĎivanje integracionih konstanti B_1, B_2, B_3 i B_4 koriste se granični uslovi za bezdimenzionu uzduţnu brzinu i bezdimenzionu indukciju indukovanog magnetnog polja (3.3.17) i one su date izrazima:

$$B_1 = \frac{1}{\Lambda}\frac{L_{32} - 1}{L_{31} - L_{32}},\quad B_2 = -B_1 - \frac{1}{\Lambda},$$

$$B_3 = \frac{1}{L_{30}}\left(L_{28}B_1 + L_{29}B_2\right),$$

$$B_4 = L_{24}B_3 - L_{22}B_1 - L_{23}B_2 - \frac{\beta \,\mathrm{Re}}{\Lambda}, \tag{3.3.49}$$

u kojima su uvedene oznake:

$$\begin{gathered}
L_{25} = L_{22}\exp\left(m_1\right), \quad L_{26} = L_{23}\exp\left(m_2\right), \\
L_{27} = \left(L_{23} - L_{24}\right)\exp\left(m_2\right), \quad L_{28} = L_{22} - L_{25}, \\
L_{29} = L_{23} - L_{26}, \; L_{30} = L_{24} + L_{27}, \\
L_{31} = \exp\left(m_1\right) + \frac{L_{28}}{L_{30}}\exp\left(m_2\right), \\
L_{32} = \exp\left(m_2\right) + \frac{L_{29}}{L_{30}}\exp\left(m_2\right).
\end{gathered} \tag{3.3.50}$$

OdreĎivanjem konstanti B_1, B_2, B_3 i B_4 postali su poznati raspored bezdimenzione uzduţne brzine i raspored bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja u slučaju II.

Za odreĎivanje bezimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja u slučaju III treba izraz (3.3.40) zameniti u jednačini (3.3.18) i iz nje se dobija traţeni raspored dat izrazom:

$$\begin{gathered}
b\left(y^*\right) = \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}[L_{33}C_1\exp\left(n_1 y^*\right) + L_{34}C_2\exp\left(n_2 y^*\right) + \\
+ L_{35}C_3\exp\left(n_3 y^*\right) + \frac{\beta \,\mathrm{Re}}{\Lambda} + C_4],
\end{gathered} \tag{3.3.51}$$

u kome je C_4 integraciona konstanta i gde su uvedene oznake:

$$\begin{gathered}
L_{33} = \beta \,\mathrm{Re} + \frac{\Lambda}{n_1} - n_1, \; L_{34} = \beta \,\mathrm{Re} + \frac{\Lambda}{n_2} - n_2, \\
L_{35} = \beta \,\mathrm{Re} + \frac{\Lambda}{n_3} - n_3.
\end{gathered} \tag{3.3.52}$$

Za odreĎivanje integracionih konstanti C_1, C_2, C_3 i C_4 koriste se, kao i u prethodnim slučajevima, granični uslovi (3.3.17) i dobijaju se konstante date izrazima:

$$\begin{gathered}
C_1 = \frac{1}{\Lambda}\frac{L_{43} - L_{45}}{L_{42}L_{45} - L_{43}L_{44}}, \; C_2 = -\frac{1}{L_{45}}\left(\frac{1}{\Lambda} + L_{44}C_1\right), \\
C_3 = -\frac{1}{L_{41}}\left(L_{39}C_1 + L_{40}C_2\right), \\
C_4 = -L_{33}C_1 - L_{34}C_2 - L_{35}C_3 - \frac{\beta \,\mathrm{Re}}{\Lambda},
\end{gathered}$$

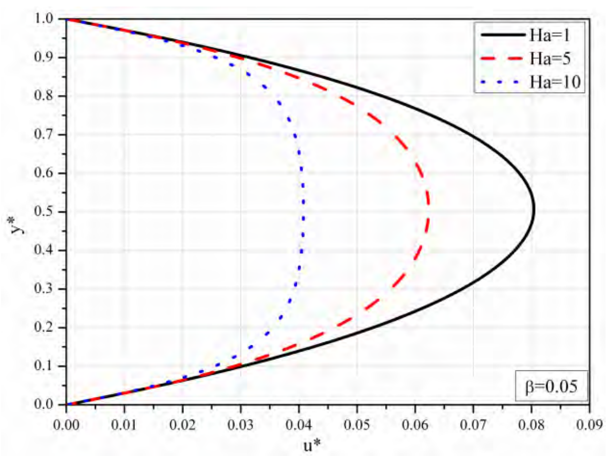
u kojima su uvedene oznake:

$$L_{36} = L_{33}\exp\left(n_1\right), \; L_{37} = L_{34}\exp\left(n_2\right),$$

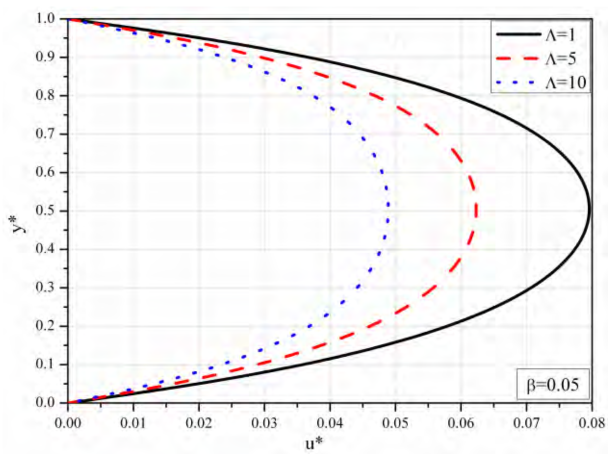
$$L_{38}=L_{35}\exp(n_3),\ \ L_{39}=L_{33}-L_{36},$$
$$L_{40}=L_{34}-L_{37},\ \ L_{41}=L_{35}-L_{38},$$
$$L_{42}=\exp(n_1)-\frac{L_{39}}{L_{41}}\exp(n_3),$$
$$L_{43}=\exp(n_2)-\frac{L_{40}}{L_{41}}\exp(n_3),$$
$$L_{44}=1-\frac{L_{39}}{L_{41}},\ \ L_{45}=1-\frac{L_{40}}{L_{41}}. \tag{3.3.54}$$

OdreĎivanjem ovih konstanti postali su, i u III slučaju, poznati raspored bezdimenzione uzduţne brzine i raspored bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja.

Radi jednostavnije i preglednije analize deo dobijenih rezultata predstavljen je u obliku dijagrama na slikama koje slede.



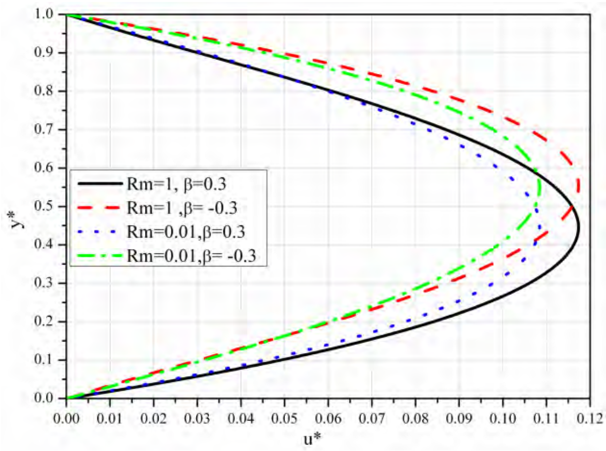
Slika 3.17 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha



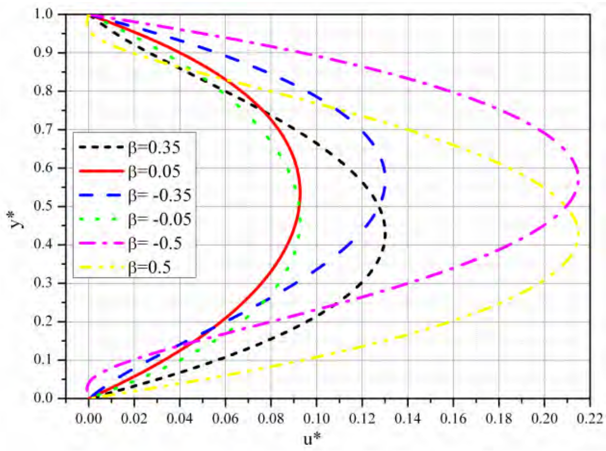
Slika 3.18 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ

Na slici 3.17 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine u kanalu za različite vrednosti Hartmann-ovog broja, za pozitivnu vrednost veličine β. Zapaţa se da rast Hartmann-ovog broja tj. intenziteta spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja dovodi do smanjenja uzduţne brzine u kanalu i do "poravnanja" profila brzine. Sa smanjenjem intenziteta ove brzine smanjuju se srednja brzina i protok tečnosti u kanalu. Tangencijalni naponi i na gornjem i na donjem zidu kanala opadaju sa porastom Hartmann-ovog broja. Ovi zaključci vaţe i za slučaj kada su izvori na donjem zidu, a ponori na gornjem $(\beta>0)$, a i za slučaj kada su izvori na gornjem, a ponori na donjem zidu kanala $(\beta<0)$.

Na slici 3.18 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione brzine u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti, a za pozitivnu vrednost veličine β tj. za slučaj izvora na donjem zidu kanala, a ponora na gornjem zidu kanala. Sa ove slike se zapaţa da sa porastom faktora poroznosti, odnosno pri smanjenju propustljivosti sredine, intenzitet uzduţne brzine opada. Samim tim smanjuje se i intenzitet srednje uzduţne brzine i protok tečnosti u kanalu. Tangencijalni naponi na zidovima kanala opadaju sa porastom faktora poroznosti. Ovi zaključci se odnose i na slučaj kada su na gornjem zidu kanala izvori, a na donjem ponori tj. za $\beta < 0$.



Slika 3.19 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Rm i β

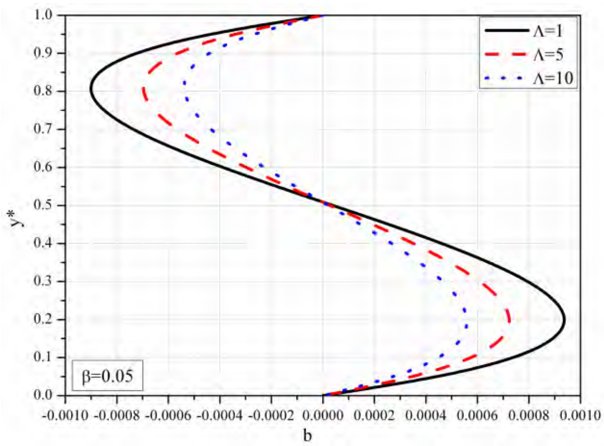


Slika 3.20 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β

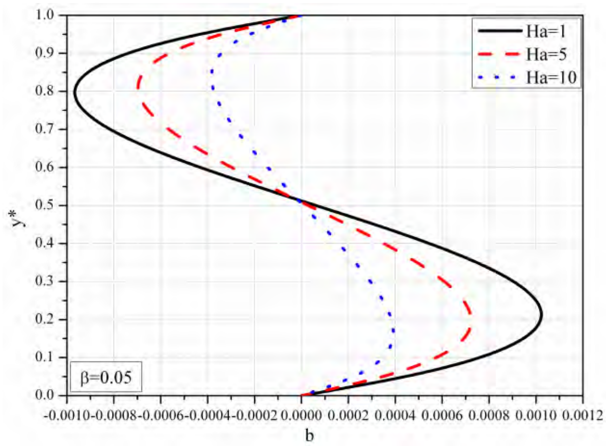
Na slici 3.19 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja i to za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori a na gornjem ponori i obrnuto kada su na gornjem zidu izvori a na donjem ponori. Sa ove slike se zapaţa da porast Reynolds-ovog magnetnog broja odnosno povećanje elektroprovodnosti tečnosti u kanalu dovodi do povećanja uzduţne brzine u kanalu i tangencijalnih napona na zidovima kanala. Ovi zaključci se odnose i na slučaj izvora na donjem zidu kanala a ponora na gornjem zidu i na slučaj kada su izvori na gornjem zidu a ponori na donjem. Veći intenziteti brzina koji se zapaţaju na ovoj slici, u odnosu na intenzitete brzina na prethodnim slikama su posledica velikih apsolutnih vrednosti veličine β. Porast Reynolds-ovog magnetnog broja uzrokuje slabljenje uticaja spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja te Lorentz-ova sila opada, a brzina raste.

Na slici 3.20 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine u kanalu za različite vrednosti veličine β. Sa ove slike se zapaţa da sa porastom apsolutne vrednosti veličine β raste intenzitet uzduţne brzine tečnosti u kanalu, a samim tim i srednja brzina i protok tečnosti u kanalu. Ovi zaključci odnose se na oba slučaja rasporeda izvora i ponora na zidovima kanala.

Na slici 3.21 prikazani su rasporedi bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti faktora poroznosti tj. za različite propustljivosti sredine, a za slučaj izvora na donjem zidu kanala i ponora na gornjem zidu. Sa ove slike se zapaţa da porast faktora poroznosti tj. smanjenje propustljivosti sredine dovodi do smanjenja intenziteta indukcije indukovanog magnetnog polja. Ovaj zaključak se odnosi i na slučaj kada su izvori na gornjem zidu a ponori na donjem zidu kanala. Za slučaj $\beta = 0.05$ indukcija indukovanog magnetnog polja je, od donjeg zida kanala pa do malo iznad sredine kanala, smera osnovne struje a odatle pa do gornjeg zida kanala ona je suprotnog smera. Za slučaj $\beta = -0.05$ indukcija indukovanog magnetnog polja je, od donjeg zida kanala pa do malo ispod sredine kanala, smera osnovne struje, a odatle pa do gornjeg zida kanala ona je suprotnog smera

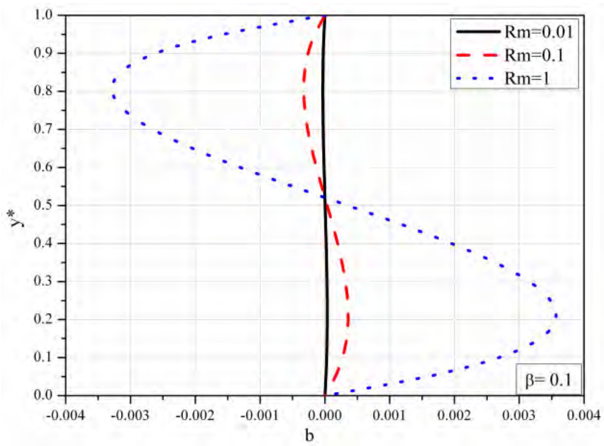


Slika 3.21 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Λ

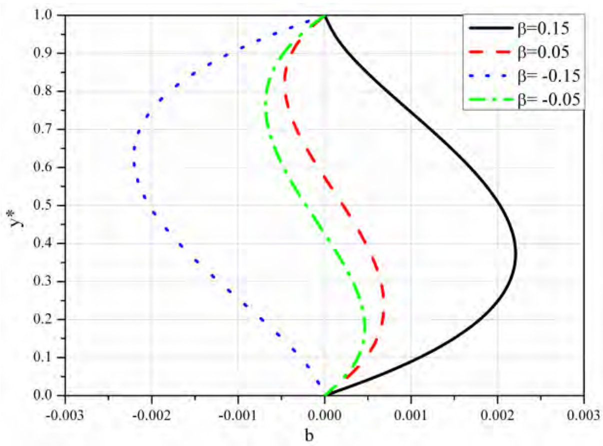


Slika 3.22 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Ha

Na slici 3.22 prikazani su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Hartmann-ovog broja, i to za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori a na gornjem zidu ponori. Sa ove slike se zapaţa da rast Hartmann-ovog broja tj. da rast magetne indukcije primenjenog spoljašnjeg magnetnog polja dovodi do smanjenja idukcije indukovanog magnetnog polja u kanalu. Ovaj zaključak se odnosi i na slučaj kada su na gornjem zidu kanala izvori, a na donjem zidu ponori. U prvom slučaju indukovano magnetno polje je smera osnovne struje od donjeg zida kanala sve do $y^* \approx 0.52$, a odatle pa do gornjeg zida kanala je suprotnog smera od smera osnovne struje. U drugom slučaju se smerovi indukovanog magnetnog polja i osnovne struje poklapaju od donjeg zida kanala pa do $y^* \approx 0.48,$ a odatle pa do gornjeg zida oni su suprotni. Dakle, u oba slučaja, sa rastom Hartmann-ovog broja opada indukcija indukovanog magnetnog polja i tada raste uticaj spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja tj. uticajnije je spoljašnje primenjeno magnetno polje od indukovanog magnetnog polja.



Slika 3.23 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Rm



Slika 3.24 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti β

Na slici 3.23 prikazani su rasporedi bezdimezione indukcije idukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja za slučaj kada je $\beta > 0$. Sa ove slike se zapaţa da većim vrednostima Reynolds-ovog magnetnog broja odgovaraju veće vrednosti intenziteta indukovanog magnetnog polja. Za slučaj prikazan na slici smer indukovanog magnetnog polja se poklapa sa smerom osnovne struje u preseku kanala od donjeg zida pa do $y^* \approx 0.525,$ a odatle pa do gornjeg zida smer indukovanog magnetnog polja je suprotan smeru osnovne struje. Za drugi slučaj, gde su na gornjem zidu izvori, a donjem ponori, smerovi indukovanog magnetnog polja i osnovne struje se poklapaju od donjeg zida kanala pa do $y^* \approx 0.475,$ a odatle pa do gornjeg zida ovi smerovi su suprotni. Sa slike se jasno zapaţa da je za male vrednosti Rm broja intenzitet indukovanog magnetnog polja mali i da je tada sasvim opravdano problem razmatrati sa zanemarivanjem uticaja indukovanog magnetnog polja.

Na slici 3.24 prikazani su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti veličine β. Sa ove slike se zapaţa da sa rastom apsolutne vrednosti veličine β raste i intenzitet magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja. Za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori a na gornjem zidu ponori onda je za manje vrednosti veličine β u većem delu poprečnog preseka kanala, mereno od donjeg zida, smer indukovanog magnetnog polja isti sa smerom osnovne struje, dok je za veće vrednosti veličine β u celom poprečnom preseku kanala indukovano magnetno polje istog smera sa smerom osnovne struje. Za slučaj kada su na gornjem zidu kanala izvori a na donjem ponori onda je za manje apsolutne vrednosti veličine β u manjem delu poprečnog preseka kanala, mereno od donjeg zida, smer indukovanog magnetnog polja isti sa smerom osnovne struje, dok je za veće apsolutne vrednosti veličine β u celom poprečnom preseku kanala indukovano magnetno polje suprotnog smera od smera osnovne struje tečnosti. Porast intenziteta poprečne komponente brzine dovodi do porasta intenziteta indukovanog magnetnog polja i slabljenja uticaja spoljašnjeg magnetnog polja.

3.3.3 Raspored bezdimenzione temperature

Za određivanje rasporeda bezdimenzione temperature treba rešiti jednačinu (3.3.14). Neophodno je, prethodno, uneti u nju raspored bezdimenzione brzine i bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja i dva puta je integraliti u sva tri slučaja. Tako će se u prvom slučaju dobiti da je raspored bezdimenzione temperature dat izrazom:

$$\begin{aligned}\theta(y^*) = -\Pr\mathrm{Ec}\{&L_{62}\exp(2r_1y^*) + L_{63}\exp(r_1y^*) + \\ &+[L_{64} + L_{65}\sin(2c_2y^*) + L_{66}\cos(2c_2y^*)]\exp(2c_1y^*) + \\ &+[L_{67}\sin(c_2y^*) + L_{68}\cos(c_2y^*)]\exp((r_1+c_1)y^*) + \\ &+[L_{69}\sin(c_2y^*) + L_{70}\cos(c_2y^*)]\exp(c_1y^*) + \\ &+\frac{1}{2\Lambda}y^{*2} + D_1y^* + D_2\},\end{aligned} \tag{3.3.55}$$

gde su D_1 i D_2 integracione konstante, a radi kraćeg zapisa uvedene su oznake:

$$L_{46} = A_3c_1 - A_2c_2\ ,\ L_{47} = A_2c_1 + A_3c_2\ ,$$

$$L_{48} = L_{20}c_1 - L_{19}c_2\ ,\ L_{49} = L_{20}c_2 + L_{19}c_1\ ,$$

$$L_{50} = A_1^2r_1^2 + \Lambda A_1^2 + \frac{r_1^2L_{18}^2}{Ha^2},\ L_{51} = L_{46}^2 + \Lambda A_3^2 + \frac{L_{48}^2}{Ha^2}\ ,$$

$$L_{52} = L_{47}^2 + \Lambda A_2^2 + \frac{L_{49}^2}{Ha^2},\ L_{53} = 2A_1r_1L_{46} + 2\Lambda A_1A_3 + \frac{2r_1L_{18}L_{48}}{Ha^2}\ ,$$

$$L_{54} = 2A_1r_1L_{47} + 2\Lambda A_1A_2 + \frac{2r_1L_{18}L_{49}}{Ha^2}\ ,\ L_{55} = L_{46}L_{47} + \Lambda A_3A_2 + \frac{L_{48}L_{49}}{Ha^2}\ ,$$

$$L_{56} = \frac{1}{4c_2^2 + 4c_1^2}\left(-c_2L_{51} + c_2L_{52} + 2c_1L_{55}\right),\ L_{57} = \frac{1}{4c_2^2 + 4c_1^2}\left(c_1L_{51} + c_2L_{52} - 2c_2L_{55}\right),$$

$$L_{58} = \frac{1}{c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2}\left[\left(r_1 + c_1\right)L_{53} + c_2 L_{54}\right],\ L_{59} = \frac{1}{c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2}\left[\left(r_1 + c_1\right)L_{54} - c_2 L_{53}\right],$$

$$L_{60} = \frac{2}{c_2^2 + c_1^2}\left(A_2 c_2 + A_3 c_1\right)\ ,\ L_{61} = \frac{2}{c_2^2 + c_1^2}\left(A_2 c_1 - A_3 c_2\right),$$

$$L_{62} = \frac{L_{50}}{4r_1^2}\ ,\ L_{63} = \frac{2A_1}{r_1^2}\ ,\ L_{64} = \frac{1}{8c_1^2}\left(L_{51} + L_{52}\right),$$

$$L_{65} = \frac{1}{2c_2^2 + 2c_1^2}\left(L_{56}c_1 + L_{57}c_2\right),\ L_{66} = \frac{1}{2c_2^2 + 2c_1^2}\left(L_{57}c_1 - L_{56}c_2\right),$$

$$L_{67} = \frac{1}{c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2}\left(L_{58}\left(r_1 + c_1\right) + L_{59}c_2\right),\ L_{68} = \frac{1}{c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2}\left(L_{59}\left(r_1 + c_1\right) - L_{58}c_2\right),$$

$$L_{69} = \frac{1}{c_2^2 + c_1^2}\left(L_{60}c_1 + L_{61}c_2\right),\ L_{70} = \frac{1}{c_2^2 + c_1^2}\left(L_{61}c_1 - L_{60}c_2\right),$$

$$L_{72} = c_1^2 + c_2^2\ ,\ L_{73} = c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2,\ L_{74} = r_1 + c_1. \tag{3.3.56}$$

Korišćenjem graničnih uslova (3.3.17) za bezdimenzionu temperaturu dobija se da su integracione konstante D_1 i D_2 date izrazima:

$$\begin{gathered} D_2 = -L_{62} - L_{63} - L_{64} - L_{66} - L_{68} - L_{70}, \\ D_1 = -\frac{1}{\Pr Ec} - D_2 - L_{71}, \end{gathered} \tag{3.3.57}$$

gde je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka:

$$\begin{aligned} L_{71} &= L_{62}\exp\left(2r_1\right) + L_{63}\exp\left(r_1\right) + \\ &+ \left[L_{64} + L_{65}\sin\left(2c_2\right) + L_{66}\cos\left(2c_2\right)\right]\exp\left(2c_1\right) + \\ &+ \left[L_{67}\sin\left(c_2\right) + L_{68}\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(r_1 + c_1\right) + \\ &+ \left[L_{69}\sin\left(c_2\right) + L_{70}\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(c_1\right) + \frac{1}{2\Lambda}. \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

U II slučaju se dobija da je raspored bezdimenzione temperature dat izrazom:

$$\begin{aligned} \theta\left(y^*\right) = &-\Pr Ec[S_{15}\exp\left(2m_1 y^*\right) + \left(S_{16} + S_{17}y^* + S_{18}y^{*2}\right)\exp\left(2m_2 y^*\right) + \\ &+ \left(S_{19} + S_{20}y^*\right)\exp\left(\left(m_1 + m_2\right)y^*\right) + \\ &+ S_{21}\exp\left(m_1 y^*\right) + \left(S_{22} + S_{23}y^*\right)\exp\left(m_2 y^*\right) + \\ &+ \frac{1}{2\Lambda}y^{*2} + F_1 y^* + F_2], \end{aligned} \tag{3.3.59}$$

gde su F_1 i F_2 integracione konstante.

Uvedene su oznake:

$$S_1 = L_{22}B_1m_1,\; S_2 = \left(L_{23}B_2 - L_{24}B_3\right)m_2,\; S_3 = L_{23}B_3,\; S_4 = L_{23}B_3m_2,$$

$$S_5 = \left(m_1^2 + \Lambda\right)B_1^2 + \frac{S_1^2}{Ha^2},\; S_6 = \left(B_2m_2 + B_3\right)^2 + \Lambda B_2^2 + \frac{1}{Ha^2}\left(S_2 + S_3\right)^2,$$

$$S_7 = 2B_1\left[m_1\left(m_2B_2 + B_3\right) + \Lambda B_2\right],\; S_8 = \left(m_2^2 + \Lambda\right)B_3^2 + \frac{S_4^2}{Ha^2},$$

$$S_9 = 2\left[B_1B_3\left(m_1m_2 + \Lambda\right) + \frac{S_1S_4}{Ha^2}\right], S_{10} = 2\left[B_2B_3\left(m_2^2 + \Lambda\right) + B_3^2m_2 + \frac{S_2 + S_3}{Ha^2}S_4\right],$$

$$S_{11} = \frac{S_8}{2m_2},\; S_{12} = \frac{S_9}{m_1 + m_2},\; S_{13} = \frac{1}{m_2}\left(\frac{S_{10}}{2} - S_{11}\right),\; S_{14} = \frac{2B_3}{m_2},\; S_{15} = \frac{S_5}{4m_1^2},$$

$$S_{16} = \frac{1}{4m_2^2}\left[S_6 + \frac{S_{11}}{m_2} + \frac{1}{2m_2}\left(\frac{S_8}{m_2} - S_{10}\right) - S_{13}\right],\; S_{17} = \frac{1}{2m_2}\left(-\frac{S_{11}}{m_2} + S_{13}\right),$$

$$S_{18} = \frac{S_{11}}{2m_2},\; S_{19} = \frac{1}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\left(S_7 - S_{12} - \frac{S_9}{m_1 + m_2}\right),\; S_{20} = \frac{S_{12}}{m_1 + m_2},$$

$$S_{21} = \frac{2B_1}{m_1^2},\; S_{22} = \frac{1}{m_2^2}\left[-S_{14} + 2\left(B_2 - \frac{B_3}{m_2}\right)\right],\; S_{23} = \frac{S_{14}}{m_2}. \tag{3.3.60}$$

Korišćenjem graničnih uslova (3.3.17) za bezdimenzionu temperaturu dobija se da su integracione konstante date izrazima:

$$F_2 = -S_{15} - S_{16} - S_{19} - S_{21} - S_{22},$$
$$F_1 = -F_2 - S_{24} - \frac{1}{\Pr Ec}, \tag{3.3.61}$$

gde je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka:

$$\begin{aligned} S_{24} &= S_{15}\exp\left(2m_1\right) + \left(S_{16} + S_{17} + S_{18}\right)\exp\left(2m_2\right) + \left(S_{19} + S_{20}\right)\exp\left(m_1 + m_2\right) + \\ &+ S_{21}\exp\left(m_1\right) + \left(S_{22} + S_{23}\right)\exp\left(m_2\right) + \frac{1}{2\Lambda}. \end{aligned} \tag{3.3.62}$$

U III slučaju se dobija da je raspored bezdimenzione temperature dat izrazom:

$$\begin{aligned} \theta\left(y^*\right) = -\Pr Ec[&S_{31}\exp\left(2n_1y^*\right) + S_{32}\exp\left(2n_2y^*\right) + \\ &+ S_{33}\exp\left(2n_3y^*\right) + S_{34}\exp\left(\left(n_1 + n_2\right)y^*\right) + \\ &+ S_{35}\exp\left(\left(n_1 + n_3\right)y^*\right) + S_{36}\exp\left(\left(n_2 + n_3\right)y^*\right) + \\ &+ S_{37}\exp\left(n_1y^*\right) + S_{38}\exp\left(n_2y^*\right) + \\ &+ S_{39}\exp\left(n_3y^*\right) + \frac{1}{2\Lambda}y^{*2} + G_1y^* + G_2]. \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

gde su G_1 i G_2 integracione konstante, a radi kraćeg zapisa su uvedene oznake:

$$S_{25}=C_1^2\left[n_1^2\left(1+\frac{L_{33}^2}{Ha^2}\right)+\Lambda\right],\ S_{26}=C_2^2\left[n_2^2\left(1+\frac{L_{34}^2}{Ha^2}\right)+\Lambda\right],\ S_{27}=C_3^2\left[n_3^2\left(1+\frac{L_{35}^2}{Ha^2}\right)+\Lambda\right],$$

$$S_{28}=2C_1C_2\left[n_1n_2\left(1+\frac{L_{33}L_{34}}{Ha^2}\right)+\Lambda\right],\ S_{29}=2C_1C_3\left[n_1n_3\left(1+\frac{L_{33}L_{35}}{Ha^2}\right)+\Lambda\right],$$

$$S_{30}=2C_2C_3\left[n_2n_3\left(1+\frac{L_{34}L_{35}}{Ha^2}\right)+\Lambda\right],\ S_{31}=\frac{S_{25}}{4n_1^2},\ S_{32}=\frac{S_{26}}{4n_2^2},\ S_{33}=\frac{S_{27}}{4n_3^2},$$

$$S_{34}=\frac{S_{28}}{\left(n_1+n_2\right)^2},S_{35}=\frac{S_{29}}{\left(n_1+n_3\right)^2},S_{36}=\frac{S_{30}}{\left(n_2+n_3\right)^2},$$

$$S_{37}=\frac{2C_1}{n_1^2},\ S_{38}=\frac{2C_2}{n_2^2},\ S_{39}=\frac{2C_3}{n_3^2}. \tag{3.3.64}$$

Korišćenjem graničnih uslova (3.3.17) za bezdimenzionu temperaturu dobija se da su integracione konstante G_1 i G_2 date izrazima:

$$G_2=-S_{31}-S_{32}-S_{33}-S_{34}-S_{35}-S_{36}-S_{37}-S_{38}-S_{39},$$

$$G_1=-G_2-S_{40}-\frac{1}{\Pr Ec}, \tag{3.3.65}$$

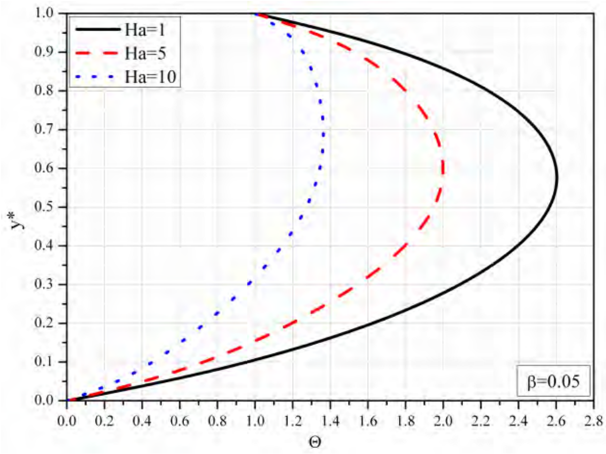
gde je radi kraćeg zapisa uvedena oznaka:

$$\begin{aligned}S_{40}&=S_{31}\exp\left(2n_1\right)+S_{32}\exp\left(2n_2\right)+S_{33}\exp\left(2n_3\right)+\\&+S_{34}\exp\left(n_1+n_2\right)+S_{35}\exp\left(n_1+n_3\right)+\\&+S_{36}\exp\left(n_2+n_3\right)+S_{37}\exp\left(n_1\right)+\\&+S_{38}\exp\left(n_2\right)+S_{39}\exp\left(n_3\right)+\frac{1}{2\Lambda}.\end{aligned} \tag{3.3.66}$$

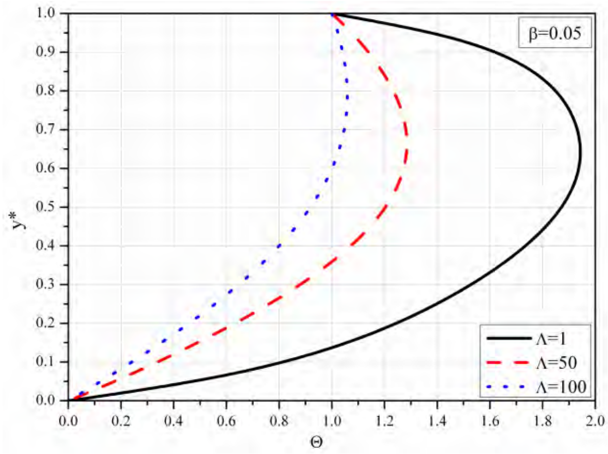
Radi jednostavnije i preglednije analize deo dobijenih rezultata predstavljen je u obliku dijagrama na slikama koje slede.

Na slici 3.25 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem ponori. Sa ove slike se zapaţa da povećanje vrednosti Hartmann-ovog broja tj. povećanje jačine spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja dovodi do sniţenja temperature u kanalu. Na gornjem zidu kanala, o obzirom da je njegova temperatura viša od temperature donjeg zida, toplotni fluks je istog smera kao i y osa. To znači da se toplota transportuje sa tečnosti ka gornjem zidu iako je gornji zid na višoj temperaturi od donjeg. Razlog za ovakvo ponašanje je u tome da je generisanje toplotne energije uzrokovano viskoznom i Dţulovom disipacijom tako veliko da se ova energija ne moţe sva odvesti preko donjeg zida. Ovo je i razlog zašto se sve maksimalne vrednosti temperature, za sve vrednosti Ha, nalaze u gornjoj polovini preseka kanala.

Ovi zaključci se odnose i na drugi slučaj tj. kada su izvori na gornjem zidu, a ponori na donjem zidu kanala



Slika 3.25 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha



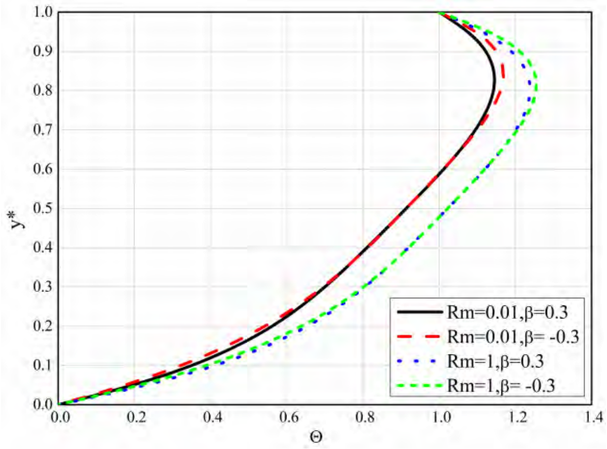
Slika 3.26 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ

.

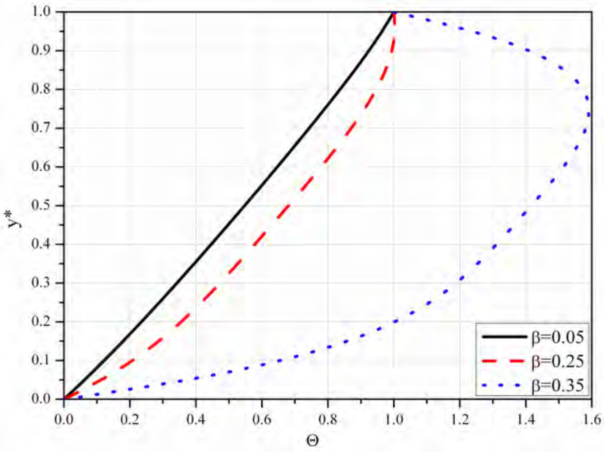
Na slici 3.26 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora poroznosti tj. za različite propustljivosti sredine. Zapaţa se da većim vrednostima faktora poroznosti odnosno manjoj propustljivosti sredine odgovaraju niţe temperature u kanalu. Transport toplote sa tečnosti ka gornjem zidu se smanjuje sa smanjenjem propustljivosti sredine tj. sa povećenjem faktora poroznosti. Maksimalne temperature se postiţu u gornjoj polovini preseka kanala .

Ovi zaključci vaţe i za slučaj kada su izvori na gornjem, a ponori na donjem zidu.

Na slici 3.27 prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja i veličine β . Većim vrednostima Reynolds-ovog magnetnog broja odgovaraju više temperature u kanalu. Maksimalne vrednosti temperature su bliţe gornjem zidu kanala. Toplotni fluks na gornjem zidu kanala ima smer kao i y osa što znači da se toplota sa tečnosti transportuje ka gornjem zidu iako je on na višoj temperaturi od donjeg zida.Većim vrednostima Rm broja odgovara veća količina transportovane toplote sa tečnosti ka gornjem zidu. Ovi zaključci odnose se na oba slučaja strujanja, i za $\beta > 0$ i za $\beta < 0$.



Slika 3.27 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Rm i β

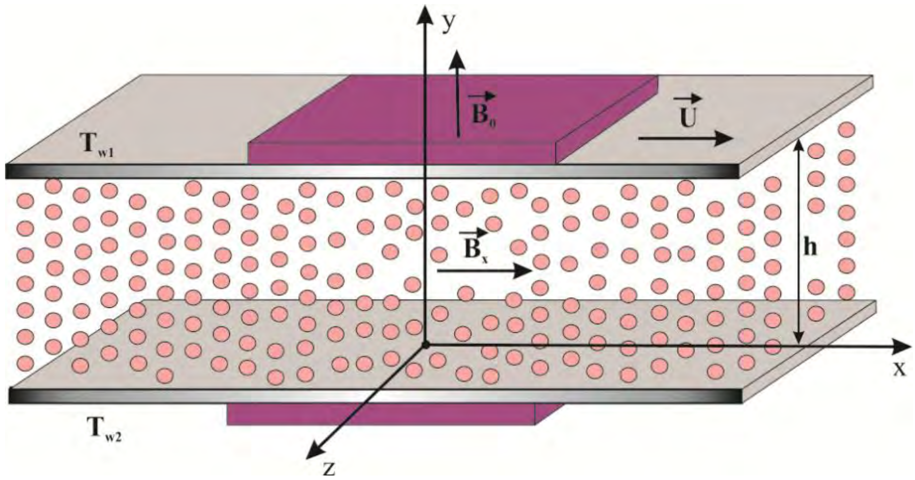


Slika 3.28 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti β

Na slici 3.28 prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti veličine β za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem zidu kanala ponori. Sa ove slike se zapaţa da većim vrednostima β odgovaraju više temperature u kanalu. Za veće vrednosti β toplotni fluks na gornjem zidu kanala ima smer kao i y osa što znači da se toplota transportuje sa tečnosti ka gornjem zidu kanala. Većim vrednostima β odgovara veća količina transportovane toplote sa tečnosti ka gornjem zidu. Za $\beta = 0$ na gornjem zidu neće biti transporta toplote. Ovi zaključci se odnose i na slučaj $\beta < 0$, s tim što se onda u razmatranje uzima apsolutna vrednost veličine β. U oba slučaja su maksimalne vrednosti temperatura u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala.

3.4 Poiseuille-Couette-ovo MHD strujanje u poroznoj sredini sa uticajem indukovanog magetnog polja

U ovom poglavlju se razmatra magnetno-hidrodinamičko (MHD) strujanje fluida i razmena toplote u poroznom kanalu čiji su zidovi horizontalni. Donji zid je nepokretan, njegova temperatura je konstantna i iznosi T_{w2}. Gornji zid se kreće konstantnom brzinom intenziteta U, paralelno donjem zidu. Temperatura gornjeg zida je konstantna i iznosi T_{w1}. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno, upravno na zidove kanala, smera od donjeg ka gornjem zidu, a intenzitet njegove magnetne indukcije je B_0. U pravcu strujanja fluida, paralelno zidovima kanala, javlja se indukovano magnetno polje intenziteta B_x. Pretpostavljeno je da se smer indukovanog magnetnog polja poklapa sa smerom brzine pokretnog zida kanala. Zapaţa se da se ovaj model strujanja fluida i prenosa toplote razlikuje od modela izučenog u prethodnom poglavlju što je posledica kretanja gornjeg zida kanala.



Slika 3d Fizički model strujanja

3.4.1 Matematički model

Sprovodeći istu analizu kao i u poglavlju 3.3 dolazi se do istog sistema jednačina (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) i nešto drugačijih graničnih uslova:

$$\begin{gathered} u(0)=0, \quad u(h)=U, \\ B_x(0)=0, \ B_x(h)=0, \\ T(0)=T_{w2}, \ T(h)=T_{w1}, \end{gathered} \tag{3.4.1}$$

koji se razlikuju od uslova (3.3.8) jer je ovde brzina kretanja fluida na gornjem zidu kanala jednaka U dok je u prethodnom poglavlju 3.3 jednaka što odgovara slučaju nepokretnog zida. Sistem jednačina (3.3.4) - (3.3.7) i granični uslovi (3.4.1) predstavljaju matematički model ovde opisanog strujanja (fizičkog modela).

Za transformisanje ovog matematičkog modela na bezdimenzioni matematički model uvode se bezdimenzione veličine, kao i u poglavlju 3.3, izrazima (3.3.9) s tim što sada u ovim izrazima veličina U predstavlja intenzitet brzine gornjeg zida, a ne veličinu datu izrazom (3.3.10). Treba obratiti paţnju na činjenicu da će veličina U predstavljati intenzitet brzine gornjeg zida kanal u celom ovom poglavlju.

Jednačina (3.3.12) u bezdimenzionom obliku sada je:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - \beta\,\mathrm{Re}\frac{du^*}{dy^*} - \Lambda u^* + \frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Rm}}\frac{db}{dy^*} + G = 0\,, \tag{3.4.2}$$

gde je uvedena oznaka:

$$G = \frac{Ph^2}{\mu U}\,, \tag{3.4.3}$$

a ostale oznake imaju iste zapise kao i u poglavlju 3.3. Zapaţa se da se jednačina (3.4.2) razlikuje od odgovarajuće jednačine u poglavlju 3.3 u poslednjem sabirku koji je sada G, a bio je jednak jedinici. Jednačine (3.3.5), (3.3.6) i (3.3.7) u bezdimenzionim oblicima imaju iste zapise kao i u poglavlju 3.3, a to su jednačine (3.3.13), (3.3.14) i (3.3.15).

Granični uslovi (3.4.1) transformišu se na bezdimenzione granične uslove :

$$u^*(0) = 0,\ \ u^*(1) = 1,$$
$$b(0) = 0,\ \ b(1) = 0,$$
$$\Theta(0) = 0,\ \ \Theta(1) = 1, \tag{3.4.4}$$

koji se razlikuju od odgovarajućih graničnih uslova u poglavlju 3.3.

Dakle, bezdimenzioni matematički model ovog strujanja predtavljaju jednačine (3.4.2), (3.3.13), (3.3.14), (3.3.15) i granični uslovi (3.4.4).

Za dalje teorijsko izučavanje opisanog problema neophodno je rešiti ove jednačine sa odgovarajućim graničnim uslovima (3.4.4).

3.4.2 Rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja

Ovde se prelazi na rešavanje jednačina (3.4.2), (3.3.13), (3.3.14), (3.3.15) sa graničnim uslovima (3.4.4). U tom cilju se iz jednačine (3.4.2) dobija da je:

$$\frac{db}{dy^*} = \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}\left(\beta\,\mathrm{Re}\frac{du^*}{dy^*} + \Lambda u^* - \frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - G\right), \tag{3.4.5}$$

zatim se ovaj izraz diferencira po y^* i tako dobijeni izraz i izraz (3.4.5) zamenjuju u jednačini (3.3.13) koja se tako transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^3u^*}{dy^{*3}} - a_1 \frac{d^2u^*}{dy^{*2}} + a_2 \frac{du^*}{dy^*} + a_3 u^* = \beta RmG\,, \tag{3.4.6}$$

gde su veličine a_1, a_2, a_3 iste kao i u poglavlju 3.3 i date su izrazima (3.3.21).

Jednačina (3.4.6) razlikuje se od odgovarajuće jednačine (3.3.20) samo u izrazu na desnoj strani jednačine.

Kao i u poglavlju 3.3 i ovde se razlikuju tri slučaja za odreĐivanje rešenja jednačine (3.4.6) što zavisi od rešenja odgovarajuće karakteristične jednačine.

I slučaj

Ovaj slučaj odgovara I slučaju iz poglavlja 3.3 i onda je rešenje jednačine (3.4.6) dato izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = A_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + \left[A_2 \cos\left(c_2 y^*\right) + A_3 \sin\left(c_2 y^*\right)\right] \exp\left(c_1 y^*\right) + \frac{G}{\Lambda}, \tag{3.4.7}$$

gde u veličine r_1, c_1, c_2 date izrazima (3.3.30) i (3.3.32), a A_1, A_2 i A_3 su integracione konstante. Izraz (3.4.7) se razlikuje od odgovarajućeg izraza (3.3.34) samo u poslednjem sabirku tj. u partikularnom rešenju jednačine (3.4.6) koje se razlikuje od partikularnog rešenja jednačine (3.3.20).

II slučaj

Ovaj slučaj odgovara slučaju II u poglavlju 3.3 i onda je rešenje jednačine (3.4.6) dato izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = B_1 \exp\left(m_1 y^*\right) + B_2 \exp\left(m_2 y^*\right) + B_3 y^* \exp\left(m_2 y^*\right) + \frac{G}{\Lambda}, \tag{3.4.8}$$

gde su veličine m_1 i m_2 date izrazima (3.3.36), a B_1, B_2 i B_3 su integracione konstante koje treba odrediti. Izraz (3.4.8) se razlikuje od odgovarajućeg izraza (3.3.7) samo poslednjim sabirkom kao i u slučaju I.

III slučaj

Ovaj slučaj odgovara slučaju III u poglvlju 3.3 i onda je rešenje jednačine (3.4.6) dato izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = C_1 \exp\left(n_1 y^*\right) + C_2 \exp\left(n_2 y^*\right) + C_3 \exp\left(n_3 y^*\right) + \frac{G}{\Lambda}, \tag{3.4.9}$$

gde su veličine n_1, n_2 i n_3 date izrazima (3.3.38), a C_1, C_2 i C_3 su integracione konstante. I ovaj izraz se razlikuje od odgovarajućeg izraza (3.3.40) samo poslednjim sabirkom kao i u prethodna dva slučaja.

Sada se prelazi na odreĎivanje rasporeda bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u sva tri slučaja. U tom cilju koristi se jednačina (3.4.5) i dobija se da je:

$$b\left(y^*\right) = \frac{Rm}{Ha^2}\left(\beta \operatorname{Re} u^* + \Lambda \int u^* dy^* - \frac{du^*}{dy^*} - Gy^* + C\right), \tag{3.4.10}$$

gde je C integraciona konstanta.

Zapaţa se da će se $b(y^*)$ razlikovati u slučajevima I, II i III jer se i rasporedi brzina od kojih zavisi izraz (3.4.10) razlikuju. Zato je potrebno odrediti bezdimenzione rasporede magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u sva tri slučaja, što će se nadalje i učiniti.

I slučaj

Zamenjujući izraz (3.4.7) za raspored brzine u izrazu (3.4.10) i sprovodeći naznačene operacije dobija se:

$$\begin{aligned} b(y^*) &= \frac{Rm}{Ha^2}\{L_{18}\exp(r_1 y^*) + \\ &+ [L_{19}\cos(c_2 y^*) + L_{20}\sin(c_2 y^*)]\exp(c_1 y^*) + \beta \operatorname{Re}\frac{G}{\Lambda} + A_4\}, \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

gde su veličine L_{18}, L_{19} i L_{20} date izrazima (3.3.46), a A_4 je integraciona konstanta.

II slučaj

Zamenjujući izraz (3.4.8) za raspored bezdimenzione uzduţne brzine u izrazu (3.4.10) i sprovodeći naznačene operacije dobija se:

$$\begin{aligned} b(y^*) &= \frac{Rm}{Ha^2}[L_{22}B_1\exp(m_1 y^*) + (L_{23}B_2 - L_{24}B_3)\exp(m_2 y^*) + \\ &+ L_{23}B_3 y^*\exp(m_2 y^*) + \frac{\beta \operatorname{Re} G}{\Lambda} + B_4], \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

gde su veličine L_{22}, L_{23} i L_{24} date izrazima (3.3.48), a B_4 je integraciona konstanta.

III slučaj

Zamenjujući izraz (3.4.9) u izrazu (3.4.10) i sprovodeći naznačene operacije dobija se da je:

$$b(y^*) = \frac{Rm}{Ha^2}[L_{33}C_1 \exp(n_1 y^*) + L_{34}C_2 \exp(n_2 y^*) +$$
$$+L_{35}C_3 \exp(n_3 y^*) + \frac{\beta \operatorname{Re} G}{\Lambda} + C_4], \tag{3.4.13}$$

gde su veličine L_{33}, L_{34} i L_{35} date izrazima (3.3.52), a C_4 je integraciona konstanta.

Sada je potrebno odrediti sve integracione konstante. U slučaju I to su: A_1, A_2, A_3 i A_4; u slučaju II to su: B_1, B_2, B_3 i B_4; i u slučaju III to su: C_1, C_2, C_3 i C_4. Za odreĎivanje ovih konstanti koriste se granični uslovi za bezdimenzionu uzduţnu brzinu i bezdimenziono indukovano magnetno polje dati izrazima (3.4.4). Ako se u svakom od ova tri slučaja iskoriste granični uslovi (3.4.4) dobiće se sledeće reprezentacije integracionih konstanti:

u I slučaju su:

$$A_2 = \frac{L_{16} - G(L_5 L_{17} + L_{10} L_{16})}{L_9 L_{16} + L_5 L_{15}},$$
$$A_1 = -A_2 - \frac{G}{\Lambda},$$
$$A_3 = \frac{L_{15} A_2 + G L_{17}}{L_{16}},$$
$$A_4 = -L_{13} A_2 - L_8 A_3 - G L_{14}, \tag{3.4.14}$$

gde su veličine L_i date izrazima (3.3.44).

U II slučaju su:

$$B_1 = \frac{1}{L_{31} - L_{32}} + \frac{G}{\Lambda} \frac{L_{32} - 1}{L_{31} - L_{32}},$$
$$B_2 = -B_1 - \frac{G}{\Lambda},$$
$$B_3 = \frac{1}{L_{30}}\left(L_{28} B_1 + L_{29} B_2\right),$$
$$B_4 = -L_{25} B_1 - L_{26} B_2 - L_{27} B_3 - \frac{\beta \operatorname{Re} G}{\Lambda}, \tag{3.4.15}$$

gde su veličine L_i date izrazima (3.3.50).

U III slučaju su:

$$C_1 = \frac{L_{45}}{L_{42}L_{45} - L_{43}L_{44}} + \frac{G}{\Lambda}\frac{L_{43} - L_{45}}{L_{42}L_{45} - L_{43}L_{44}},$$

$$C_2 = -\frac{1}{L_{45}}\left(L_{44}C_1 + \frac{G}{\Lambda}\right),$$

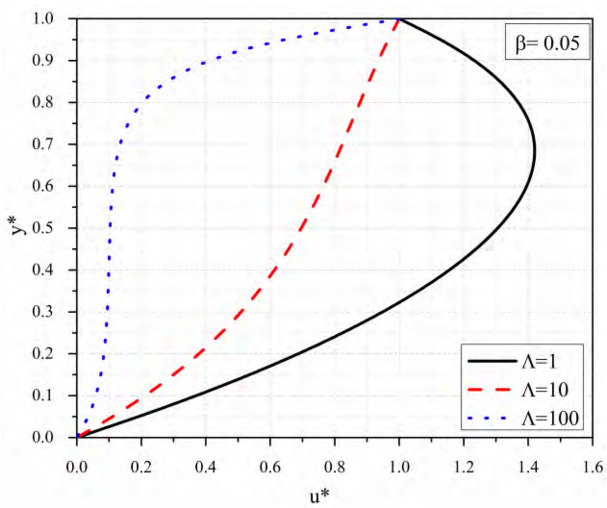
$$C_3 = -\frac{1}{L_{41}}\left(L_{39}C_1 + L_{40}C_2\right),$$

$$C_4 = -L_{33}C_1 - L_{34}C_2 - L_{35}C_3 - \frac{\beta \operatorname{Re} G}{\Lambda}, \tag{3.4.16}$$

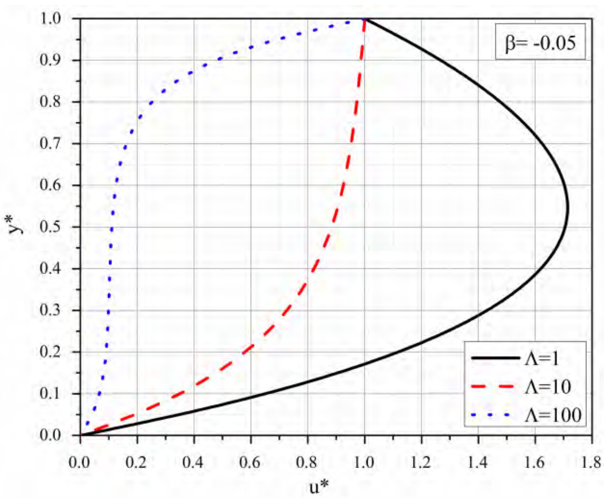
gde su veličine L_i date izrazima (3.354).

OdreĎivanjem ovih konstanti postale su poznate bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u sva tri slučaja.

Deo dobijenih rezultata i njihova analiza slede u nastavku.

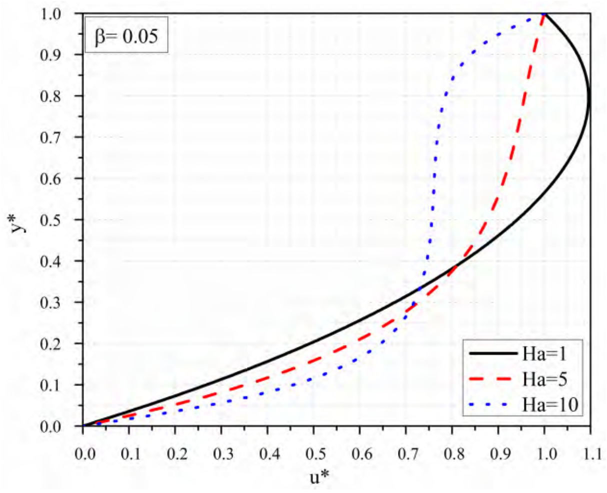


Slika 3.29a Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ ; $\beta = 0.05$

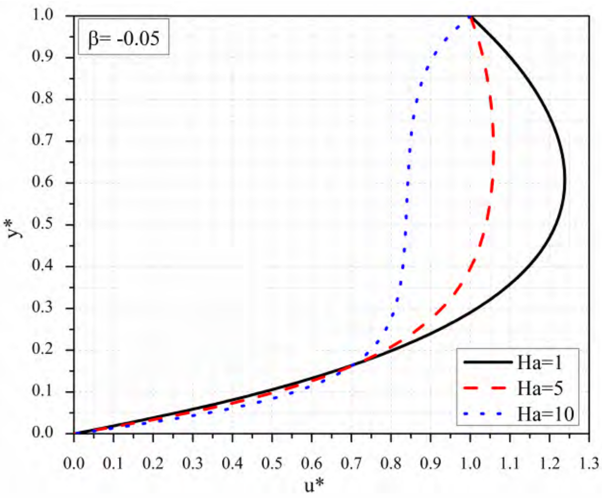


Slika 3.29b Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ ; $\beta = -0.05$

Na slikama 3.29a i 3.29b su predstavljeni rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti faktora poroznosti, a za slučajeve kada su na donjem zidu izvori, a na gornjem zidu ponori i obrnuto kada su na gornjem zidu kanala izvori, a na donjem zidu ponori respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da sa povećenjem faktora poroznosti tj. sa smanjenjem propustljivosti sredine brzina strujanja tečnosti u kanalu opada, a sa tim opada i srednja brzina i protok tečnosti kroz kanal. Za velike vrednosti faktora poroznosti uzduţna brzina je u velikom delu poprečnog preseka kanala vrlo mala, a onda u blizini gornjeg zida naglo raste da bi na samom zidu postigla njegovu brzinu. Većim vrednostima faktora poroznosti, na donjem zidu kanala, odgovaraju veći tangencijalni naponi, a na gornjem zidu kanala manji tangencijalni naponi (osim za vrlo velike vrednosti faktora poroznosti). Poloţaj maksimalne uzduţne brzine, koji se posebno zapaţa za male vrednosti faktora poroznosti, je u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala u prvom slučaju, a u donjoj polovini u drugom slučaju. Kod velikih vrednosti faktora poroznosti postaje zanemarljiv uticaj izvora i ponora na pločama.



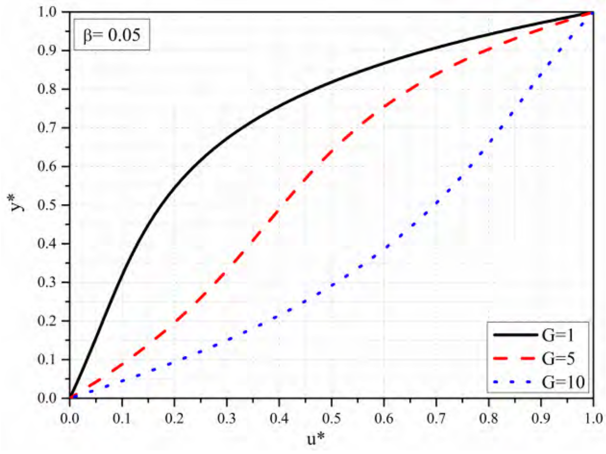
Slika 3.30a Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha, $\beta = 0.05$

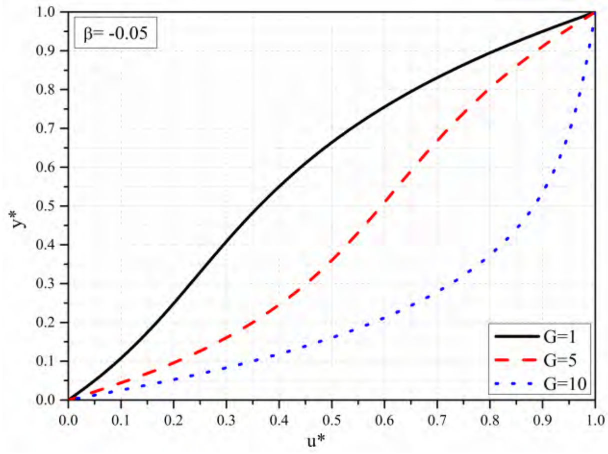


Slika 3.30b Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha, $\beta = -0.05$

Na slikama 3.30a i 3.30b dati su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti Hartmann-ovog broja, a za slučaj kada su na donjem zidu izvori, a na gornjem zidu kanala ponori i obrnuto kada su na gornjem zidu izvori a na donjem zidu kanala ponori respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da većim vrednostima Hartmann-ovog broja odgovaraju, u većem delu poprečnog preseka kanala, manji intenziteti uzduţne brzine tečnosti u kanalu, a onda i manje vrednosti srednje uzduţne brzine i protoka u kanalu. Većim vrednostima Ha broja odgovaraju veće vrednosti tangencijalnog napona na donjem zidu a gornjem zidu odgovaraju manje vrednosti tangencijalnog napona, osim za vrlo velike vrednosti Ha broja. Poloţaji maksimuma brzine, su u oba razmatrana slučaja, u gornjoj polovini poprečnog preseka, a bliţi su gornjem zidu kanala u prvom slučaju.

Na slikama 3.31a i 3.31b dati su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti veličine G, a za vrednosti $\beta = 0.05$ i $\beta = -0.05$ respektivno. Veličina G predstavlja meru odnosa pada pritiska duţ strujanja i brzine ploče jer su μ i h konstantne veličine. Strujanje izazvano samo kretanjem ploče poznato je kao Couette-ovo strujanje, a strujanje izazvano samo padom pritiska poznato je kao Poisseuille-ovo strujanje. Sa ovih slika se zapaţa da većim vrednostima veličine G tj. većem uticaju Poissseuille-ovog strujanja odgovaraju veći intenziteti uzduţne brzine, a onda i veće srednje vrednosti uzduţne brzine i veći protoci tečnosti u kanalu.

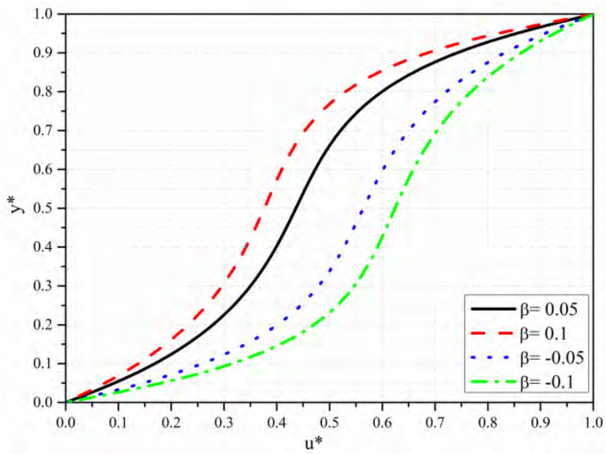


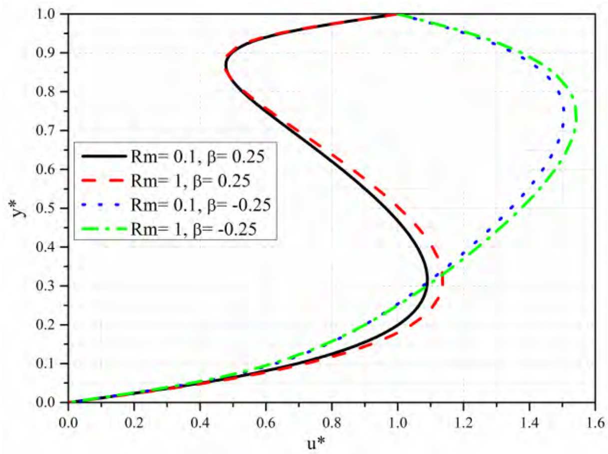


Slika 3.31a Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti G, $\beta = 0.05$

Slika 3.31b Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti G, $\beta = -0.05$

Većim vrednostima veličine G odgovaraju veći tangencijalni naponi na donjem zidu, a manji tangencijalni naponi na gornjem zidu kanala. Ovi zaključci odnose se i na slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem ponori, a i za obratni slučaj. Ovi zaključci su moţda na prvi pogled neočekivani, ali su sasvim realni ako se pogleda jednačina (3.4.2) iz koje se odmah zaključuje da brzina direktno zavisi od veličine G. Ovo dovodi do zaključka da je uticaj uzduţnog pada pritiska na uzduţnu brzinu veći od uticaja brzine gornjeg zida na istu.



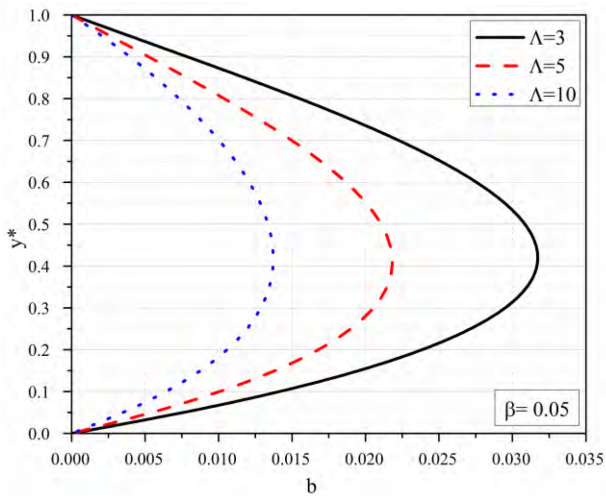


Slika 3.32 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β

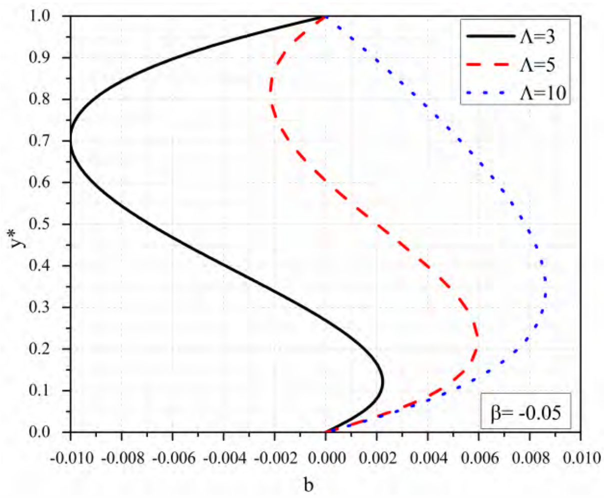
Slika 3.33 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Rm i β

Sa slike 3.32, za pozitivne vrednosti β, se zapaţa da većoj vrednosti β odgovara manji intenzitet uzduţne brzine, manja srednja brzina i protok u kanalu. TakoĎe većoj vrednosti β odgovara manja vrednost tangencijalnog napona na donjem zidu kanala, a veće vrednost tangentncijalnog napona na gornjem zidu kanala. Za negativne vrednosti β se zapaţa da većoj apsolutnoj vrednosti $|\beta|$ odgovara veći tangencijalni napon na donjem zidu, a manji tangencijalni napon na gornjem pokretnom zidu. Na ovoj slici se vidi značajan uticaj poprečne brzine na raspored uzdužne brzine u kanalu.

Na slici 3.33 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine u kanalu za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja i to za slučaj kada su na donjem zidu izvori, a na gornjem zidu ponori i obrnuto. Zapaža se da većim vrednostima Rm broja odgovaraju veće uzdužne brzine u kanalu dok su tangencijalni naponi na zidovima skoro nepromenjeni. Ovi zaključci odnose se na oba slučaja.



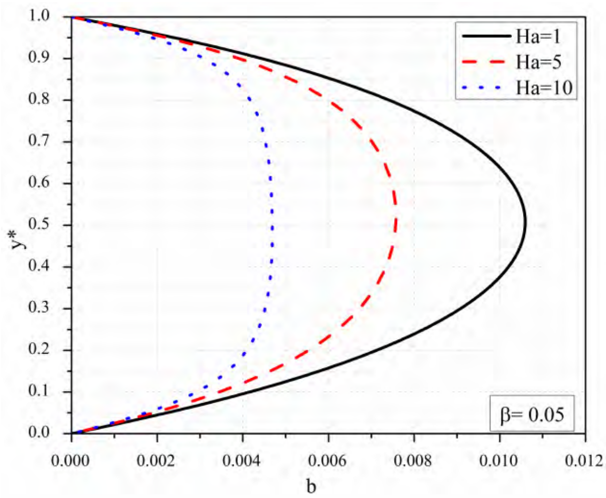
Slika 3.34a Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Λ, $\beta = 0.05$



Slika 3.34b Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Λ, $\beta = -0.05$

Na slikama 3.34a i 3.34b dati su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti faktora poroznosti za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem zidu kanala ponori i za slučaj kada su na gornjem zidu kanala izvori, a na donjem zidu ponori, respektivno. Sa slike 3.34a se zapaža da većim vrednostima faktora poroznosti tj. manjim propustljivostima kanala odgovaraju manji intenziteti indukcije indukovanog magnetnog polja. Indukovano magnetno polje je smera uzdužne brzine u kanalu za sve vrednosti faktora poroznosti prikazane na ovoj slici.

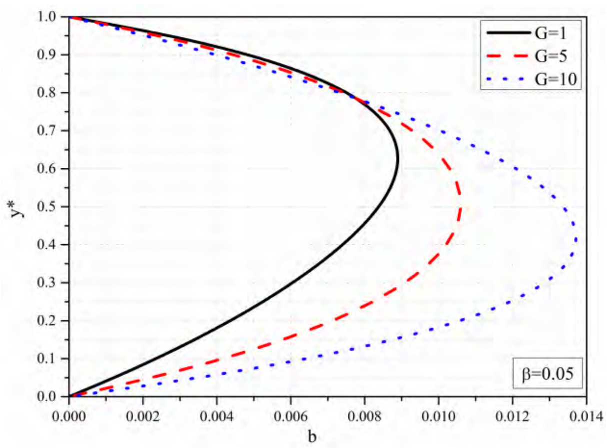
Sa slike 3.34b se zapaža da za različite vrednosti parametra poroznosti indukovano magnetno polje menja i svoj smer. Tako je za $\Lambda = 3$ tj. za najveću propustljivost kanala, od posmatranih, smer indukovanog magnetnog polja u manjem delu poprečnog preseka kanala isti sa smerom uzdužne brzine tečnosti u kanalu dok je u većem delu poprečnog preseka kanala suprotnog smera. Maksimalna vrednost indukcije indukovanog magnetnog polja je u gornjoj polovini poprečnog preseka. Za propustljivost kanala kojoj odgovara faktor poroznosti $\Lambda = 5$ u većem delu poprečnog preseka kanala smer indukovanog magnetnog polja se poklapa sa smerom uzdužne brzine tečnosti u kanalu, dok se u manjem delu poprečnog preseka ovi smerovi razlikuju (suprotni su). Maksimalni intenzitet indukcije indukovanog magnetnog polja je u donjoj polovini kanala. Za najmanju ovde posmatranu propustljivost kanala kojoj odgovara faktor poroznosti $\Lambda = 10$, smer indukovanog magnetnog polja isti je sa smerom uzdužne brzine tečnosti u kanalu u celom poprečnom preseku kanala. Maksimalni intenzitet indukcije indukovanog magnetnog polja je u donjoj polovini poprečnog preseka kanala.



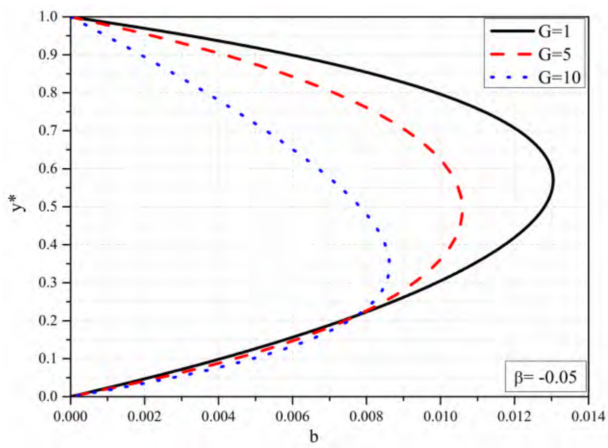
Slika 3.35 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Ha, $\beta = 0,05$

Na slici 3.35 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Hartmann-ovog broja za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem zidu kanala ponori. Sa slike se zapaža da većim vrednostima Hartmann-ovog broja tj. primenjenom spoljašnjem magnetnom polju višeg intenziteta odgovaraju manji intenziteti indukovanog magnetnog polja. Indukovano polje je smera uzdužne brzine tečnosti u kanalu. Zapaža se i da veće vrednosti Ha broja "poravnavaju" profil bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja. Ovi zaključci se odnose na slučaj prikazan na slici a, i na slučaj kada su na gornjem zidu kanala izvori a na donjem zidu ponori. Opšti je zaključak da veći intenzitet spoljašnjeg primenjeog magnetnog polja smanjuje brzinu elektroprovodnog fluida, a samim tim i indukovano magnetno polje koje nastaje kao posledica meĐusobneinterakcije strujanja elektroprovodnog fluida i magnetnog polja.

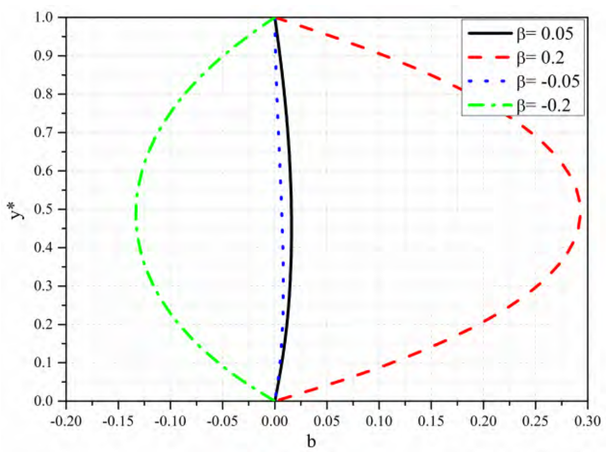
Na slikama 3.36a i 3.36b predstavljeni su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti veličine G. Slučaj a odgovara pozitivnoj vrednosti parametra β, a slučaj b negativnoj vrednosti β, čime se definišu izvori i ponori na pločama. Za oba slučaja je faktor poroznosti $\Lambda = 10$. Zapaža se da je u oba slučaja smer indukovanog magnetnog pola, za sve vrednosti veličine G, isti sa smerom uzdužne brzine u kanalu. Sa slike 3.36a se zapaţa da većim vrednostima veličine G odgovaraju veće vrednosti intenziteta magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u većem delu poprečnog preseka kanala. Za slučaj prikazan na slici 3.36b se zaključuje da većim vrednostima veličine G odgovaraju manji intenziteti magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u većem delu poprečnog preseka kanala. U oba slučaja sa porastom veličine G poloţaji maksimlnih intenziteta indukovanog magnetnog polja se pomeraju ka donjem zidu. Ovi poloţaji su bliţi donjem zidu za slučaj prikazan na slici 3.36b što se moţe objasniti smerom poprečne brzine tečnosti u kanalu.



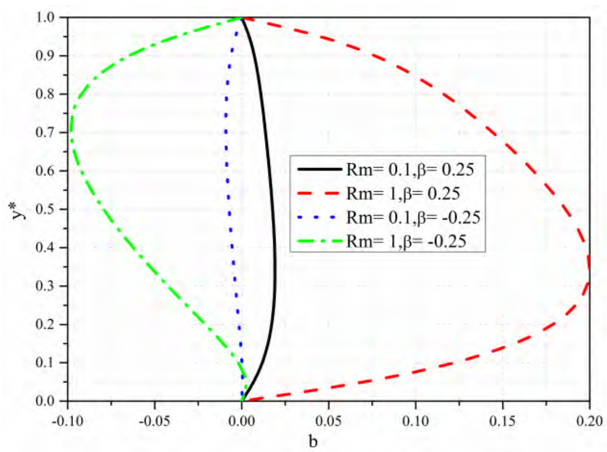
Slika 3.36a Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti G , $\beta = 0.05$



Slika 3.36b Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti G , $\beta = -0.05$



Slika 3.37 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti β



Slika 3.38 Bezdimenziona indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Rm i β

Na slici 3.37 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti veličine β, a za konstantne veličine Rm, Ha, Re i Λ. Sa ove slike se zapaţa da je za slučaj kada su izvori na donjem zidu kanala, a ponori na gornjem zidu kanala smer indukovanog magnetnog polja isti sa smerom uzduţne brzine tečnosti u kanalu. U ovom slučaju većim vrednostima veličine β odgovaraju veći intenziteti idukovanog magnetnog polja. U drugom slučaju tj. za $\beta < 0$ za male vrednosti $|\beta|$ smer idukovanog magnetnog polja se poklapa sa smerom uzduţne brzine tečnosti u kanalu, dok je za veće vrednosti $|\beta|$ smer indukovanog magnetnog polja suprotan smeru uzduţne brzine tečnosti u kanalu. Većim vrednostima $|\beta|$ odgovaraju veći intenziteti indukovanog magnetnog polja.

Na slici 3.38 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja za slučajeve ka su $\beta < 0$ i $\beta > 0$. Sa ove slike se zapaţa da je u prvom slučaju smer indukovanog magnetnog polja suprotan smeru uzduţne brzine tečnosti u kanalu. Većim vrednostima Rm broja odgovaraju veći intenziteti magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja. U prvom slučaaju se poloţaji maksimalnih intenziteta indukcije bliţi donjem zidu dok su u drugom slučaju ovi poloţaji bliţi gornjem zidu kanala.

3.4.3 Raspored bezdimenzione temperature

Za odreĎivanje rasporeda bezdimenzione temperature treba rešiti jednačinu (3.3.14) sa graničnim uslovima (3.3.17). Dakle, treba rešiti jednačinu:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} = -\Pr Ec\left[\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + \Lambda u^{*2} + \frac{Ha^2}{Rm^2}\left(\frac{db}{dy^*}\right)^2\right], \qquad (3.4.17)$$

sa graničnim uslovima (3.3.17) za bezdimenzionu temperaturu.

U I slučaju, posle unošenja izraza za bezdimenzionu brzinu (3.4.7) i izraza za bezdimenzionu magnetnu indukciju indukovanog magnetnog polja (3.4.11) u jednačinu (3.4.17) i dvostruke integracije tako dobijene jednačine dolazi se do izraza za bezdimenzionu temperaturu u obliku:

$$
\begin{aligned}
\theta(y^*) = -\Pr\mathrm{Ec}\{ & L_{62}\exp(2r_1y^*) + GL_{63}\exp(r_1y^*) + [L_{64} + L_{65}\sin(2c_2y^*) + \\
& + L_{66}\cos(2c_2y^*)]\exp(2c_1y^*) + \\
& + [L_{67}\sin(c_2y^*) + L_{68}\cos(c_2y^*)]\exp((r_1 + c_1)y^*) + \\
& + G[L_{69}\sin(c_2y^*) + L_{70}\cos(c_2y^*)]\exp(c_1y^*) + \\
& + \frac{G^2}{2\Lambda}y^{*2} + D_1y^* + D_2\},
\end{aligned} \tag{3.4.18}
$$

u kome su D_1 i D_2 integracione konstante. Koristeći granične uslove (3.3.17) dobija se da su integracione konstante date izrazima

$$
\begin{aligned}
D_2 &= -L_{62} - L_{64} - L_{66} - L_{68} - G\left(L_{63} + L_{70}\right), \\
D_1 &= -\frac{1}{\Pr\mathrm{Ec}} - D_2 - L_{71}^*,
\end{aligned} \tag{3.4.19}
$$

gde je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka

$$
\begin{aligned}
L_{71}^* = {} & L_{62}\exp\left(2r_1\right) + GL_{63}\exp\left(r_1\right) + \\
& + \left[L_{64} + L_{65}\sin\left(2c_2\right) + L_{66}\cos\left(2c_2\right)\right]\exp\left(2c_1\right) + \\
& + \left[L_{67}\sin\left(c_2\right) + L_{68}\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(r_1 + c_1\right) + \\
& + G\left[L_{69}\sin\left(c_2\right) + L_{70}\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(c_1\right) + \frac{G^2}{2\Lambda}.
\end{aligned} \tag{3.4.20}
$$

U II slučaju, unošenjem izraza za bezdimenzionu uzdužnu brzinu (3.4.8) i izraza za bezdimenzionu magnetnu indukciju indukovanog magnetnog polja (3.4.12) u jednačinu (3.4.17) i dostrukom integracijom tako dobijene jednačine dolazi se do izraza za bezdimenzionu temperaturu:

$$
\begin{aligned}
\theta\left(y^*\right) = -\Pr\mathrm{Ec}[& S_{15}\exp\left(2m_1y^*\right) + \left(S_{16} + S_{17}y^* + S_{18}y^{*2}\right)\exp\left(2m_2y^*\right) + \\
& + \left(S_{19} + S_{20}y^*\right)\exp\left(\left(m_1 + m_2\right)y^*\right) + \\
& GS_{21}\exp\left(m_1y^*\right) + G\left(S_{22} + S_{23}y^*\right)\exp\left(m_2y^*\right) + \\
& + \frac{G^2}{2\Lambda}y^{*2} + F_1y^* + F_2],
\end{aligned} \tag{3.4.21}
$$

u kome su F_1 i F_2 integracione konstante. Korišćenjem graničnih uslova (3.3.17) za bezdimenzionu temperaturu dobija se da su ove integracione konstante date izrazima:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= -S_{15} - S_{16} - S_{19} - G\left(S_{21} + S_{22}\right), \\
F_1 &= -\frac{1}{\Pr\mathrm{Ec}} - F_2 - S_{24}^*,
\end{aligned} \tag{3.4.22}
$$

gde je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka

$$
\begin{aligned}
S_{24}^{*} &= S_{15}\exp\left(2m_1\right)+\left(S_{16}+S_{17}+S_{18}\right)\exp\left(2m_2\right)+ \\
&+\left(S_{19}+S_{20}\right)\exp\left(m_1+m_2\right)+GS_{21}\exp\left(m_1\right)+ \\
&+G\left(S_{22}+S_{23}\right)\exp\left(m_2\right)+\frac{G^2}{2\Lambda}.
\end{aligned}
\tag{3.4.23}
$$

Unošenjem pak izraza (3.4.9) za bezdimenzionu uzdužnu brzinu i izraza (3.4.13) za bezdimenzionu magnetnu indukciju indukovanog magnetnog polja u jednačinu (3.4.17) i dvostrukom integracijom tako dobijene jednačine dolazi se, u III slučaju, do rasporeda bezdimenzione temperature:

$$
\begin{aligned}
\theta\left(y^*\right) &= -\Pr Ec[S_{31}\exp\left(2n_1y^*\right)+S_{32}\exp\left(2n_2y^*\right)+ \\
&+S_{33}\exp\left(2n_3y^*\right)+S_{34}\exp\left(\left(n_1+n_2\right)y^*\right)+ \\
&+S_{35}\exp\left(\left(n_1+n_3\right)y^*\right)+S_{36}\exp\left(\left(n_2+n_3\right)y^*\right)+ \\
&+GS_{37}\exp\left(n_1y^*\right)+GS_{38}\exp\left(n_2y^*\right)+ \\
&+GS_{39}\exp\left(n_3y^*\right)+\frac{G^2}{2\Lambda}y^{*2}+G_1y^*+G_2],
\end{aligned}
\tag{3.4.24}
$$

gde su G_1 i G_2 integracione konstante. Ove integracione konstante određuju se korišćenjem graničnih uslova (3.3.17) za bezdimenzionu temperaturu i date su izrazima:

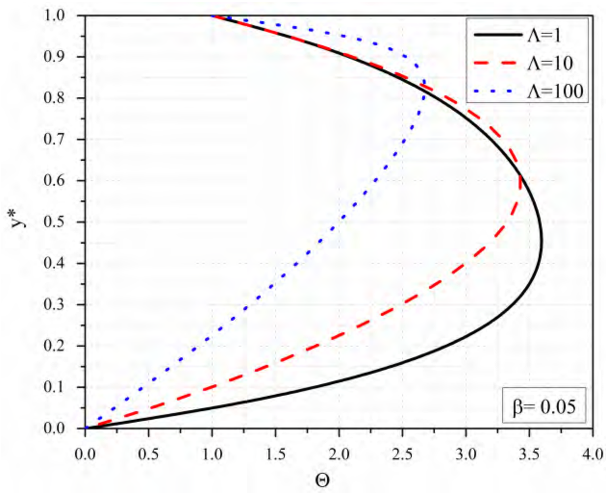
$$
\begin{aligned}
G_2 &= -S_{31}-S_{32}-S_{33}-S_{34}-S_{35}-S_{36}-G(S_{37}+S_{38}+S_{39}), \\
G_1 &= -\frac{1}{\Pr Ec}-G_2-S_{40}^{*},
\end{aligned}
\tag{3.4.25}
$$

gde je uvedena oznaka:

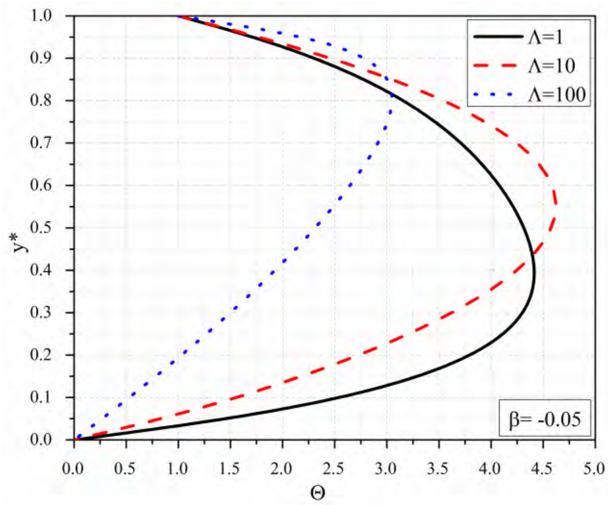
$$
\begin{aligned}
S_{40}^{*} &= S_{31}\exp\left(2n_1\right)+S_{32}\exp\left(2n_2\right)+S_{33}\exp\left(2n_3\right)+ \\
&+S_{34}\exp\left(n_1+n_2\right)+S_{35}\exp\left(n_1+n_3\right)+ \\
&+S_{36}\exp\left(n_2+n_3\right)+GS_{37}\exp\left(n_1\right)+ \\
&+GS_{38}\exp\left(n_2\right)+GS_{39}\exp\left(n_3\right)+\frac{G^2}{2\Lambda}.
\end{aligned}
\tag{3.4.26}
$$

Radi preglednosti i jednostavnije analize različitih uticaja na transport toplote u kanalu deo dobijenih rezultata prikazan je, u obliku grafika, na slikama koje slede.

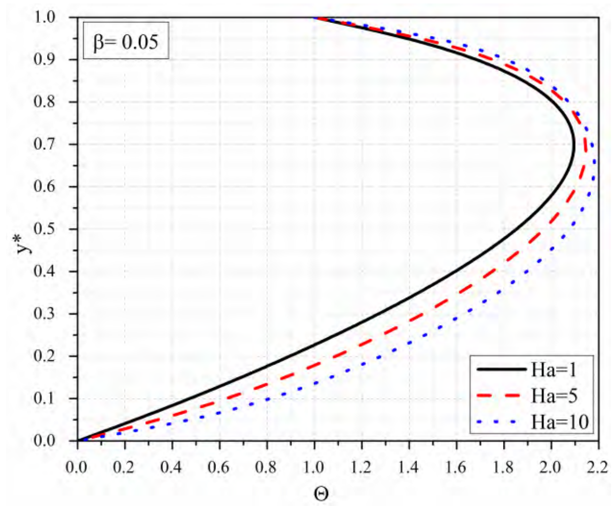
Na slikama 3.39a i 3.39b su predstavljeni rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora poroznosti za slučajeve kada je $\beta > 0$ i $\beta < 0$, respektivno. Sa ovih slika se zapaža da sa povećanjem faktora poroznosti tj. sa smanjenjem propustljivosti kanala temperatura opada u većem delu poprečnog preseka kanala. Ovo se objašnjava činjenicom da se za veće vrednosti faktora poroznosti veći deo toplote u kanalu prostire kondukcijom. Raspored bezdimenzione temperature, već za $\Lambda = 100$, je u većem delu poprečnog preseka, pribliţno prava linija što odgovara čistoj kondukciji u poprečnom pravcu kanala.



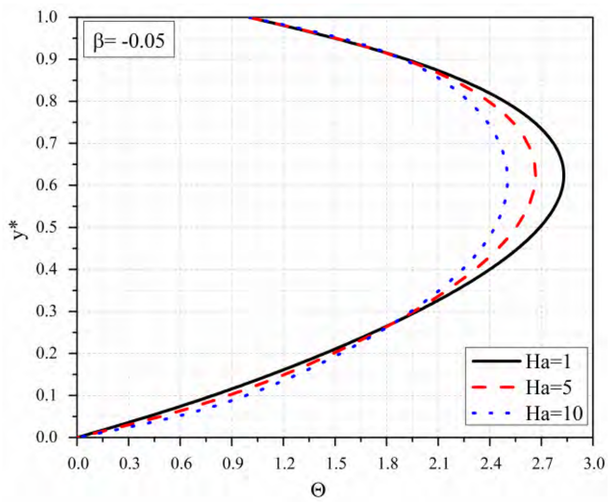
Slika 3.39a Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ, $\beta = 0.05$



Slika 3.39b Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ, $\beta = -0.05$



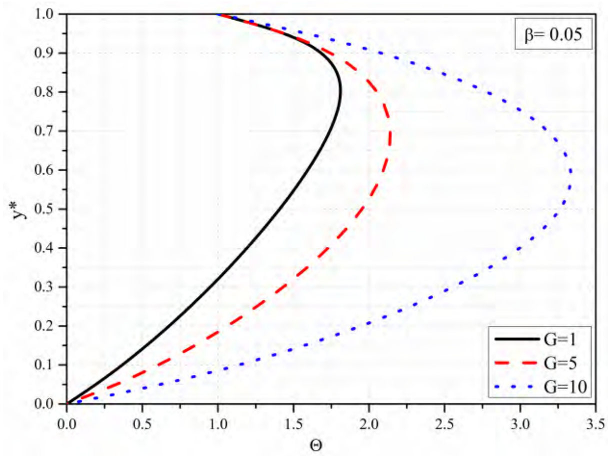
Slika 3.40a Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha, $\beta = 0.05$



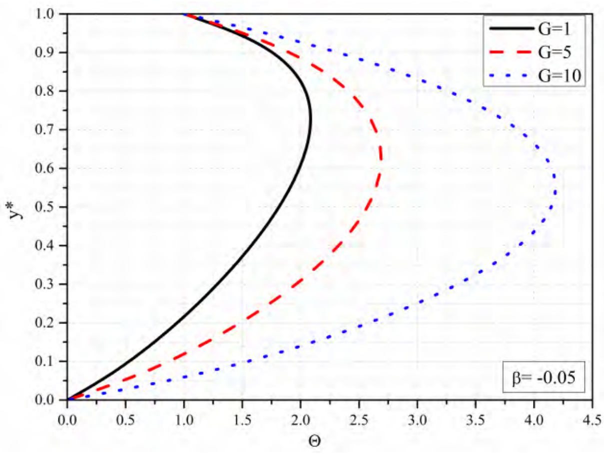
Slika 3.40b Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha, $\beta = -0.05$

Toplotni fluks na gornjem zidu kanala je istog smera kao i y osa, a to znači da se toplota tečnosti transportuje sa tečnosti ka gornjem zidu iako je gornji zid na višoj temperaturi od donjeg. Razlog za ovakvo ponašanje je u tome da je generisanje toplotne energije u kanalu tako veliko da se ova energija ne moţe sva odvesti preko donjeg zida. Poloţaji maksimalnih vrednosti temperature u kanalu su bliţi gornjem zidu za veće vrednosti faktora poroznosti. Udaljenost ovih poloţaja, od gornjeg zida, za istu vrednost Λ, je manja u prvom slučaju (slika 3.39a) nego u drugom (slika 3.39b). Razlog ovome je smer poprečne brzine tečnosti u kanalu, odnosno poloţaj izvora i ponora na zidovima kanala.

Na slikama 3.40a i 3.40b su predstavljeni rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem zidu ponori i za slučaj kada su na gornjem zidu izvori, a na donjem zidu ponori, respektivno. U prvom slučaju se zapaţa da većim vrednostima Ha broja odgovaraju više temperature u kanalu. U drugom slučaju, u donjoj četvrtini kanala većim vrednostima Ha broja odgovaraju više temperature. Ista situacija se zapaţa i u gornjoj desetini kanala, dok, u preostalom delu kanala većim vrednostima Ha broja odgovaraju niţe temperature. U oba slučaja se toplota tečnosti transportuje sa tečnosti ka gornjem zidu kanala iako je gornji zid na višoj temperaturi od donjeg. Naravno, u oba slučaja, toplota tečnosti se transportuje sa tečnosti i na donji zid kanala. Promena vrednosti parametra β menja i indukovano magnetno polje i gustinu struje, te se samim tim menja i doprinos Joule-ove toplote temperaturi fluida.



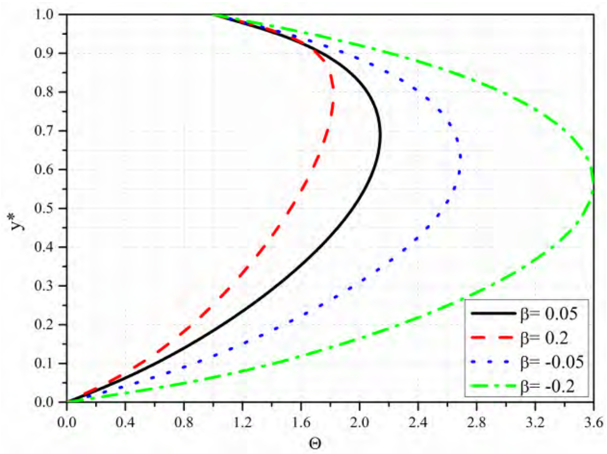
Slika 3.41a Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti G, $\beta = 0.05$



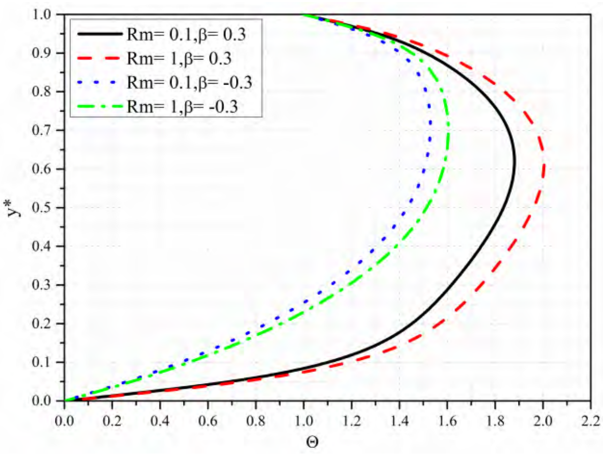
Slika 3.41b Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti G, $\beta = -0.05$

Na slikama 3.41a i 3.41b prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za raličite vrednosti veličine G za slučaj kada je $\beta > 0$ i za slučaj kada je $\beta < 0$ respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da većim vrednostima veličine G tj. kada je dominantno Poiseuille-ovo odgovaraju više temperature tečnosti u kanalu. Usled viskoznog zagrevanja poloţaji maksimalnih temperatura nalaze se u gornjoj polovini kanala gde je ono najveće. Za istu vrednost veličine G poloţaji maksimalnih temperatura su bliţi gornjem zidu u prvom slučaju.

Na slici 3.42 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti parametra β. Sa ove slike se zapaţa, da za slučaj kada su na donjem zidu izvori, a na gornjem zidu ponori, većim vrednostima veličine β odgovaraju niţe temperature tečnosti u kanalu, dok za slučaj kada su na gornjem zidu izvori a na donjem ponori većim vrednostima veličine β odgovaraju više temperature tečnosti u kanalu. Poloţaji maksimalnih temperatura nalaze se u gornjoj polovini kanala. Oni su bliţi gornjem zidu za slučaj $\beta > 0$.



Slika 3.42 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β

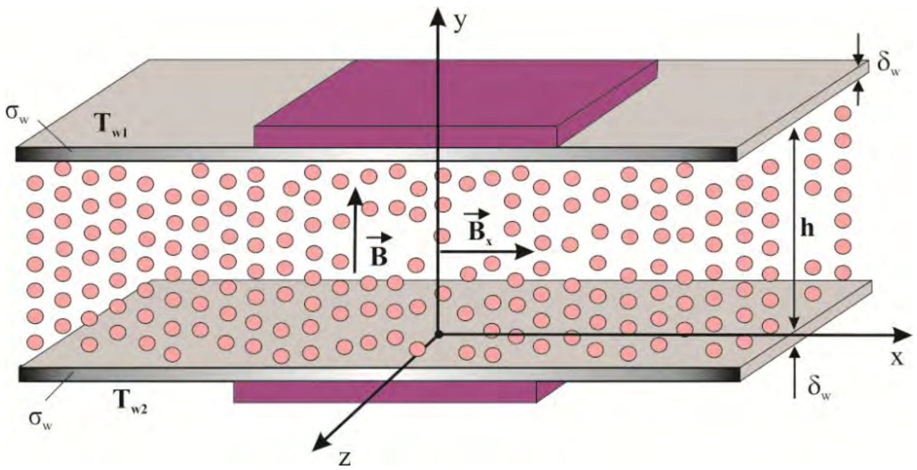


Slika 3.43 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Rm i β

Na slici 3.43 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja za slučaj kada su na donjem zidu kanala izvori, a na gornjem zidu kanala ponori i za slučaj kada su na gornjem zidu izvori, a na donjem zidu ponori. Sa ove slike se zapaţa da, u oba slučaja, većim vrednostima Rm broja odgovaraju više vrednosti temperature tečnosti u kanalu. Poloţaji maksimalnih temperatura nalaze se u gornjoj polovini kanala. Za veće vrednosti Rm broja veća količina toplote se transportuje od tečnosti na gornju ploču, u oba slučaja. Povećanjem Rm broja povećava se uticaj Joule-ove toplote na temperaturu fluida.

3.5 MHD strujanje i prenos toplote između horizontalnih elektroprovodnih ploča sa uticajem indukovanog magnetnog polja

U ovom poglavlju se izučava model strujanja koji je sličan modelu strujanja izučenom u poglavlju 3.3. Jedina razlika izmeĎu ovih modela je u tome što su kod modela u poglavlju 3.3 zidovi kanala elektro-neprovodni, a kod modela koji se izučava u ovom poglavlju zidovi kanala su elektroprovodni. Zato će se, u ovom poglavlju, koristiti sva izvoĎenja koja su učinjena u poglavlju 3.3, a ovde će se samo ukazati na razlike koje postoje i odrediće se veličine koje su posledica tih razlika u cilju kompleksnosti istraţivanja.



Slika 3e Fizički model strujanja

3.5.1 Matematički model

Matematički model ovog strujanja u bezdimenzionom obliku, kao i u poglavlju 3.3, predstavljaju jednačine (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14), (3.3.15) i granični uslovi (3.3.17) za bezdimenzionu brzinu i bezdimenzionu temperaturu, dok se uslovi za bezdimenzionu magnetnu idukciju indukovanog magnetnog polja razlikuju od odgovarajućih uslova (3.3.17) i dati su izrazima:

$$\frac{db}{dy^*}+\frac{1}{c}b=0 \;\text{ za }\; y^*=0,$$
$$\frac{db}{dy^*}-\frac{1}{c}b=0 \;\text{ za }\; y^*=0, \qquad (3.5.1)$$

gde je:

$$c = \frac{\sigma_w \delta_w}{\sigma h}, \tag{3.5.2}$$

a δ_w, σ_w su debljine zidova kanala i njihove elektroprovodnosti respektivno. Zapaţa se da su ziovi kanala jednakih debljina i jednakih elektroprovodnosti.

Iz izraza (3.5.1), za $c = 0$, dobijaju se granični uslovi za slučaj elektro-neprovodnih zidova kanala tj. za problem izučen u poglavlju 3.3, dok se za $c \to \infty$dobijaju granični uslovi za slučaj idealno elektroprovodnih zidova kanala.

Imajući u vidu već rečeno i ovde će se dobiti da su u slučaju I rsporedi bezdimenzione brzine i rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja dati izrazima (3.3.34) u (3.3.45).

Kod ovog modela strujanja integracione konstante treba odrediti jer se one razlikuju od odgovarajućih konstanti kod modela izučenog u poglavlju 3.3. Korišćenjem sada graničnih uslova (3.3.17) za bezdimenzionu brzinu i graničnih uslova (3.5.1) za indukovano magnetno polje i dobija se da su integracione konstante date izrazima:

$$A_3 = \frac{N_{15} - N_{17}}{N_{14} + N_{16}}, \; A_4 = c\left(N_{14} A_3 - N_{15}\right),$$

$$A_2 = -\frac{1}{N_8}\left(L_5 A_3 + N_9\right), \; A_1 = -A_2 - \frac{1}{\Lambda}, \tag{3.5.3}$$

gde su, radi kraćih zapisa, uvedene oznake:

$$N_1 = \left(r_1 - \frac{1}{c}\right) L_1 \exp\left(r_1\right),$$

$$N_2 = \left[\left(-c_2 L_2 + c_1 L_3 - \frac{1}{c} L_3\right)\sin c_2 + \left(c_1 L_2 + c_2 L_3 - \frac{1}{c} L_2\right)\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(c_1\right),$$

$$N_3 = \left\{\left[c_2 L_3 + \left(c_1 - \frac{1}{c}\right) L_2\right]\sin\left(c_2\right) + \left[c_2 L_2 - \left(c_1 - \frac{1}{c}\right) L_3\right]\cos\left(c_2\right)\right\}\exp\left(c_1\right),$$

$$N_4 = \frac{\beta \,\mathrm{Re}}{c\Lambda}, \; N_5 = \left(r_1 + \frac{1}{c}\right) L_1,$$

$$N_6 = c_2 L_3 + \left(c_1 + \frac{1}{c}\right) L_2, \; N_7 = c_2 L_2 - \left(c_1 + \frac{1}{c}\right) L_3,$$

$$N_8 = L_4 - \exp\left(r_1\right), \; N_9 = \frac{1}{\Lambda}\left[1 - \exp\left(r_1\right)\right],$$

$$N_{10} = N_2 - N_1, \; N_{11} = \frac{N_1}{\Lambda} + N_4, \; N_{12} = N_6 - N_5,$$

$$N_{13} = N_4 - \frac{N_5}{\Lambda}, \; N_{14} = N_3 - \frac{N_{10}}{N_8} L_5, \; N_{15} = \frac{N_9 N_{10}}{N_8} + N_{11},$$

$$N_{16}=N_7-\frac{N_{12}}{N_8}L_5\,,\ N_{17}=N_{13}-\frac{N_9N_{12}}{N_8}\,. \tag{3.5.4}$$

Raspored bezdimenzione temperature, kao i kod modela u poglavlju 3.3, dat je izrazom (3.3.55), a inegracione konstante D_1 i D_2 izrazima (3.3.57). Naravno, sada u svim izrazima konstante A_1, A_2, A_3 i A_4 imaju reprezentacije (3.5.3).

U slučaju II, bezdimenziona uzduţna brzina i bezdimenziona magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja, kao i u poglavlju 3.3, date su izrazima (3.3.37) i (3.3.47) respektivno. Integracione konstante B_1 , B_2 , B_3 i B_4 se ovde razlikuju od odgovarajućih konstanti kod modela u poglavlju 3.3. Za odreĎivanje ovih konstanti ovde se koriste granični uslovi (3.3.17) za bezdimenzionu uzduţnu brzinu i granični uslovi (3.5.1) za bezdimenzionu indukciju indukovanog magnetnog polja i dobija se da one imaju sledeće reprezentacije:

$$B_3=\frac{N_{31}-N_{33}}{N_{30}-N_{32}}\,,\ B_4=c\left(N_{32}B_3-N_{33}\right),$$

$$B_2=-\frac{1}{N_{24}}\left[B_3\exp\left(m_2\right)+N_{25}\right],\ B_1=-B_2-\frac{1}{\Lambda}, \tag{3.5.5}$$

u kojima su, radi kraćih zapisa, uvedene oznake:

$$N_{18}=\left(m_1-\frac{1}{c}\right)L_{22}\exp\left(m_1\right),$$

$$N_{19}=\left(m_2-\frac{1}{c}\right)L_{23}\exp\left(m_2\right),$$

$$N_{20}=\left[\left(1+m_2-\frac{1}{c}\right)L_{23}-\left(m_2-\frac{1}{c}\right)L_{24}\right]\exp\left(m_2\right),$$

$$N_{21}=(m_1+\frac{1}{c})\,L_{22}\,,\ N_{22}=(m_2+\frac{1}{c})\,L_{23}\,,$$

$$N_{23}=\left(m_2+\frac{1}{c}\right)L_{24}-L_{23}\,,\ N_{24}=\exp\left(m_2\right)-\exp\left(m_1\right),$$

$$N_{25}=\frac{1}{\Lambda}\left[1-\exp\left(m_1\right)\right],\ N_{26}=N_{19}-N_{18}\,,$$

$$N_{27}=\frac{N_{18}}{\Lambda}+N_4\,,\ N_{28}=N_{22}-N_{21}\,,\ N_{29}=N_4-\frac{N_{21}}{\Lambda}\,,$$

$$N_{30}=N_{20}-\frac{N_{26}}{N_{24}}\exp\left(m_2\right),\ N_{31}=N_{27}+\frac{N_{25}N_{26}}{N_{24}}\,,$$

$$N_{32}=N_{23}+\frac{N_{28}}{N_{24}}\exp\left(m_2\right),\ N_{33}=N_{29}-\frac{N_{25}N_{28}}{N_{24}}\,. \tag{3.5.6}$$

Raspored bezdimenzione temperature, kao i u poglavlju 3.3, dat je izrazom (3.3.59), a integracione konstante F_1 i F_2 imaju reprezentacije (3.3.61). Treba obratiti paţnju da ovde u svim izrazima konstante B_1, B_2, B_3 i B_4 imaju reprezentacije (3.5.5).

U III slučaju, bezdimenziona uzduţna brzina i bezdimenziona magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja, kao i u poglavlju 3.3, date su izrazima (3.3.40) i (3.3.51) respektivno. Integracione konstante C_1, C_2, C_3 i C_4 se ovde razlikuju od odgovarajućih integracionih konstanti datim izrazima (3.3.53) u poglavlju 3.3. Za odreĐivanje ovih integracionih konstanti koriste se granični uslovi (3.3.17) za bezdimenzionu uzduţnu brzinu i granični uslovi (3.5.1) i dobija se da one imaju sledeće reprezentacije:

$$C_1 = \frac{1}{\Lambda}\frac{N_{44} - N_{46}}{N_{43}N_{46} - N_{44}N_{45}},$$

$$C_2 = -\frac{1}{N_{46}}\left(\frac{1}{\Lambda} + N_{45}C_1\right),$$

$$C_3 = -\frac{1}{N_{42}}\left(N_{40}C_1 + N_{41}C_2\right),$$

$$C_4 = -c\left(N_{37}C_1 + N_{38}C_2 + N_{39}C_3 + N_4\right), \tag{3.5.7}$$

u kojima su, radi kraćih zapisa, uvedene oznake:

$$N_{34} = \left(n_1 - \frac{1}{c}\right)L_{33}\exp\left(n_1\right),\ N_{35} = \left(n_2 - \frac{1}{c}\right)L_{34}\exp\left(n_2\right),$$

$$N_{36} = \left(n_3 - \frac{1}{c}\right)L_{35}\exp\left(n_3\right),\ N_{37} = \left(n_1 + \frac{1}{c}\right)L_{33},$$

$$N_{38} = \left(n_2 + \frac{1}{c}\right)L_{34},\ N_{39} = \left(n_3 + \frac{1}{c}\right)L_{35},$$

$$N_{40} = N_{34} + N_{37},\ N_{41} = N_{35} + N_{38},$$

$$N_{42} = N_{36} + N_{39},\ N_{43} = 1 - \frac{N_{40}}{N_{42}},\ N_{44} = 1 - \frac{N_{41}}{N_{42}},$$

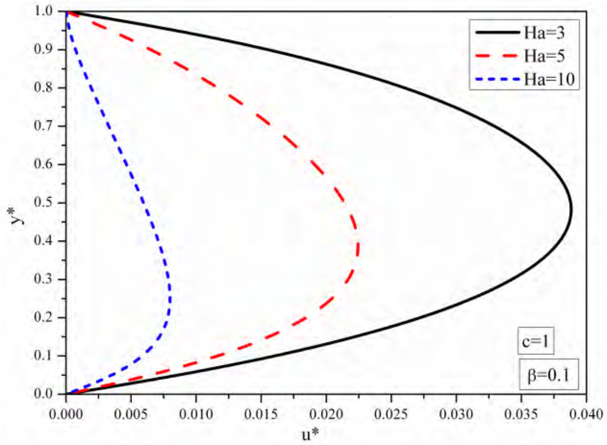
$$N_{45} = \exp\left(n_1\right) - \frac{N_{40}}{N_{42}}\exp\left(n_3\right),$$

$$N_{46} = \exp\left(n_2\right) - \frac{N_{41}}{N_{42}}\exp\left(n_3\right). \tag{3.5.8}$$

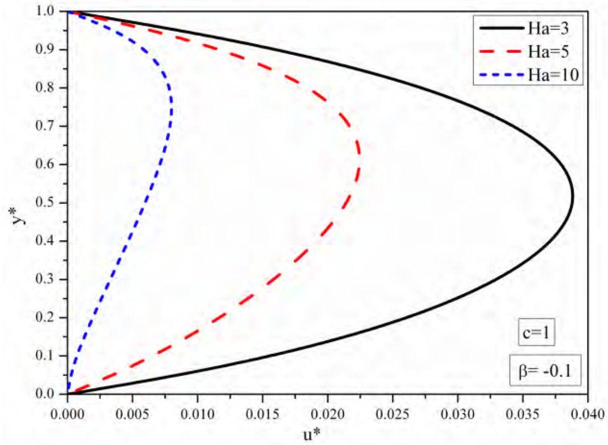
Raspored bezdimenzione temperature, kao i kod modela u poglavlju 3.3, dat je izrazom (3.3.63) a integracione konstante G_1 i G_2 izrazima (3.3.65). Naravno ovde u svim izrazima konstante C_1, C_2, C_3 i C_4 imaju reprezentacije (3.5.7).

3.5.2 Analiza rezultata

Radi preglednosti, jednostavnije analize i donošenja zaključaka deo dobijenih rezultata, u obliku dijagrama, prikazan je na slikama koje slede.



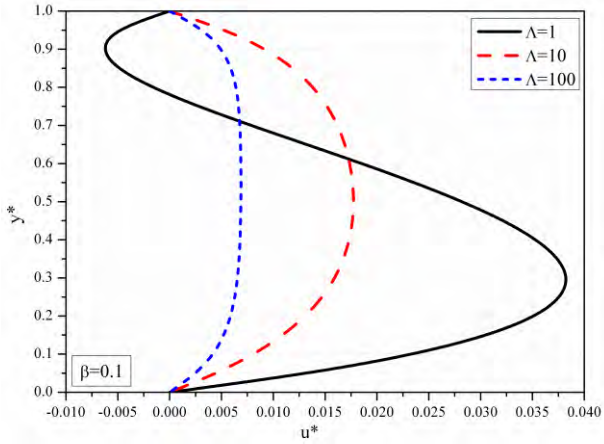
Slika 3.44a Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha, $\beta = 0.1$



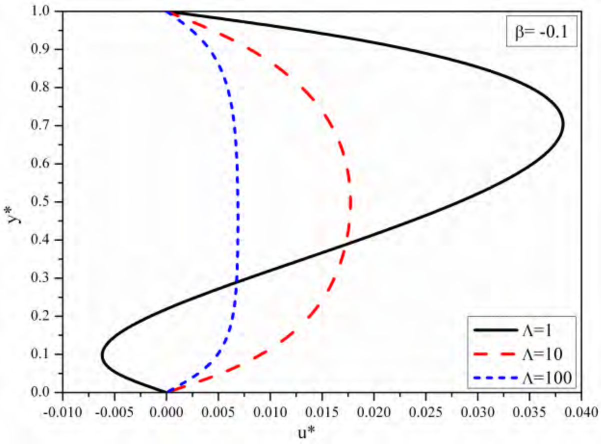
Slika 3.44b Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha, $\beta = -0.1$

Na slikama 3.44a i 3.44b prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine u kanalu elektroprovodnih zidova za različite vrednosti Hartmann-ovog broja i to za slučaj kada su na donjem zidu izvori, a na gornjem zidu ponori, i za slučaj kada su na gornjem zidu kanala izvori, a na donjem zidu ponori, respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da većim vrednostima Ha broja odgovaraju manji intenziteti uzduţne brzine u kanalu i manji tangencijalni naponi na zidovima kanala. Jače spoljašnje primenjeno magnetno polje pomera poloţaje maksimalnih uzduţnih brzina u kanalu ka donjoj ploči u prvom slučaju strujanja, a ka gornjoj ploči u drugom slučaju strujanja. Ovakve tendencije su zapaţene i kada su zidovi kanala elektro neprovodni s tim što je tada bila izraţenija simetrija profila brzine u poprečnom preseku kanala.

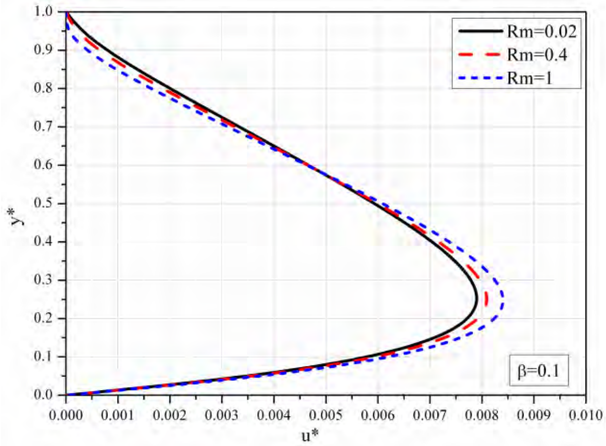
Na slikama 3.45a i 3.45b prikazani su rasporedi uzduţne brzine u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti tj. za različite propustljivosti kanala, a za $\beta = 0.1$ i $\beta = -0.1$. Sa ovih slika se zapaţa da za vrednost faktora poroznosti jednak jedan $(\Lambda = 1)$ tj. za relativno veliku propustljivost kanala uzduţna brzina u delu poprečnog preseka koji je nešto veći od petine poprečnog preseka ima "smer" suprotan od "smera" pada pritiska. U prvom slučaju strujanja ovaj deo je uz gornji zid kanala, a u drugom slučaju je uz donji zid kanala. U preostalom delu poprečnog preseka kanala, za istu vrednost faktora poroznosti, brzina u kanalu ima "smer" pada pritiska. Promene smera strujanja u jenom delu kanala su posledica isisavannja fluida na gornjoj odnosno donjoj ploči pri čemu "gradijent" pritiska u pravcu strujanja nije dovoljno veliki. Većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju manji intenziteti uzduţne brzine u kanalu i dolazi do "poravnanja" profila brzine. Smer uzduţne brzine je isti sa "smerom" pada pritiska u celom poprečnom preseku kanala.



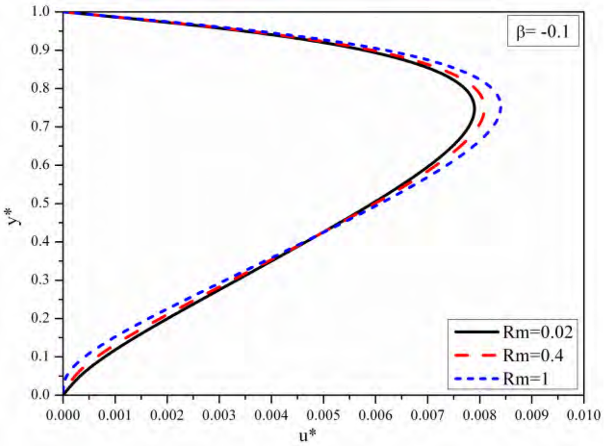
Slika 3.45a Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ, $\beta = 0.1, c = 1$



Slika 3.45b Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ, $\beta = -0.1, c = 1$

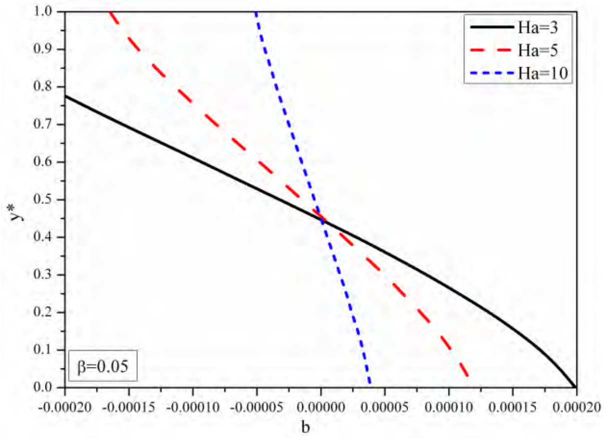


Slika 3.46a Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Rm, $\beta = 0.1, c = 1, Ha = 10$

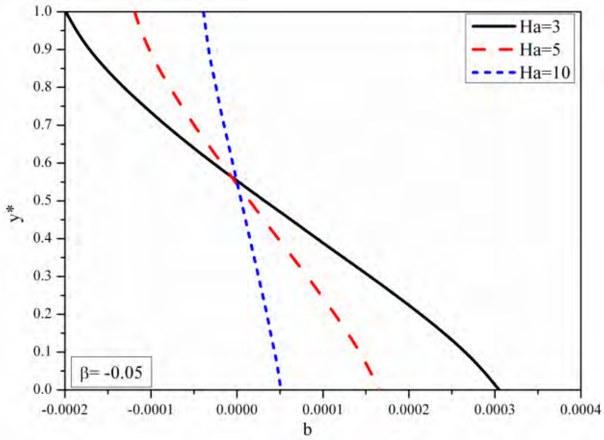


Slika 3.46b Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Rm, $\beta = -0.1, c = 1, Ha = 10$

Na slikama 3.46a i 3.46b prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine za raţličite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja za vrednosti $\beta = 0.1$ i $\beta = -0.1$ respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da u dve petine poprečnog preseka, u prvom slučaju do gornje ploče, a u drugom slučaju do donje ploče, većim vrednostima Rm broja odgovaraju manji intenziteti uzduţne brzine. U ostalom delu poprečnog preseka kanala većim vrednostima Rm broja odgovaraju veći intenziteti brzine, u oba slučaja strujanja. Poloţaji maksimalnih brzina u poprečnom preseku kanala nalaze se u donjoj polovini kanala u prvom slučaju a u gornjoj polovini kanala u drugom slučaju strujanja. Zapaţa se da, za ove vrednosti Rm broja, uticaj Rm broja na brzinu nije posebno značajan.



Slika 3.47a Bezdimenziona indukcija za različite vrednosti Ha, $\beta = 0.05, c = 1$,

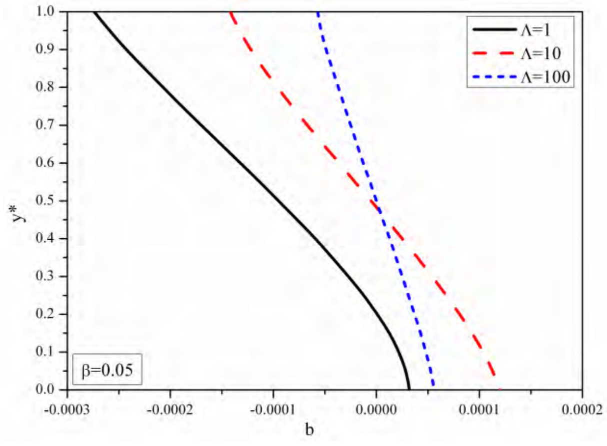


Slika 3.47b Bezdimenziona indukcija za različite vrednosti Ha, $\beta = -0.05, c = 1$

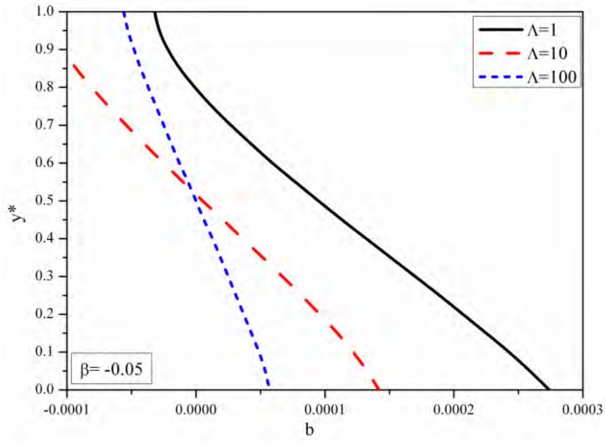
Na slikama 3.47a i 3.47b prikazani su rasporedi bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Hartmann-ovog broja za vrednosti $\beta = 0.05$ i $\beta = -0.05$ respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da većim vrednostima Ha broja odgovara manja jačina indukovanog magnetnog polja u oba slučaja strujanja što je posledica odnosa Ha^2/Rm. U prvom slučaju je, do visine $y^* = 0.45$, smer magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja isti sa smerom osnovne struje u kanalu a odatle pa do gornjeg zida kanala ovaj smer je suprotan smeru osnovne struje u kanalu. U drugom slučaju strujanja je do visine $y^* = 0.55$ smer magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja isti sa smerom osnovne struje, a odatle pa do gornjeg zida kanala ovaj smer je suprotan smeru osnovne struje tečnosti u kanalu. Zbog provodnosti zidova kanala indukovano polje se razlikuje od nule na njima i raste kada Hartmann-ov broj opada.

Na slikama 3.48a i 3.48b predstavljeni su rasporedi bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti faktora poroznosti a za slučajeve $\beta = 0.05$ i $\beta = -0.05$, respektivno.

Sa ovih slika se zapaţa da se za malu vrednost faktora poroznosti $(\Lambda = 1)$ tj. za veliku propustljivost kanala, smer magnetne indukcije poklapa sa "smerom" pada pritiska do visine $y^* = 0.2$, a odatle pa do gornjeg zida je suprotnog smera u prvom slučaju. U drugom slučaju se smerovi poklapaju do $y^* = 0.8$, a odatle pa do gornjeg zida su suprotni.

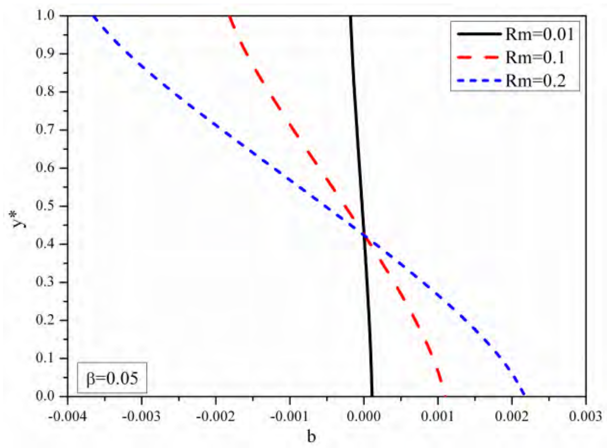


Slika 3.48a Bezdimenziona indukcija za različite vrednosti Λ, $\beta = 0.05, c = 1$

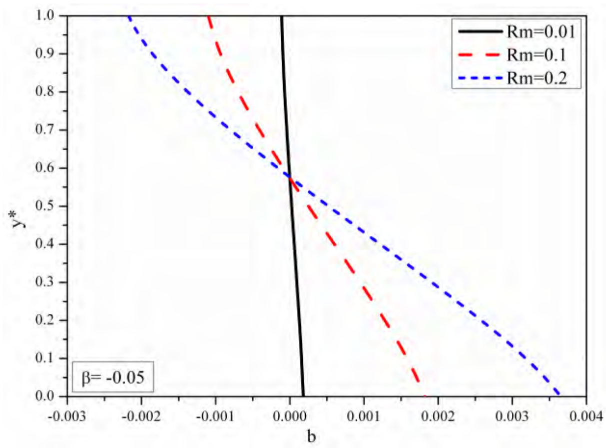


Slika 3.48b Bezdimenziona indukcija za različite vrednosti Λ, $\beta = -0.05, c = 1$

Za veće vrednosti faktora poroznosti ovi smerovi se poklapaju do visine $y^* = 0.48$, a odatle pa do gornjeg zida su suprotni u prvom slučaju, dok se u drugom slučaju poklapaju do $y^* = 0.52$, a odatle pa do gornjeg zida su suprotni. U većem delu poprečnog preseka kanala intenzitet indukcije indukovanog magnetnog polja opada sa porastom faktora poroznosti jer porast faktora poroznosti smanjuje brzinu i samim tim smanjuje intenzitet indukovanog magnetnog polja.



Slika 3.49a Bezdimenziona indukcija za različite vrednosti Rm, $\beta = 0.05, c = 1$

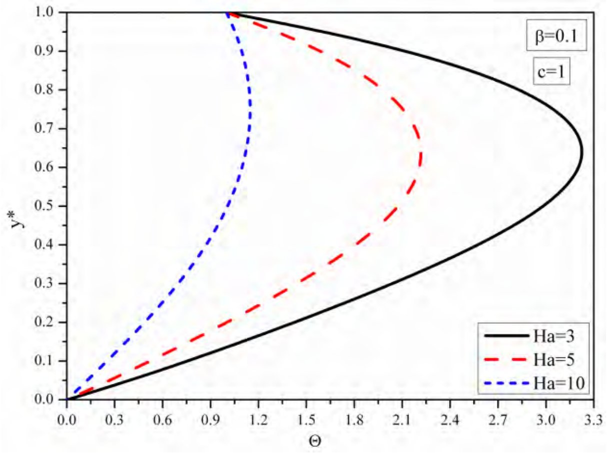


Slika 3.49b Bezdimenziona indukcija za različite vrednosti Rm, $\beta = -0.05, c = 1$

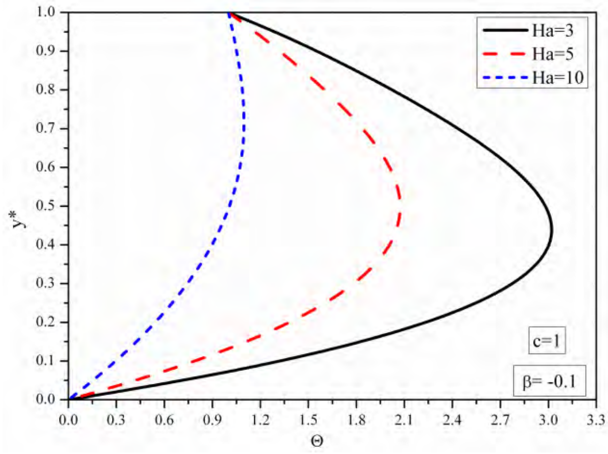
Na slikama 3.49a i 3.49b prikazani su rasporedi bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja za slučajeve $\beta = 0.05$ i $\beta = -0.05$ respektivno. Sa ovih slika se zapaţa da je intenzitet magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja veći za veće vrednosti Rm broja tj. za tečnosti veće elektroprovodnosti. Smer magnetne indukcije je do visine $y^* = 0.43$ isti sa smerom uzduţne brzine tečnosti u kanalu, a odatle pa do gornjeg zida kanala smer magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja je suprotan smeru brzine kretanja tečnosti u kanalu, za prvi slučaj. Za drugi slučaj su do visine $y^* = 0.57$ ovi smerovi isti a odatle pa do gornjeg zida kanala oni su suprotni. Poprečna komponenta brzine menja uzduţnu komponentu brzine, a ona sa druge strane menja indukciju magnetnog polja. Za slučaj male vrednosti Rm što je blisko elektroneprovodnim zidovima kanala intenzitet magnetne indukcije je pribliţno nula.

Na slikama 3.50a i 3.50b prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja za slučaj kada su izvori na donjem zidu kanala a, ponori na gornjem zidu kanala i za slučaj kada su izvori na gornjem zidu, a ponori na donjem zidu kanala respektivno. Zapaţa se da, u oba slučaja, većim vrednostima Hartmann-ovog broja odgovaraju niţe temperature u kanalu. Poloţaji maksimalnih temperatura su bliţi gornjem zidu kanala u prvom slučaju, a u drugom slučaju su bliţi donjem zidu tj. nalaze se u donjoj polovini kanala. U oba slučaja toplota se transportuje na gornji zid sa tečnosti iako je on na višoj temperaturi od donjeg. Razlog za ovokvo ponašanje je u tome da je generisanje toplotne energije prouzrokovano viskoznom disipacijom tako veliko, da se ova energija ne moţe u celom iznosu odvesti preko donjeg zida.

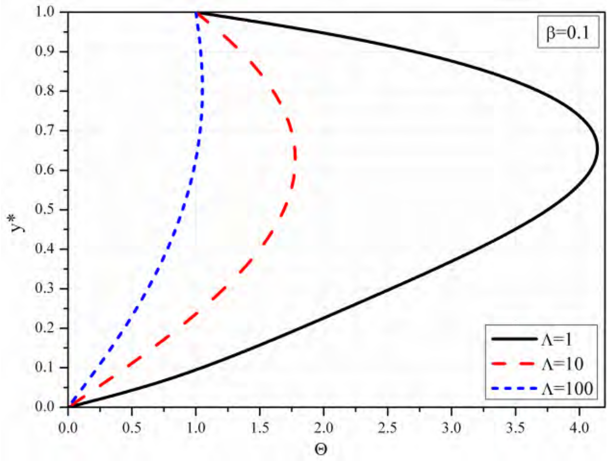
Ovde treba naglasiti da je u slučaju provodnih ploča konačne elektroprovodnosti smanjenje brzine, a onda i protoka sa povećanjem intenziteta spoljašnjeg magnetnog polja veće u odnosu na slučaj neprovodnih ploča. Energija koju treba uloţiti za savladavanje Lorentz-ove sile veća od odgovarajuće energije kada su ploče neprovodne. Deo ove energije se transformiše u toplotnu energiju koja dovodi do više temperature u kanalu od temperature kada su ploče neprovodne.



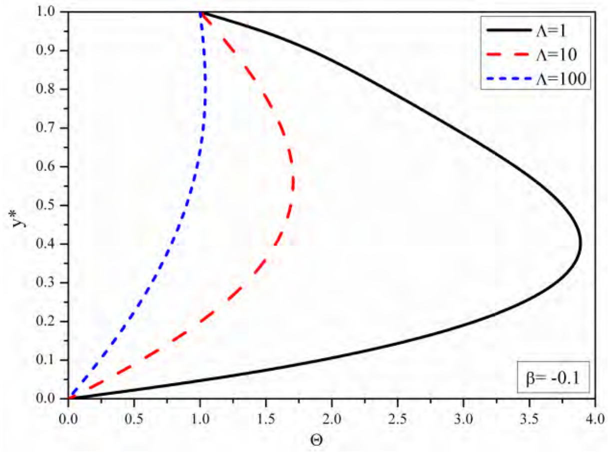
Slika 3.50a Bezdimentiona temperatura za različite vrednosti Ha, $\beta = 0.1$



Slika 3.50b Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha, $\beta = -0.1$



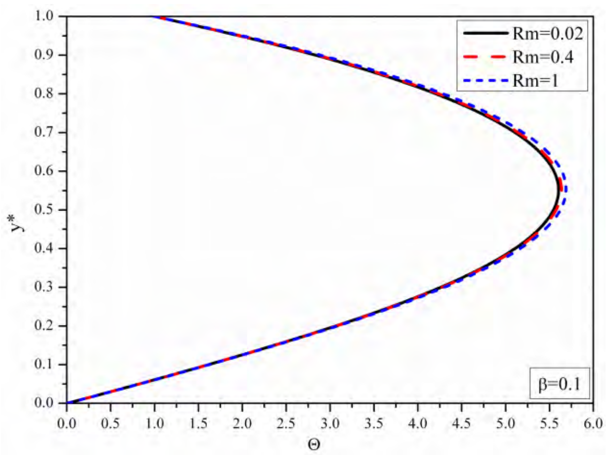
Slika 3.51a Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ, $\beta = 0.1, c = 1$



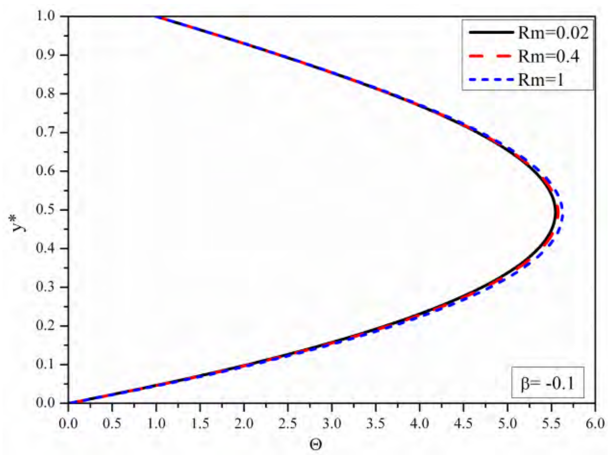
Slika 3.51b Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ, $\beta = -0.1, c = 1$

Na slikama 3.51a i 3.51b prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora poroznosti za slučajeve $\beta = 0.1$ i $\beta = -0.1$. Sa ovih slika se zapaža da većim vrednostima faktora poroznosti odnosno manjim propustljivostima kanala odgovaraju niže temperature u kanalu. Položaji maksimalnih temperatura u kanalu bliži su gornjem zidu u prvom slučaju, a donjem zidu u drugom slučaju. U oba slučaja, za sve vrednosti Λ date na slikama postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid. Za $\Lambda = 100$ se transportuje vrlo mala količina toplote sa tečnosti na gornji zid kanala.

I ovde treba naglasiti da je temperatura u kanalu u slučaju elektroprovodnih ploča viša od odgovarajuće temperature kada su ploče neprovodne.



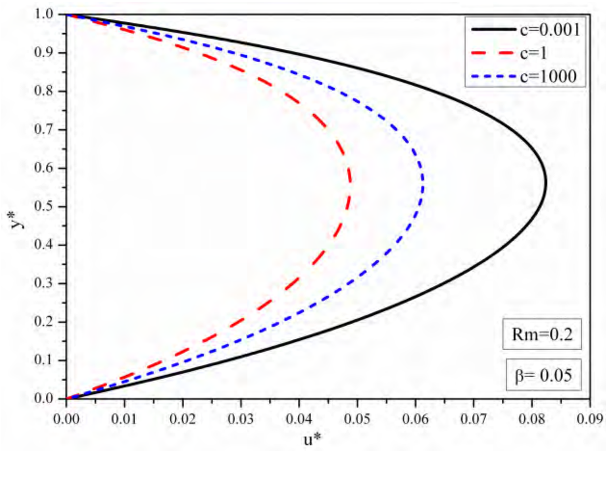
Slika 3.52a Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Rm, $\beta = 0.1, c = 1$



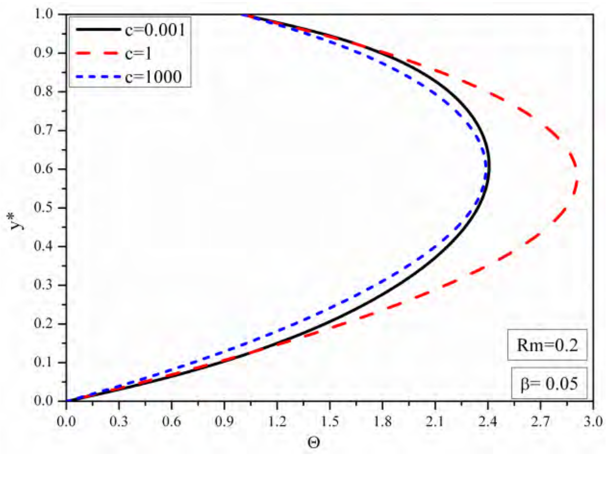
Slika 3.52b Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Rm, $\beta = -0.1, c = 1$

Na slikama 3.52a i 3.52b prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Reynolds-ovog magnetnog broja za slučajeve $\beta = 0.1$ i $\beta = -0.1$ respektivno. Zapaža se da, u oba slučaja, većim vrednostima Rm broja odgovaraju više temperature u kanalu. Zapaţa se da taj uticaj nije veliki. Za sve vrednosti Rm broja za koje su rezultati prikazani na slikama postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala, pored transporta na donji zid koji postoji u svim slučajevima. Poloţaji maksimalnih temperatura u kanalu su iznad sredine kanala u prvom slučaju a ispod sredine kanala u drugom slučaju što je posledica izvora i ponora na pločama. U ovom slučaju, kada su zidovi elektro provodni brzina je mnogo manja od brzine kada su zidovi neprovodni. Temperatura u kanalu je za slučaj elektroprovodnih zidova znatno viša od temperature u kanalu kada su zidovi neprovodni jer se deo energije za savladavanje Lorentz-ove sile transformiše u toplotnu energiju.

Na slici 3.53 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine tečnosti u kanalu za različite vrednosti veličine c, a za $\beta = 0.05$. Vrednost $c = 0.001$ odgovara vrlo maloj elektroprovodnosti zidova kanala dok vrednost $c = 1000$ odgovara skoro idealnoj provodnosti zidova. Sa ove slike se zapaţa da je brzina u kanalu najveća kada su zidovi kanala male provodnosti (ili neprovodni), zatim u kanalu sa idealno provodnim zidovima, a najmanja je u kanalu sa zidovima konačne provodnosti. Ovakve tendencije zapaţene su i za vrednosti β koje su različite od $\beta = 0.05$. Povećanjem odnosa c indukovano magnetno polje ulazi i uzidove kanala i smanjuje se njegov uticaj na fluid, pa brzina usled spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja opada.

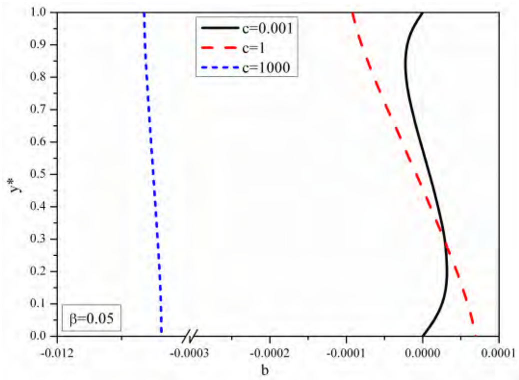


Slika 3.53 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti c, $\beta = 0.05$



Slika 3.54 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti c, $\beta = 0.05$

Na slici 3.54 su predstavljeni rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti veličine c, koje odgovaraju kanalu čiji su zidovi male elektroprovodnosti, konačne elektroprovodnosti i idealno provodni. Zapaţa se da je, pri istim uslovima, temperatura tečnosti najniţa u kanalu čiji su zidovi idealno provodni, a najviša u kanalu čiji su zidovi konačne elektroprovodnosti. Ovi zaključci vaţe i za vrednosti $\beta \neq 0.05$. Ovakav raspored temperature moţe se opravdati činjenicom da u energijskoj jednačini temperatura zavisi od Joule-ove toplote koja je funkcija kvadrata "gradijenta" indukovanog magnetnog polja. Za ovde dobijene rezultate indukovano magnetno polje je skoro homogeno sa malim "gradijentom" u pravcu y ose, koji je upravo najmanji za slučaj ideano elektroprovodnih zidova.



Slika 3.55 Bezdimenziona magnetna indukcija
za različite vrednosti c, $\beta = 0.05$

Na slici 3.55 prikazani su rasporedi bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti c, a za $\beta = 0.05$. Zapaţa se da je za kanal čiji su zidovi slabo provodni indukovano magnetno polje do visine kanala $y^* = 0.6$ istog smera kao i osnovna struja, a odatle pa do gornjeg zida je suprotnog smera. Za slučaj kanala čiji su zidovi konačne provodnosti raspored indukovanog magnetnog polja malo odstupa od linearnog, a ovo polje je do $y^* = 0.45$ istog smera sa smerom osnovne struje, a odatle pa do gorjeg zida je suprotnog smera. Za kanal čiji su zidovi idealne elektroprovodnosti indukovano magnetno polje je homogeno, a suprotnog je smera od smera osnovne struje tečnosti.

3.6 Zaključak poglavlja

Prvi deo zaključka odnosi se na kanal elektroneprovodnih zidova i probleme razmatrane u bezindukcionoj aproksimaciji. U ovom delu daju se prvo zaključci kada su zidovi kanala nepokretni a zatim kada je gornji zid kanala pokretan.

Zapaţa se da povećanje intenziteta primenjenog magnetnog polja dovodi do smanjenja brzine strujanja tečnosti, a samim tim i do smanjenja protoka u kanalu. Povećanje intenziteta spoljašnjeg magnetnog polja smanjuje tangencijalne napone na zidovima kanala. Temperatura u kanalu se intenzivnije menja u okolini njegoih zidova za slabija spoljašnja polja. Temperatura u kanalu i specifični toplotni fluks na njegovim zidovima opadaju sa povećanjem jačine spoljašnjeg polja.

Poloţaj izvora odnosno ponora na zidovima utiče na raspored brzine u kanalu. U okolini zida na kome su ponori intenzivnija je promena brzine, a samim tim veći tangencijalni napon na tom zidu. Veće vrednosti faktora β dovode do sniţenja temperature u kanalu.

Veće vrednosti faktora poroznosti kanala dovode do smanjenja brzine i sniţenja temperature u kanalu, smanjenja tangencijalnih napona i specifičnog toplotnog fluksa na zidovima kanala.

Promena smera primenjenog električnog polja moţe dovesti do promene smera strujanja u kanalu. Raspored temperature u kanalu je, za reţim kratkog spoja linearna funkcija rastojanja od zida, za slučaj praznog hoda temperatura u kanalu je viša od temperature u slučaju kratkog spoja.

Kada je gornji zid kanala pokretan, većim vrednostima Ha broja odgovaraju manje brzine i protoci, a više temperature u kanalu, manji tangencijalni naponi na nepokretnom zidu, a veći na pokretnom zidu, i veći specifični toplotni fluksevi na pokretnom zidu a manji na nepokretnom zidu.

Većim vrednostima faktora β odgovaraju manje brzine, a više temperature u kanalu, veći tangencijalni naponi i specifični toplotni fluksevi na pokretnom zidu, a manji na nepokretnom zidu za slučaj da su na nepokretnom zidu izvori. Za slučaj kada su na na pokretnom zidu izvori onda je situacija obrnuta.

Većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju manje brzine i niţe temperature u kanalu, veći tangencijalni naponi i specifični toplotni fluksevi na pokretnom zidu, a manji na nepokretnom zidu.

Za reţim praznog hoda i kratkog spoja brzine imaju isti smer sa smerom brzine pokretnog zida, dok je za vrednost faktora opterećenja $K = 1$ smer brzine na delu kanala isti sa smerom brzine pokretnog zida, a na delu suprotan. Temperatura u kanalu je najniţa za reţim kratkog spoja, a viša za reţim praznog hoda i za $K = 1$.

Zaključci koji dalje slede odnose se na strujanje tečnosti u kanalu kada se u razmatranje uzima i indukovano magnetno polje. U početku se daju zaključci za kanal nepokretnih zidova. Rast Ha broja dovodi do smanjenja uzduţne brzine tečnosti u kanalu i do "poravnanja" profila brzine, smanjenja tangencijalnih napona na zidovima kanala, sniţenja temperature u kanalu i slabljenja magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u kanalu.

Da ne bi bilo zabune, naglašava se da manji tangencijalni naponi i manje brzine odgovaraju slučaju kada je $\partial p/\partial x = 0$ isto tj. ne odrţava se isti protok u kanalu.

Rast faktora poroznosti dovodi do smanjenja uzduţne brzine tečnosti u kanalu i do "poravnanja" profila brzine, smanjenja tangencijalnih napona na zidovima kanala, sniţenja temperature u kanalu, smanjenja specifičnog toplotnog fluksa na zidovima kanala, smanjenja magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja.

Rast Rm broja dovodi do povećanja uzduţne brzine u kanalu i tangencijalnih napona na zidovima kanala, viših temperatura u kanalu i većim toplotnim fluksevima na zidovima kanala, povećanja intenziteta magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja.

Sa rastom apsolutne vrednosti faktora β rastu intenzitet uzduţne brzine u kanalu, temperatura u kanalu i intenzitet magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja.

Zaključci koji slede odnose se na kanal čiji je gornji zid pokretan.

Većim vrednostima Ha broja odgovaraju, u većem delu poprečnog preseka kanala, veći intenziteti uzduţne brzine tečnosti u kanalu, više temperature za $\beta > 0$ i u većem delu niţe temperature za $\beta < 0$ i manji intenziteti magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja.

Sa povećanjem faktora poroznosti smanjuje se brzina tečnosti u kanalu, opada temperatura, u većem delu kanala, smanjuje se intenzitet indukcije indukovanog magnetnog polja za $\beta > 0$, dok za $\beta < 0$ indukovano magnetno polje moţe da menja svoj smer za maje vrednosti Λ, a za veće vrednosti Λ je istog smera kao i u slučaju $\beta > 0$.

Većim vrednostima Rm broja odgovaraju veće uzduţne brzine tečnosti u kanalu, tangencijalni naponi u zidovima su skoro nepromenjeni, više su temperature tečnosti u kanalu i veći intenziteti magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja.

Većim vrednostima veličine G tj. kada je dominantno Poiseuille-ovo strujanje, odgovaraju veće vrednosti uzduţne brzine u kanalu, više temperature tečnosti u kanalu, i intenzivnija indukovana magnetna polja u većem delu poprečnog preseka kanala.

Za slučaj $\beta > 0$ većim vrednostima β odgovaraju manje brzine u kanalu, jača magnetna polja i niţe temperature tečnosti u kanalu. Za slučaj $\beta < 0$ većim apsolutnim vrednostima β odgovaraju veće uzduţne brzine tečnosti u kanalu, jača magnetna polja i više temperature tečnosti u kanalu.

Zaključci koji slede odnose se na kanal nepokretnih elektroprovodnih zidova. Razmatrani su zidovi vrlo male elektroprovodnosti tj. skoro neprovodni, zatim zidovi konačne elektroprovodnosti i na kraju, zidovi vrlo velike elektroprovodnosti odnosno idealne elektroprovodnosti.

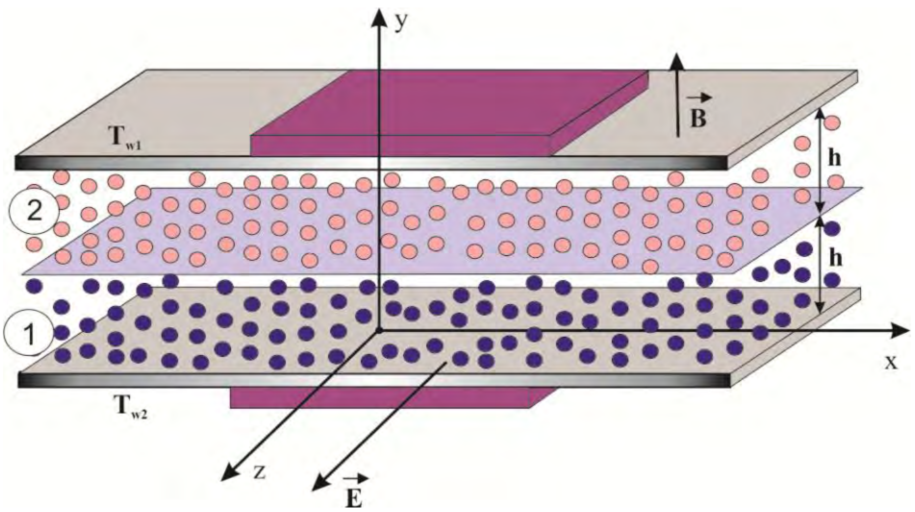
Kod kanala čiji su zidovi male elektroprovodnosti (neprovodni) brzina tečnosti je najveća, temperatura srednja i indukovano magnetno polje najslabije u većem delu poprečnog preseka kanala. Za kanal velike elektroprovodnosti (idealno provodnih) zidova brzina tečnosti je srednja, temperatura najniţa a indukovano magnetno polje najjače. Za kanal zidova konačne elektroprovodnosti brzina tečnosti je najmanja, temperatura tečnosti u kanalu najviša, a indukovano magnetno polje srednje u većem delu poprečnog preseka kanala.

Poglavlje 4

4. Poiseeule-Couette-ovo MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u poroznoj sredini

4.1 Poiseeule-ovo MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u poroznoj sredini

U ovom delu rada se izučava bezindukciono magnetno-hidrodinamičko strujanje u kanalu koji se formira sa dve horizontalne nepokretne ploče. Na kanal i fluid u njemu deluju spoljašnja homogena polja i to magnetno $\vec{B}$ koje je upravno na ploče, a za odabrani koordinatni sistem je pravca i smera kao i y osa, i električno polje koje je pravca i smera z ose. Kanal je od poroznog materijala, a dozvoljena je mogućnost da donja i gornja polovina kanala budu različitih propustljivosti i da u njima struje različiti fluidi. Zidovi kanala odrţavaju se na različitim temperaturama i to: donji na temperaturi T_{w2} i gornji na temperaturi T_{w1}. Razmatra se jedan opšti problem koji omogućava više različitih mogućnosti i što se tiče samog kanala, a i fluida koji struji u njemu. Za razliku od do sada u ovom radu izučavanih problema, ovde se na zidovima kanala ne nalaze izvori (ponori).



Slika 4a Fizički model strujanja

4.1.1 Matematički model

Ponavljajući analizu koja je sprovedena u delu 3.1 ovog rada istovremeno za oba fluida (obe polovine kanala) dolazi se do jednačina:

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x}+\mu_i\frac{d^2u_i}{dy^2}-\varepsilon_i\frac{\mu_i}{K_i^*}u_i-B\left(\sigma_iE_z+\sigma_iBu_i\right)=0, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial y}=0, \tag{4.1.2}$$

$$k_i\frac{d^2T_i}{dy_i^2}+\mu_i\left(\frac{du_i}{dy}\right)^2+\varepsilon_i\frac{\mu_i}{K_i^*}u_i^2+\sigma_i\left(E_z+Bu_i\right)^2=0, \tag{4.1.3}$$

gde je:

$\varepsilon_i=1$ ako je sredina porozna i $\varepsilon_i=0$ ako je sredina "slobodna" (4.1.4)

i graničnih uslova

$$u_1\left(-h\right)=0\,,\ u_1\left(0\right)=u_2\left(0\right),\ u_2\left(h\right)=0\,,$$

$$\mu_1\frac{du_1}{dy}=\mu_2\frac{du_2}{dy}\ \text{ za }\ y=0\,,$$

$$T_1\left(-h\right)=T_{w2}\,,\ T_1\left(0\right)=T_2\left(0\right),\ T_2\left(h\right)=T_{w1}\,,$$

$$k_1\frac{dT_1}{dy}=k_2\frac{dT_2}{dy}\ \text{ za }\ y=0\,. \tag{4.1.5}$$

Jednačine (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) i granični uslovi (4.1.5) predstavljaju matematički model problema strujanja i prenosa toplote koji se izučava u ovom delu disertacije. Ovaj matematički model je opšti i pruţa mogućnost izučavanja različitih slučajeva kao što su: obe polovine "slobodne", jedna "slobodna" a druga porozna, obe porozne istih i različitih propustljivosti, različitih fluida, itd.

Za dalje izučavanje ovog problema, kako je to raĎeno i u delu 3.1 ovog rada, jednačine (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) i granični uslovi (4.1.5) svode se na bezdimenzione oblike i u tom cilju se uvode bezdimenzione veličine

$$y^*=\frac{y}{h},\ u_i^*=\frac{u_i}{U},\ \Theta_i=\frac{T_i-T_{w2}}{T_{w1}-T_{w2}}, \tag{4.1.6}$$

gde su:

$$P=-\frac{\partial p}{\partial x}=\text{const}\,,\ U=\frac{h^2P}{\mu_1} \tag{4.1.7}$$

Koristeći uvedene bezdimenzione veličine (4.1.6) jednačine (4.1.1) se transformišu na bezdimenzioni oblik

$$\frac{d^2u_i^*}{dy^{*2}}-\left(\varepsilon_i\Lambda_i+Ha_i^2\right)u_i^*+\gamma_i-KHa_i^2=0, \tag{4.1.8}$$

u kome su uvedene oznake:

$$\Lambda_i = \frac{h^2}{K_i^*}, \quad Ha_i^2 = B^2h^2\frac{\sigma_i}{\mu_i}, \quad K = \frac{E_z}{BU}, \quad \gamma_i = \frac{\mu_1}{\mu_i}. \tag{4.1.8-a}$$

Na isti način jednačina (4.1.3) u bezdimenzionom obliku glasi:

$$\frac{d^2\Theta_i}{dy^{*2}} + Pr_i\, Ec_i\left[\left(\frac{du_i^*}{dy^*}\right)^2 + \varepsilon_i\Lambda_i u_i^{*2} + Ha_i^2\left(K + u_i^*\right)^2\right] = 0, \tag{4.1.9}$$

gde su:

$$Pr_i = \frac{\mu_i c_{pi}}{k_i}, \quad Ec_i = \frac{U^2}{c_{pi}\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}. \tag{4.1.10}$$

Jednačina (4.1.2) u bezdimenzionom obliku moţe se zapisati kao:

$$\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{p_i}{hP}\right) = 0, \tag{4.1.11}$$

a mogući su i drugačiji zapisi. Granični uslovi (4.1.5) u bezdimenzionom obliku su

$$u_1^*(-1) = 0, \;\; u_1^*(0) = u_2^*(0), \;\; u_2^*(1) = 0,$$

$$\gamma_2\frac{du_1^*}{dy^*} = \frac{du_2^*}{dy^*} \;\; \text{za} \;\; y^* = 0,$$

$$\Theta_1(-1) = 0, \;\; \Theta_1(0) = \Theta_2(0), \;\; \Theta_2(1) = 1,$$

$$\delta\frac{d\Theta_1}{dy^*} = \frac{d\Theta_2}{dy^*} \quad \text{za} \;\; y^* = 0, \tag{4.1.12}$$

gde je:

$$\delta = \frac{k_1}{k_2}. \tag{4.1.12 a}$$

Jednačine (4.1.8), (4.1.9), (4.1.11) i granični uslovi (4.1.12) predstavljaju matematički model opisanog strujanja fluida i prenosa toplote u bezdimenzionom obliku.

4.1.2 Rasporedi brzine, temperature i pritiska u kanalu

Za odreĎivanje rasporeda brzine, temperature i pritiska u kanalu neophodno je rešiti jednačine (4.1.8), (4.1.9), (4.1.11) sa graničnim uslovima (4.1.12) i sa graničnim uslovima za pritisak koje treba propisati.

Prvo se rešava jednačina (4.1.8). U tom cilju prelazi se na njen kraći zapis:

$$\frac{d^2u_i^*}{dy^{*2}} - \omega_i^2 u_i^* = KHa_i^2 - \gamma_i, \tag{4.1.13}$$

gde je uvedena oznaka:

$$\omega_i^2 = \varepsilon_i \Lambda_i + Ha_i^2. \tag{4.1.13 a}$$

Rešenja karakterističnih jednačina odgovarajućih homogenih jednačina, jednačina (4.1.13) su:

$$r_i = \pm\omega_i, \quad i = 1,2. \tag{4.1.14}$$

Rešenja odgovarajućih homogenih jednačina su:

$$u_{hi}^*\left(y^*\right) = A_i \exp\left(\omega_i y^*\right) + B_i \exp\left(-\omega_i y^*\right), \tag{4.1.15}$$

gde su A_i i B_i integracione konstante.

Pretpostavljajući partikularna rešenja jednačina (4.1.13) u obliku konstanti dobija se da su ona data izrazima:

$$u_{pi}^* = \frac{\gamma_i - KHa_i^*}{\omega_i^2} = \Omega_i, \quad i = 1,2. \tag{4.1.16}$$

Onda je raspored brzine u kanalu dat izrazom:

$$u_i^*\left(y^*\right) = A_i \exp\left(\omega_i y^*\right) + B_i \exp\left(-\omega_i y^*\right) + \Omega_i. \tag{4.1.17}$$

Zapaţa se da je za donju polovinu kanala $-1 \le y^* \le 0$, dok za gornju vaţi $0 \le y^* \le 1$. Izraz (4.1.17), za raspored bezdimenzione brzine tečnosti u kanalu, vaţi za sve napred pomenute slučajeve opisanog problema.

Koristeći granične uslove (4.1.12) za brzinu dobija se da integracionim konstantama odgovaraju sledeći izrazi:

$$A_2 = -\frac{R_1 R_6 + R_3 R_4}{R_1 R_5 + R_2 R_4}, \; B_2 = -A_2 \exp\left(2\omega_2\right) - \Omega_2 \exp\left(\omega_2\right),$$

$$B_1 = \frac{R_2}{R_1} A_2 + \frac{R_3}{R_1}, \; A_1 = -B_1 \exp\left(2\omega_1\right) - \Omega_1 \exp\left(\omega_1\right), \tag{4.1.18}$$

u kojima su, radi kraćih zapisa, uvedene oznake:

$$R_1 = 1 - \exp\left(2\omega_1\right),$$

$$R_2 = 1 - \exp\left(2\omega_2\right),$$

$$R_3 = \Omega_2\left[1 - \exp\left(\omega_2\right)\right] - \Omega_1\left[1 - \exp\left(\omega_1\right)\right],$$

$$R_4 = \gamma_2 \omega_1\left[1 + \exp\left(2\omega_1\right)\right],$$

$$R_5 = \omega_2\left[1 + \exp\left(2\omega_2\right)\right],$$

$$R_6 = \gamma_2 \omega_1 \Omega_1 \exp\left(\omega_1\right) + \omega_2 \Omega_2 \exp\left(\omega_2\right). \tag{4.1.19}$$

Za odreĐivanje rasporeda temperature neophodno je rešiti jednačinu (4.1.9) sa graničnim uslovima (4.1.12). U tom cilju se prethodno dobijen raspored brzine (4.1.17) unese u jednačine (4.1.9) i posle dvostruke integracije dobija se da je raspored temperature u kanalu dat izrazima:

$$\begin{gathered}\Theta_i\left(y^*\right)=-\Pr_i \mathrm{Ec}_i\{\frac{1}{2}A_i^2\exp\left(2\omega_i y^*\right)+\frac{1}{2}B_i^2\exp\left(-2\omega_i y^*\right)+\\+L_i\exp\left(\omega_i y^*\right)+M_i\exp\left(-\omega_i y^*\right)+N_i y^{*2}+C_i y^*+D_i\},\end{gathered}\tag{4.1.20}$$

u kojima su radi kraćih zapisa uvedene oznake:

$$L_i=\frac{2A_i}{\omega_i^2}\left(\Omega_i\omega_i^2+QHa_i^2\right),$$

$$M_i=\frac{2B_i}{\omega_i^2}\left(\Omega_i\omega_i^2+QHa_i^2\right),$$

$$N_i=\frac{1}{2}\left[\Omega_i\left(\Omega_i\omega_i^2+2QHa_i^2\right)+Q^2Ha_i^2\right],\tag{4.1.21}$$

a C_i i D_i su integracione konstante u kojima su:

$$R_7=\frac{1}{2}A_1^2\exp\left(-2\omega_1\right)+\frac{1}{2}B_1^2\exp\left(2\omega_1\right)+L_1\exp\left(-\omega_1\right)+M_1\exp\left(\omega_1\right)+N_1,$$

$$R_8=\frac{\Pr_2 \mathrm{Ec}_2}{\Pr_1 \mathrm{Ec}_1},$$

$$R_9=\frac{\Pr_2 \mathrm{Ec}_2}{\Pr_1 \mathrm{Ec}_1}\left(\frac{1}{2}A_2^2+\frac{1}{2}B_2^2+L_2+M_2\right)-\frac{1}{2}A_1^2-\frac{1}{2}B_1^2-L_1-M_1,$$

$$R_{10}=\frac{1}{2}A_2^2\exp\left(2\omega_2\right)+\frac{1}{2}B_2^2\exp\left(-2\omega_2\right)+L_2\exp\left(\omega_2\right)+M_2\exp\left(-\omega_2\right)+N_2,$$

$$R_{11}=\frac{1}{\Pr_2 \mathrm{Ec}_2}+R_{10},$$

$$R_{12}=\frac{1}{\delta}\frac{\Pr_2 \mathrm{Ec}_2}{\Pr_1 \mathrm{Ec}_1},$$

$$R_{13}=\frac{\omega_2}{\delta}\frac{\Pr_2 \mathrm{Ec}_2}{\Pr_1 \mathrm{Ec}_1}\left(A_2^2-B_2^2+L_2-M_2\right)-\omega_1\left(A_1^2-B_1^2+L_1-M_1\right).\tag{4.1.23}$$

Korišćenjem graničnih uslova (4.1.12) za temperaturu dobija se da su integracione konstante date izrazima:

$$D_2=\frac{R_{13}-R_7-R_9-R_{11}R_{12}}{R_8+R_{12}},$$

$$C_2=-D_2-R_{11},$$

$$C_1=R_{12}C_2+R_{13},$$

$$D_1 = C_1 - R_7. \tag{4.1.22}$$

Integracijom jednačine (4.1.11) dobija se da je raspored pritiska:

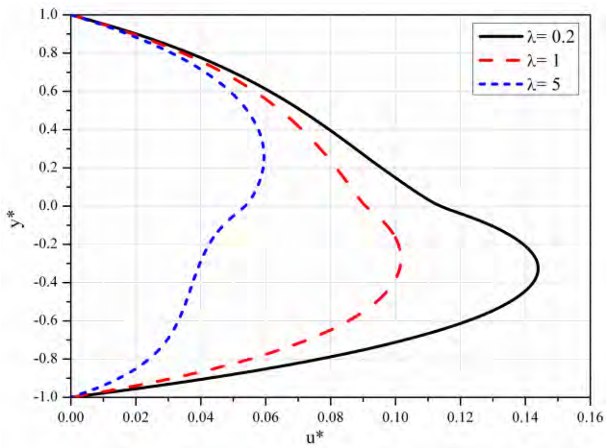
$$\frac{p_i}{hP} = -\frac{x}{h} + E_i, \tag{4.1.24}$$

gde su E_i integracione konstante. Ako je, naprimer, za $x = 0$ pritisak $p = p_0$ onda se dobija da je raspored pritiska dat izrazom:

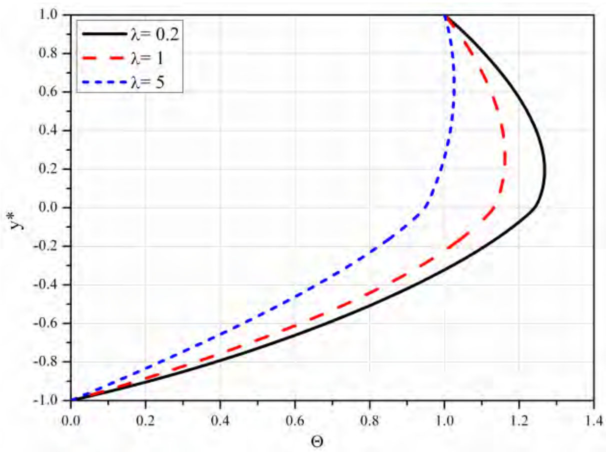
$$\frac{p_i}{hP} = \frac{p_0}{hP} - \frac{x}{h}. \tag{4.1.25}$$

4.1.3 Analiza rezultata

Radi preglednosti, jednostavnije analize i izvoĎenja zaključaka deo dobijenih rezultata prikazan je, u obliku dijagrama, na slikama koje slede. Tako su na slikama 4.1 i 4.2 prikazani bezdimenzioni rasporedi brzine u kanalu i bezdimenzione temperature u kanalu, respektivno. Kanal je porozan, a poroznost gornje polovine kanala je nepromenjena dok se poroznost donje polovine kanala moţe menjati. U gornjoj polovini kanala je tečnost koja je viskoznija, veće toplotne poroznosti i manje elektroprovodnosti od tečnosti u donjoj polovini kanala. Kanal je u reţimu kratkog spoja $(E = 0 \Rightarrow K = 0)$.



Slika 4.1 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti odnosa parametra poroznosti λ

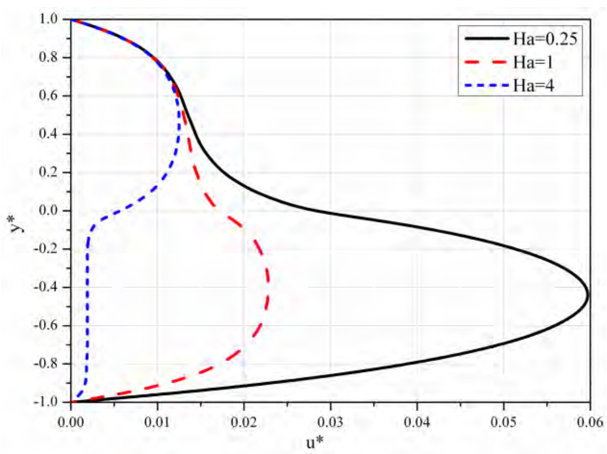


Slika 4.2 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti odnosa parametra pozoznosti λ

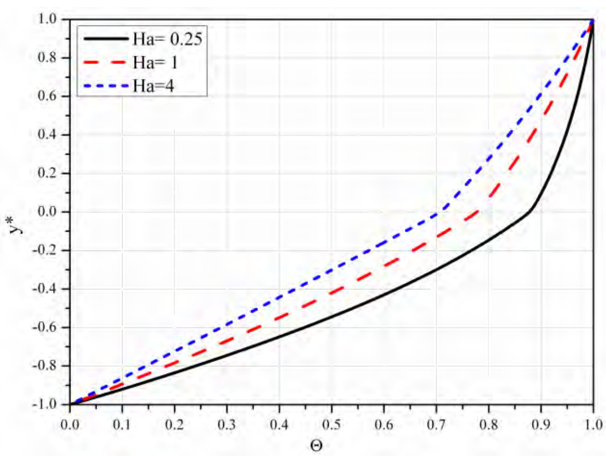
Zbog jednostavnije analize na slikama je korišćena oznaka $\lambda = \Lambda_1/\Lambda_2$.

Sa slike 4.1 se zapaţa da je za slučaj kanala koji je iste poroznosti $(\lambda = 1)$ brzina veća u donjoj polovini kanala. Razlog ovakvog odnosa brzina je u tome što je u donjoj polovini kanala fluid manje viskoznosti. U slučaju kanala kod koga je donja polovina propustljivija $(\lambda = 0.2)$ dolazi do uvećanja brzine fluida u donjoj polovini kanala i zbog veće propustljivosti tog dela kanala i zbog manje viskoznosti tečnosti u tom delu kanala. Za slučaj kada je donja polovina kanala manje propustljivosti od gornje $(\lambda = 5)$ dolazi do smanjenja brzine u tom delu kanala. Razlog za ovako dobijen raspored brzine je u činjenici što je smanjenje brzine zbog pet puta smanjene poroznosti veće od povećanja brzine zbog manje viskoznosti fluida u tom delu kanala. Tangencijalni naponi na zidovima kanala se smanjuju sa povećanjem vrednosti λ tj. veći su za slučaj kada je donja polovina kanala veće propustljivosti, a manji kada je ona manje propustljivosti. Poloţaji maksimalnih brzina su za $\lambda = 0.2$ i $\lambda = 1$ u donjoj polovini kanala, a za $\lambda = 5$ u gornjoj polovini kanala.

Sa slike 4.2 se zaključuje da je, za slučaj kada je donja polovina kanala veće propustljivosti od gornje polovine, temperatura u kanalu viša u odnosu na temperaturu kada je ceo kanal iste propustljivosti $(\lambda = 1)$. Za slučaj kada je donja polovina kanala manje propustljivosti $(\lambda = 5)$ temperatura u kanalu je niţa od temperature kada je kanal iste propustljivosti $(\lambda = 1)$. Sa povećanjem veličine λ tj. sa smanjenjem propustljivosti donje polovine kanala smanjuje se količina toplote koja se sa tečnosti transportuje na gornji zid kanala. Pri odreĎenoj maloj propustljivosti donje polovine kanala moţe i da ne postoji transport toplote od tečnosti na gornji zid kanala, a i da se toplota transportuje sa gornjeg zida na tečnost. Sa povećanjem vrednosti λ povećava se količina toplote koja se prenosi kondukcijom, posebno u donjoj polovini kanala.



Slika 4.3 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti Ha



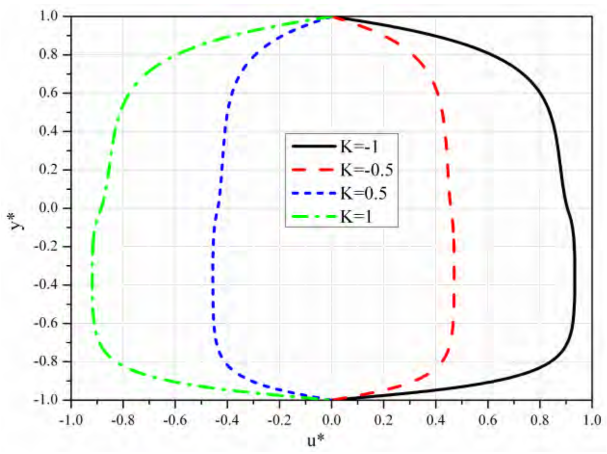
Slika 4.4 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Ha

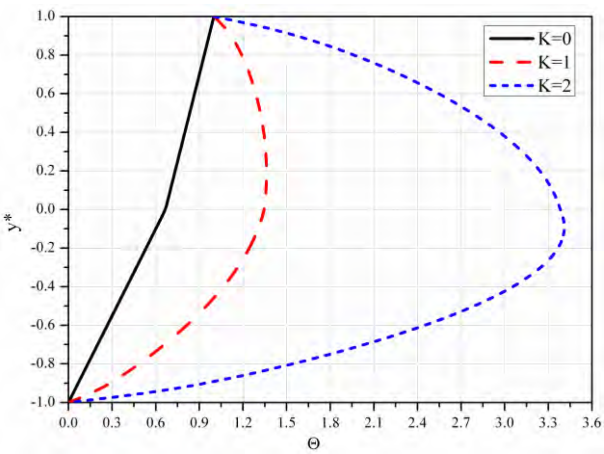
Na slikama 4.3 i 4.4 prikazani su grafici rasporeda bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva $\left(\mathrm{Ha}=\mathrm{Ha}_1/\mathrm{Ha}_2\right)$. Kanal je porozan s tim što je donja polovina kanala manje propustljivosti $(\lambda=2)$. U gornjoj polovini kanala nalazi se viskozniji fluid $(\gamma_2=0.5)$. Fluid u gornjoj polovini kanala ima konstantnu elektroprovodnost, a u donjoj polovini kanala se mogu nalaziti fluidi različitih elektroprovodnosti u različitim slučajevima. Ovim različitim slučajevima odgovaraju različite vrednosti veličine Ha tj. odnosa Hartmann-ovih brojeva.

Sa slike 4.3 se zaključuje da sa porastom veličine Ha tj. sa porastom elektroprovodnosti tečnosti u donjoj polovini kanala opada brzina u kanalu. Za veliku provodnost tečnosti u donjoj polovini kanala brzina tečnosti u tom delu kanala postaje sasvim mala. Brzina tečnosti sa promenom Ha se intenzivno menja u okolini donjeg zida dok je u okolini gornjeg zida skoro nepromenjena. Sa povećanjem vrednosti Ha tangencijalni napon na donjem zidu kanala opada, dok je na gornjem zidu skoro nepromenjen. Za slučajeve kada su elektroprovodnosti fluida koji se nalaze u donjoj polovini kanala manje od elektroprovodnosti fluida koji se nalazi u gornjoj polovini kanala ($\mathrm{Ha}=0.25$ i $\mathrm{Ha}=1$) ogovarajuće brzine u donjoj polovini kanala su veće od brzina u gornjoj polovini kanala. Za slučaj kada je elektroprovodnost fluida koji se nalazi u donjoj polovini kanala veća od elektroprovodnosti fluida koji se nalazi u gornjoj polovini kanala ($\mathrm{Ha}=4$) onda je brzina u donjoj polovini kanala manja od brzine u gornjoj polovini kanala.

Sa slike 4.4 se zaključuje da sa porastom vrednosti Ha tj. sa porastom elektroprovodnosti fluida u donjoj polovini kanala dolazi do snițenja temperature u kanalu. Sa porastom ove vrednosti raste i količina toplote koja se prostire kondukcijom. U ovim slučajevima nema transporta toplote sa tečnosti na gornji zid kanala već obrnuto sa gornjeg zida na tečnost. Transportovana količina toplote sa gornjeg zida na tečnost je veća za veće vrednosti veličine Ha.

Na slikama 4.5 i 4.6 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora spoljašnjeg električng opterećenja. Fluid u donjoj polovini kanala je manje viskozosti, veće elektroprovodnosti i manje toplotne provodnosti u odnosu na odgovarajuće veličine fluida koji se nalazi u gornjoj polovini kanala. Donja povolina kanala je manje propustljivosti od gornje polovine kanala.





Slika 4.5 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti K

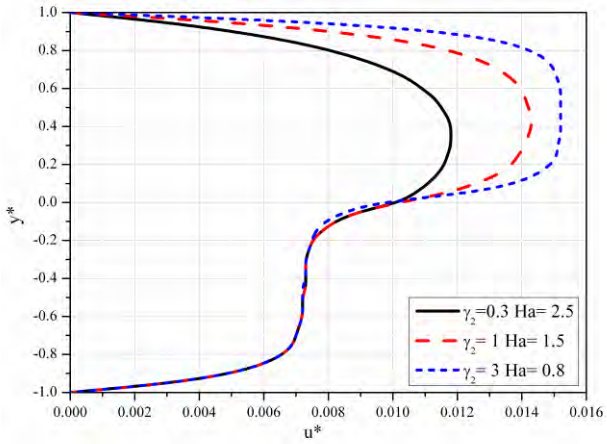
Slika 4.6 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K

Sa slike 4.5 se zapaţa da je za $K < 0$ smer brzine u kanalu isti sa smerom pada pritiska, dok je za $K > 0$ on suprotan. Dakle, promena znaka veličine K tj. promena smera spoljašnjeg električnog polja dovodi do promene smera brzine tečnosti u kanalu. Brzine u kanalu su manje u reţimu generatora od brzina tečnosti u kanalu u reţimu praznog hoda. Za veće vrednosti $|K|$ veći su i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Brzine u donjoj polovini kanala veće su od odgovarajućih brzina u gornjoj polovini kanala. U većem delu donje polovine kanala brzine se malo menjaju.

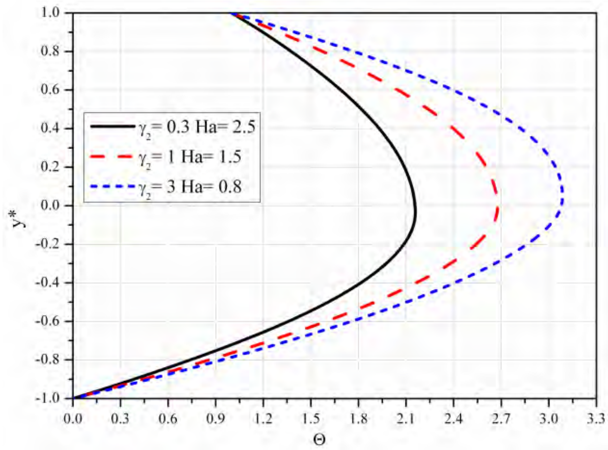
Sa slike 4.6 se zaključuje da je u slučaju reţima kratkog spoja $(K = 0)$ dominantno prostiranje toplote kondukcijom i da su temperature u gornjoj polovini kanala više od temperatura u donjoj polovini kanala. Sa porastom veličine K raste temperatura u kanalu i povećava se količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid, osim za slučaj $K = 0$ kada nema transporta toplote sa tečnosti na gornji zid već obrnuto. Intenzivniji je rast temperature u okolini donjeg zida nego u okolini gornjeg zida.

Na slikama 4.7 i 4.8 predstavljeni su bezdimenzioni rasporedi brzine i temperature u kanalu za različite vrednosti odnosa koeficijenata dinamičkih viskoznosti tečnosti u donjoj i gornjoj polovini kanala tj. veličine γ_2. Kanal je porozan tako da mu je donja polovina manje propustljivosti od gornje polovine. U donjoj polovini kanala nalazi se tečnost stalne viskoznosti, veće elektroprovodnosti, a manje toplotne provodnosti od tečnosti u gornjoj polovini kanala. Kanal je u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 4.7 se zaključuje da je brzina tečnosti u kanalu istog smera sa smerom pada pritiska u kanalu. Sa promenom dinamičke viskoznosti tečnosti u gornjoj polovini kanala tj. sa promenom veličine γ_2 brzina u donjoj polovini kanala skoro da se i ne menja kao i tangencijalni napon na donjem zidu kanala. U gornjoj polovini kanala sa porastom veličine γ_2 raste brzina tečnosti u kanalu i tangencijalni napon na gornjem zidu kanala. Razlozi za ovakve rasporede brzine leţe u činjenicama da je za $\gamma_2 > 1$ u gornjoj polovini kanala fluid manje viskoznosti, pri čemu je gornja polovina kanala dva puta propustljivija od donje.

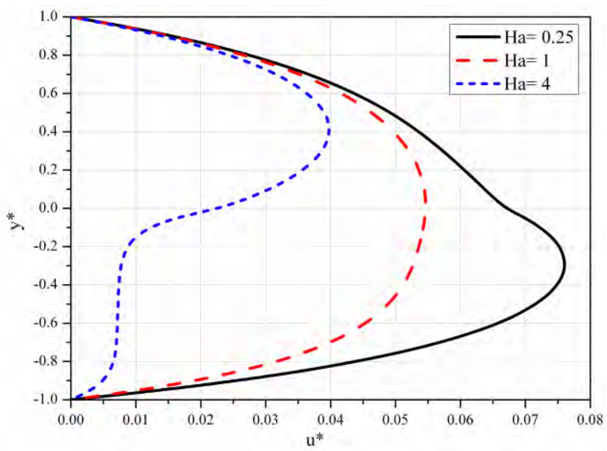


Slika 4.7 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti odnosa viskoznosti γ_2

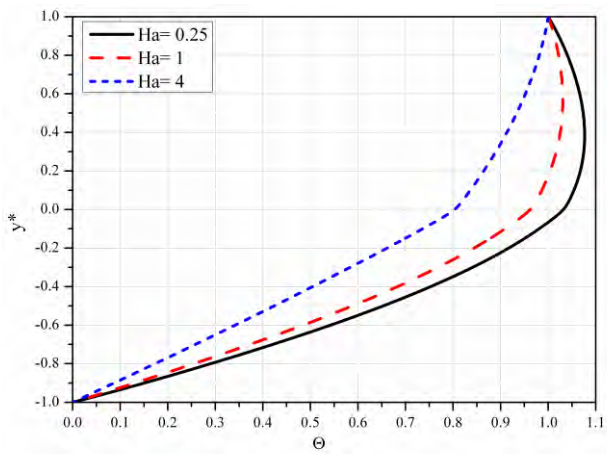


Slika 4.8 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti odnosa viskoznosti γ_2

Sa slike 4.8 se zaključuje da sa porastom veličine γ_2 tj. sa smanjenjem dinamičke viskoznosti u gornjoj polovini kanala raste temperatura u kanalu. Maksimalne temperature su u okolini sredine kanala. Količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid raste sa porastom veličine γ_2.



Slika 4.9 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti parametra Ha



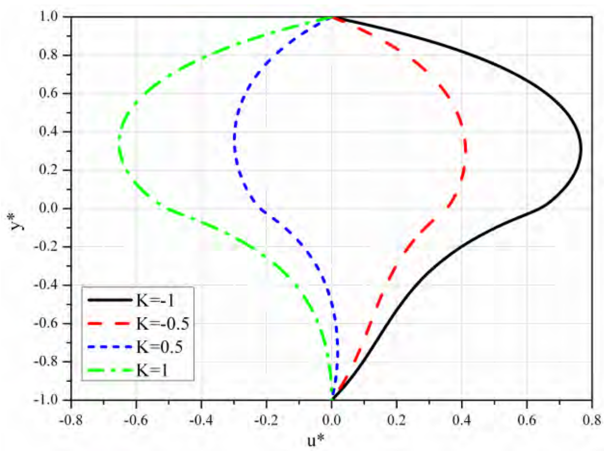
Slika 4.10 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti parametra Ha

Na slikama 4.9 i 4.10 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti veličine Ha respektivno. Donja polovina kanala je porozna, a gornja polovina je "slobodna". Tečnost u donjoj polovini kanala je manje toplotne provodnosti od toplotne provodnosti tečnosti u gornjoj polovini kanala.

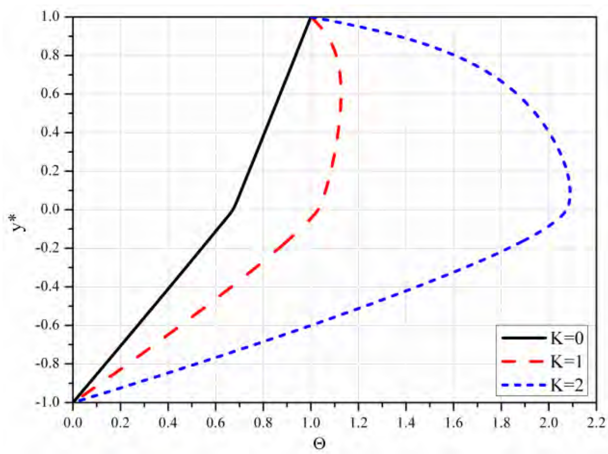
Elektroprovodnost tečnosti u gornjoj polovini kanala je stalna dok elektroprovodnost tečnosti u donjoj polovini kanala moţe biti različita.

Sa slike 4.9 se zapaţa da sa povećanjem veličine Ha tj. sa povećanjem magnetnog polja tečnosti u donjoj polovini kanala opada brzina tečnosti u kanalu. Tangencijalni napon na donjem zidu kanala se smanjuje, dok je na gornjem zidu skoro nepromenjen. Za velike vrednosti veličine Ha brzina kretanja tečnosti u donjoj polovini kanala moţe biti vrlo mala tj. strujanje se moţe skoro zaustaviti. Za vrednosti $\mathrm{Ha}<1$ maksimalne brzine su u donjoj polovini kanala, a za $\mathrm{Ha}>1$ u gornjoj polovini kanala.

Sa slike 4.10 se zaključuje da sa porastom veličine Ha temperatura u kanalu opada i opada i količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid kanala. Za velike vrednosti Ha je transport toplote sa gornjeg zida na tečnost. Sa smanjenjem veličine Ha smanjuje se i viskozna disipacija u okolini zidova kanala izraţena promena brzine. Za velike vrednosti Ha u donjoj polovini kanala se toplota uglavnom prostire kondukcijom. Više temperature su u gornjoj polovini kanala.



Slika 4.11 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti K



Slika 4.12 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K

Na slikama 4.11 i 4.12 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti faktora spoljašnjeg električnog opterećenja, respektivno. Gornja polovina kanala je "slobodna", a donja porozna. Tečnost u gornjoj polovini kanala je veće elektroprovonosti, veće viskoznosti, veće toplotne provodnosti i većeg Hartmann-ovog broja u odnosu na tečnost u donjoj polovini kanala.

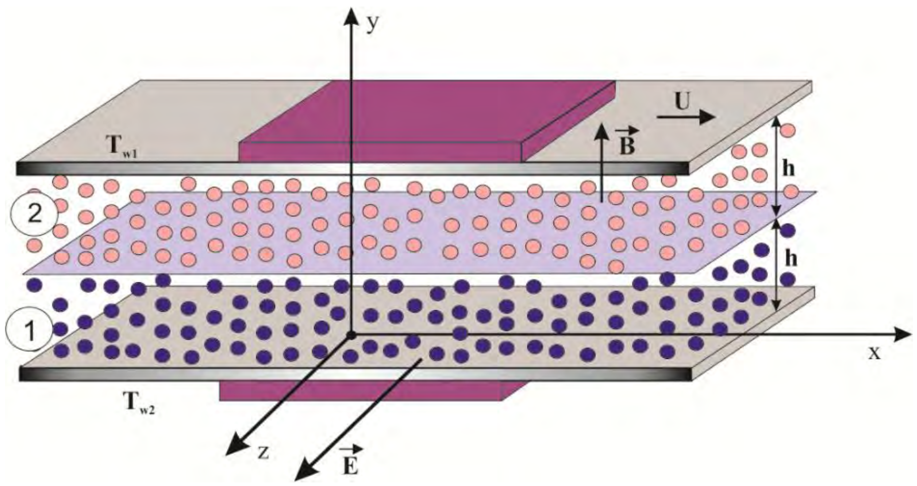
Sa slike 4.11 se zaključuje da se sa promenom znaka veličine K tj. sa promenom smera spoljašnjeg primenjenog električnog polja menja smer brzine strujanja tečnosti u kanalu što predstavlja jedno od glavnih preimućstva MHD pumpi. Sa povećanjem $|K|$

povećava se brzina tečnosti u kanalu i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala.

Sa slike 4.12 se zaključuje da je za slučaj reţ ima kratkog spoja prostiranje toplote u kanalu uglavnom kondukcijom. Za slučaj reţ ima praznog hoda u donjoj polovini kanala prostiranje toplote je uglavnom kondukcijom. Sa porastom veličine K raste temperatura u kanalu. Više su temperature u gornjoj polovini kanala. Za $K > 0$ toplota se transportuje sa tečnosti na gornji zid kanala i raste sa porastom K. Za $K = 0$ transport toplote je sa gornjeg zida na tečnost.

4.2 Poiseeule-Couette-ovo MHD strujanje dva fluida i prenos toplote u poroznoj sredini u horizontalnom kanalu

U ovom delu rada se razmatra strujanje dva fluida koji se ne mešaju u poroznoj sredini. Zidovi kanala su horizontalni na nepromenjenom meĐusobnomrastojanju koje iznosi 2h. Donji zid kanala je nepokretan, a gornji zid kanala kreće se paralelno donjem zidu brzinom intenziteta U. Sredina je porozna je porozna, a donja i gornja polovina kanala mogu biti različitih propustljivosti. Razmatra se slučaj koji će obuhvatiti i jednu i drugu situaciju. Tečnosti u kanalu su, u opštem slučaju, elektroprovodne. Kanal se nalazi u homogenom magnetnom polju koje je upravno na zidove kanala, a čija indukcija ima intenzitet B. Na kanal deluje i homogeno električno polje čiji je intenzitet Ez, a pravac mu je upravan na ravan uzduţ nog preseka kanala. Temperature zidova kanala su konstantne i različite.



Slika 4b Fizički model strujanja

4.2.1 Matematički model

Da bi se došlo do matematičkog modela opisanog problema strujanja polazi se, kao i u prethodnom poglavljima, od jednačine kontinuiteta za nestišljiv fluid, Navier-Stokes-ove jednačine za poroznu sredinu, jednačine energije, kao i Ohm-ovog zakona. Sprovodeći analizu i uprošćenje pomenutih jednačina, kao i u prethodnim poglavljima, dolazi se do toga da matematički model opisanog problema predstavljaju iste jednačine kao i u prethodnom poglavlju koje su označene sa (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) i sledeći granični uslovi:

$$u_1(-h)=0,\ \ u_1(0)=u_2(0),\ \ u_2(h)=U,$$

$$\mu_1\frac{du_1}{dy}=\mu_2\frac{du_2}{dy}\ \ \text{za}\ \ y=0,$$

$$T_1(-h)=T_{w2},\ T_1(0)=T_2(0),\ T_2(h)=T_{w1},$$

$$k_1\frac{dT_1}{dy}=k_2\frac{dT_2}{dy}\ \ \text{za}\ \ y=0. \tag{4.2.1}$$

Zapaţa se da su ovi granični uslovi različiti od graničnih uslova problema izučenog u poglavlju 4.1 i to samo za brzinu na gornjem zidu kanala. Kod prethodnog problema ova brzina je bila jednaka nuli jer je zid kanala nepokretan a kod ovog problema ona je jednaka brzini gornjeg zida kanala koji se kreće brzinom čiji je intenzitet U.

Za dalju analizu opisanog problem ovaj matematički model se transformiše na bezdimenzioni matematički model. U tom cilju uvode se bezdimenzione veličine date izrazima (4.1.6), gde je sada, za razliku od problema izučenog u prethodnom poglvlju, U veličina koja predstavlja intenzitet brzine kretanja gornjeg zida kanala, a ne veličina data izrazom (4.1.7), kako je to bilo u prethodnom poglavlju. I ovde se smatra da je pad pritiska u pravcu ose x, po jedinici duţine kanala konstantan.

Korišćenjem uvedenih bezdimenzionih veličina datih izrazima (4.1.6) jednačinu (4.1.1) moguće je transformisati na sledeći bezdimenzioni oblik:

$$\frac{d^2u_i^*}{dy^{*2}}-\left(\varepsilon_i\Lambda_i+Ha_i^2\right)u_i^*+G_i-KHa_i^2=0, \tag{4.2.2}$$

u kome je:

$$G_i=\frac{Ph^2}{U\mu_i}, \tag{4.2.3}$$

a ostale oznake date su izrazima (4.1.8-a).

Zapaţa se da je jednačina (4.2.2) istog oblika sa jednačinom (4.1.8) iz prethodnog poglavlja. Ovde je umesto veličine γ_i uvedena veličina G_i koja u startu ima isti zapis, ali se s obzirom na veličinu U u jednom i drugom slučaju one razlikuju. Naravno, mogla je da se zadrţi ista oznaka, ali da se ima u vidu njena različitost u jednom i drugom slučaju.

Jednačina (4.1.2) u bezdimenzionom obliku ima zapis (4.1.11), a jednačina (4.1.3) ima zapis (4.1.9). Dakle, ove jednačine se ne razlikuju od odgovarajućih jednačina u prethodnom poglavlju. Naravno, stalno treba imati u vidu da veličina U nije ista veličina ovde i u prethodnom poglavlju, iako je oznaka ista.

Odgovarajući granični uslovi u bezdimenzionom obliku dobijaju se iz graničnih uslova (4.2.1) i dati su izrazima:

$$u_1^*(-1)=0,\ u_1^*(0)=u_2^*(0),\ u_2^*(1)=1,$$

$$\gamma_2\frac{du_1^*}{dy^*}=\frac{du_2^*}{dy^*}\ \text{za}\ y^*=0,$$

$$\Theta_1(-1)=0,\ \Theta_1(0)=\Theta_2(0),\ \Theta_2(1)=1,$$

$$\delta\frac{d\Theta_1}{dy^*}=\frac{d\Theta_2}{dy^*}\ \text{za}\ y^*=0, \tag{4.2.4}$$

gde su korišćene iste oznake kao u prethodnom poglavlju.

Jednačine (4.2.2), (4.1.9), (4.1.11) i granični uslovi (4.2.4) predstavljaju matematički model u bezdimenzionom obliku opisanog strujanja tečnosti i razmene toplote.

4.2.2 Rasporedi brzine, temperature i pritiska u kanalu

Za odreĎivanjerasporeda brzine, temperature i pritiska neophodno je rešiti jednačine (4.1.2), (4.1.9) i (4.1.11) sa graničnim uslovima (4.2.4). Imajući u vidu da su oblici jednačina u ovom i prethodnom poglavlju isti takva će biti i njihova rešenja.

Rešenja jednačina (4.1.2) data su izrazima (4.1.17) u kome je sada partikularno rešenje dato izrazom:

$$\Omega_i=\frac{G_i-KHa_i^2}{\omega_i^2}, \tag{4.2.5}$$

koji se razlikuje od odgovarajućeg izraza u prethodnom poglavlju.

Za odreĎivanjeintegracionih konstanti koji se nalaze u izrazima za brzine koriste se granični uslovi (4.2.4) i dobija se da su one date izrazima:

$$A_2=-\frac{R_1R_6^*+R_3^*R_4}{R_1R_5+R_2R_4},$$

$$B_1=\frac{R_2}{R_1}A_2+\frac{R_3^*}{R_1},$$

$$A_1=-B_1\exp(2\omega_1)-\Omega_1\exp(\omega_1),$$

$$B_2=(1-\Omega_2)\exp(\omega_2)-A_2\exp(2\omega_2), \tag{4.2.6}$$

u kojima su korišćene oznake:

$$R_3^* = (1-\Omega_2)\exp(\omega_2) + \Omega_2 - \Omega_1\left[1-\exp(\omega_1)\right],$$
$$R_6^* = \gamma_2\omega_1\Omega_1\exp(\omega_1) + \omega_2(\Omega_2 - 1)\exp(\omega_2), \tag{4.2.7}$$

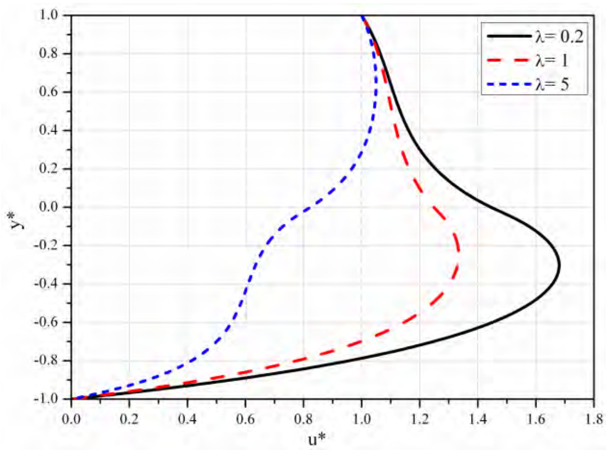
i oznake date izrazima (4.1.19).

Ovim je odreĎen raspored bezdimenzione brzine u kanalu.

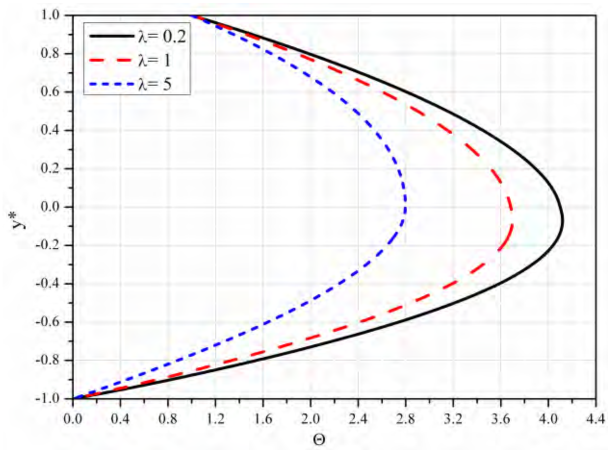
Raspored temperature dobija se rešavanjem jednačine (4.1.9) pošto se u nju unese izraz za brzinu (4.1.17) i dobija se da je on dat izrazom (4.1.20). Integracione konstante koje se nalaze u ovom izrazu date su izrazima (4.1.22). Raspored pritiska, kao i u prethodnom poglavlju, dat je izrazom (4.1.25).

4.2.3 Analiza rezultata

Na slikama 4.13 i 4.14 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za različite vrednosti odnosa faktora poroznosti odnosno propustljivosti kanala $\lambda = \Lambda_1/\Lambda_2$. Tokom proračuna menjana je poroznost donje polovine kanala dok je poroznost gornje polovine kanala bila konstantna.



Slika 4.13 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti parametra λ



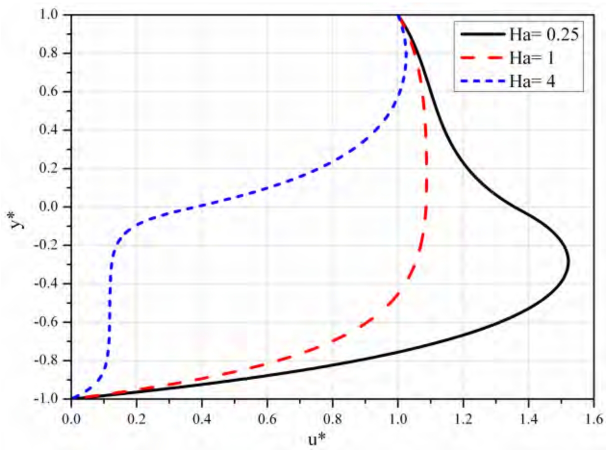
Slika 4.14 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti parametra λ

Tečnost koja se nalazi u gornjoj polovini kanala je viskoznija, veće toplotne provodnosti i elektroprovodnosti od tečnosti u donjoj polovini kanala. Kanal je u reţimu kratkog spoja $(K=0)$.

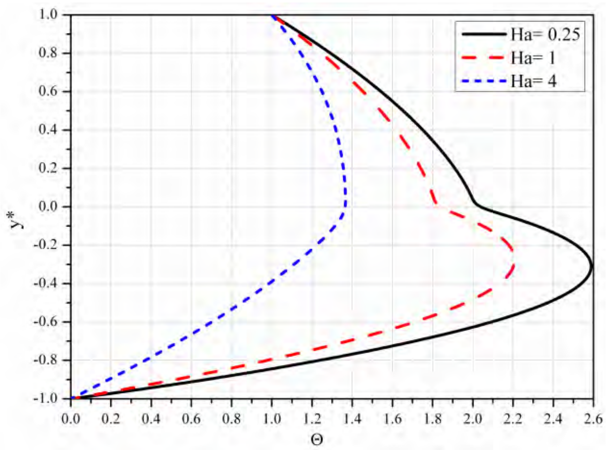
Sa slike 4.13 se zaključuje da sa porastom veličine λ tj. sa smanjenjem propustljivosti donje polovine kanala brzina tečnosti u kanalu opada i to u donjoj polovini kanala značajno, a u gornjoj mnogo manje. Za $\lambda = 1$ i $\lambda = 5$ maksimalni intenziteti brzina su u donjoj polovini kanala, dok je za $\lambda = 0.2$ brzina maksimalna u gornjoj polovini kanala. Sa povećanjem vrednosti λ smanjuju se tangencijalni naponi na zidovima kanala. Najveća srednja brzina i protok tečnosti u kanalu je za najmanju vrednost λ.

Sa slike 4.14 se zaključuje da sa povećanjem veličine λ opada temperatura u kanalu i opada količina transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala. Maksimalne temperature su u donjoj polovini kanala, a bliţe sredini kanala što je λ veće.

Na slikama 4.15 i 4.16 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva $(\mathrm{Ha} = \mathrm{Ha}_1/\mathrm{Ha}_2)$, respektivno. Kanal je porozan pri čemu je donja polovina kanala manje propustljivosti od gornje polovine kanala. Tečnost u gornjoj polovini kanala je veće viskoznosti i veće toplotne propustljivosti od tečnosti u donjoj polovini kanala. Za promenu veličine Ha menjan je Ha_1, promenom elektroprovodnosti σ_1, a Ha_2 je konstantno.



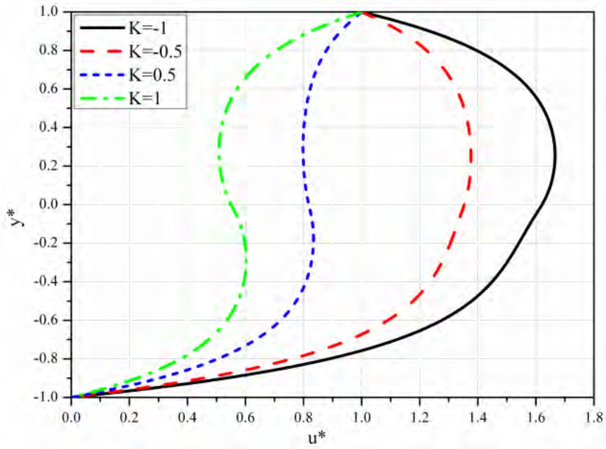
Slika 4.15 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva



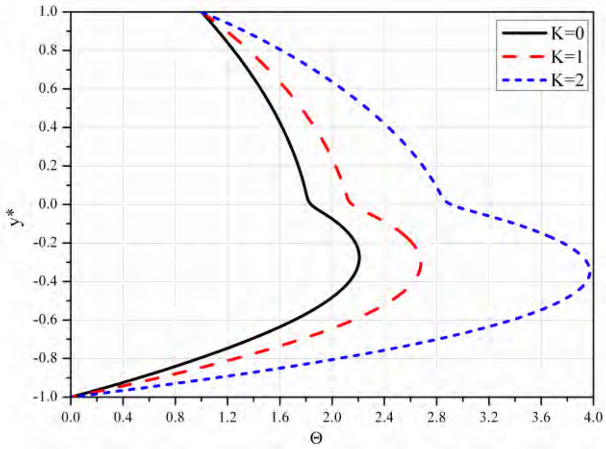
Slika 4.16 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva

Sa slike 4.15 se zaključuje da sa povećanjem odnosa Hartmann-ovih brojeva brzina u kanalu opada, opadaju srednja brzina, protok u kanalu i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Za velike vrednosti ove veličine strujanje tečnosti u donjoj polovini kanala moţe se skoro zaustaviti.

Sa slike 4.16 se zaključuje da sa porastom Ha tj. porastom elektroprovodnosti fluida u donjoj polovini kanala temperatura u kanalu opada. Za malu vrednost odnosa Ha temperatura je maksimalna u sredini kanala, a za veće vrednosti ovog odnosa temperatura je maksimalna u donjoj polovini kanala.



Slika 4.17 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti K



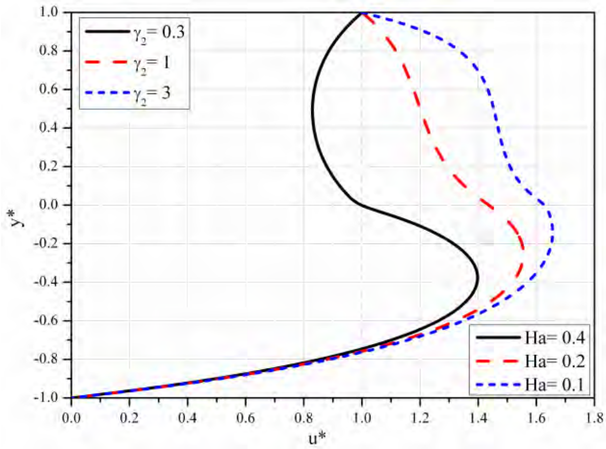
Slika 4.18 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti K

Na slikama 4.17 i 4.18 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i temperature u kanalu za različite vrednosti faktora opterećenja K. Kanal je porozan, a donja njegova polovina je manje propustljivosti od gornje. Tečnost u donjoj polovini kanala je manje elektroprovodnosti, manje viskoznosti, manje toplotne provodnosti i kod nje je manji Hartmann-ov broj od tečnosti u gornjoj polovini kanala. Faktor opterećenja K se menja tako što se menja spoljašnje primenjeno električno polje.

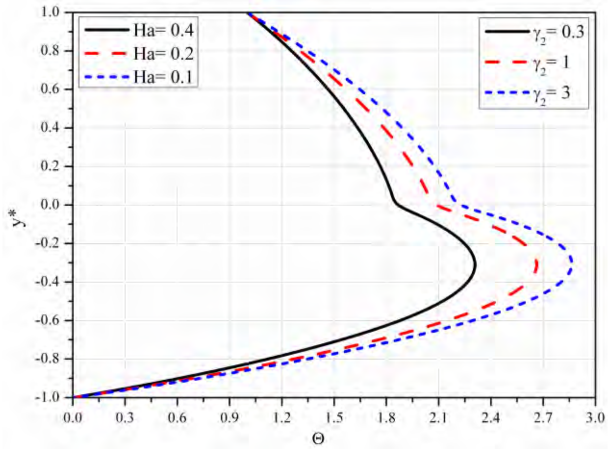
Sa slike 4.17 se zaključuje da za $K < 0$ sa porastom vrednosti $|K|$ raste brzina, srednja brzina i protok u kanalu i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala. Za $K > 0$, sa porastom veličine K opada brzina u kanalu i tangencijalni napon na donjem zidu kanala, a raste na gornjem zidu.

Sa slike 4.18 se zaključuje da sa porastom veličine K raste temperatura u kanalu i to intenzivnije i više u donjoj polovini kanala. Najniža temperatura je za slučaj kada je kanal u režimu kratkog spoja. Maksimalne vrednosti temperatura su u donjoj polovini kanala, a bliže sredini kanala nego donjem zidu kanala. Količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid veća je za veće vrednosti veličine K.

Na slikama 4.19 i 4.20 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti odnosa viskoznosti tečnosti u kanalu. Kanal je porozan, a propustljivost donje polovine kanala je manja od propustljivosti gornje polovine kanala. Kanal je u režimu kratkog spoja. Tečnost u donjoj polovini kanala je manje elektroprovodnosti i manje toplotne provodnosti od tečnosti u gornjoj polovini kanala. Ovde se menja odnos viskoznosti tečnosti koje struje kroz donju i gornju polovinu kanala. Tokom proračuna menja se odnos $\gamma_2 = \mu_1/\mu_2$ tako što se menja viskoznost μ_2 fluida u gornjoj polovini kanala. Kada odnos γ_2 opada onda opada i brzina u gornjoj polovini kanala a donji fluid se usporava, u suprotnom kada odnos γ_2 raste onda raste i brzina u gornjoj polovini kanala a donji fluid se ubrzava na račun gornjeg fluida.



Slika 4.19 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti odnosa viskoznosti γ_2

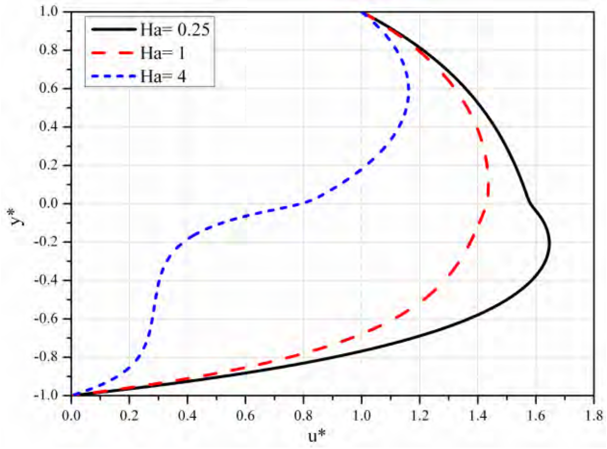


Slika 4.20 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti odnosa viskoznosti γ_2

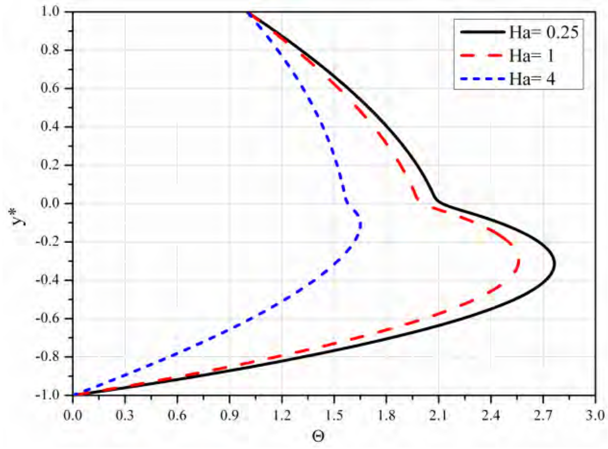
Sa slike 4.19 se zaključuje da sa povećanjem veličine γ_2 raste brzina tečnosti u kanalu a za $\gamma_2 \geq 1$ i tangencijalni napon na gornjem zidu. Tangencijalni napon na donjem zidu vrlo malo se menja sa promenom veličine γ_2. Maksimalne brzine su u donjoj polovini kanala, a njihov poloţaj se sa povećanjem γ_2 udaljava od donjeg zida ili bolje rečeno pribliţava sredini kanala.

Sa slike 4.20 se zaključuje da sa porastom veličine γ_2 rastu temperature u kanalu i količina transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala iako je njegova temperatura viša od temperature donjeg zida kanala. Maksimalne vrednosti temperatura su u donjoj polovini kanala. Viskozno zagrevanje je izraţenije na razdelnoj površi i kod donjeg fluida.

Na slici 4.21 i slici 4.22 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva. Donja polovina kanala je porozna a gornja "slobodna". Kanal je u reţimu kratkog spoja. U donjoj polovini kanala je tečnost manje viskoznosti i manje toplotne provodnosti od tečnosti u gornjoj polovini kanala. Ovde se promena odnosa Hartmann-ovih brojeva vrši promenom elektroprovodnosti donje tečnosti.



Slika 4.21 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva Ha



Slika 4.22 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva Ha

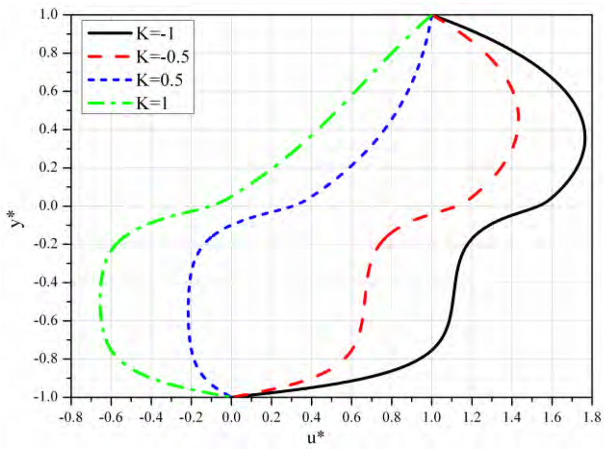
Sa slike 4.21 se zaključuje da sa povećanjem vrednosti Ha brzina u kanalu opada i da ih tečnost u gornjoj "slobodnoj" polovini kanala povećava u odnosu na slučaj kada je i gornja polovina kanala bila porozna. Za velike vrednosti Ha moţe doći i do zaustavljanja strujanja tečnosti u donjoj poroznoj polovini kanala. Za male vrednosti Ha maksimalna brzina je u donjoj polovini kanala, a za velike vrednosti u gornjoj polovini kanala. Većim vrednostima Ha odgovaraju manji tangencijalni naponi na zidovima kanala.

Sa slike 4.22 se zaključuje da sa povećanjem veličine Ha opada temperatura u kanalu i smanjuje se količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid kanala. Maksimalne temperature su u donjoj polovini kanala, a poloţaji maksimalnih temperatura su bliţi osi kanala za veće vrednosti Ha. Za velike vrednosti Ha prostiranje toplote u donjoj polovini kanala je uglavnom kondukcijom. Gornja "slobodna" polovina kanala povećava temperaturu u celom poprečnom preseku kanala u odnosu na slučaj kada je i gornja polovina kanala porozna.

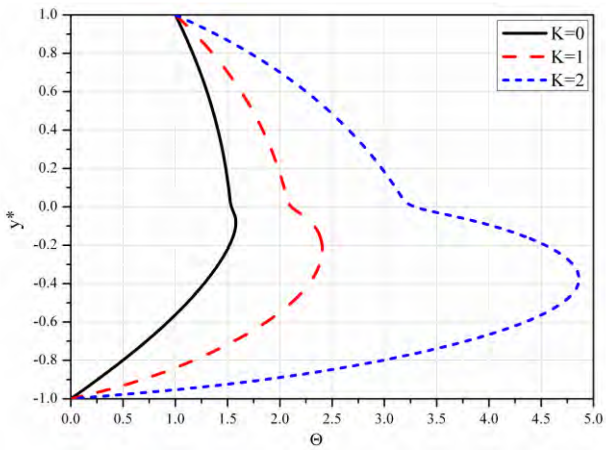
Na slikama 4.23 i 4.24 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti veličine K. Donja polovina kanala je porozna, a gornja "slobodna". Tečnost u donjoj polovini kanala je veće elektroprovodnosti, manje viskoznosti i manje toplotne provodnosti u odnosu na tečnost u gornjoj polovini kanala. Onda je i Hartmann-ov broj za tečnost u donjoj polovini kanala značajno veći od Hartmann-ovog broja za tečnost u gornjoj polovini kanala.

Sa slike 4.23 se zaključuje da za $K < 0$, većim vrednostima $|K|$ odgovaraju veće brzine u kanalu i veći tangencijalni naponi na zidovima kanala. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala. Brzine imaju smer pada pritiska u kanalu. Za $K > 0$ sa porastom vrednosti ove veličine opadaju i čak menjaju smer i brzine tečnosti u kanalu i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Za $K = 1$ tj. za reţim praznog hoda brzina u gornjoj polovini kanala je istog smera kao i brzine za $K < 0$, dok je u donjoj polovini kanala ona suprotnog smera. Za $K = 0.5$ brzina je skoro u celoj donjoj polovini kanala suprotnog smera u odnosu na smer brzine za $K < 0$, dok je u preostalom delu poprečnog preseka kanala istog smera sa smerom brzine za slučaj $K < 0$. Za male pozitivne vrednosti veličine K moglo bi da doĎe do prestanka strujanja fluida u većem delu donje polovine kanala.

Zapaţa se, sa iste slike, da se dejstvom spoljašnjeg električnog polja u posmatranom slučaju moţe ostvariti strujanje fluida u suprotnim smerovima, što je jedna od prednosti EMHD pumpi.



Slika 4.23 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti K



Slika 4.24 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K

Sa slike 4.24 se zaključuje da sa porastom veličine K raste temperatura u kanalu i raste količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji pokretni zid kanala. Maksimalne temperature su u donjoj polovini kanala. Intenzivnije su promene temperature u donjoj polovini kanala a posebno u okolini donjeg zida i u okolini sredine kanala.

Za analizu rasporeda pritiska nije neophodno prikazivanje pomoću grafika jer se iz izraza (4.1.25) odmah moţe zaključiti da on linearno opada u smeru x-ose. U bilo kom poprečnom preseku kanala pritisak ima konstantnu vrednost s tim što je ta vrednost u različitim presecima različita.

4.3 Zaključak poglavlja

Prvi deo zaključka odnosi se na slučajeve koji su u poglavljima 4.1 i 4.2. Kanal je u reţimu kratkog spoja, a propustljivosti njegove gornje i donje polovine mogu biti jednake ili različite.

Zaključuje se da i u slučaju kada su zidovi kanala nepokretni i u slučaju kada je gornji zid pokretan brzina u kanalu opada sa porastom odnosa propustljivosti gornje i donje polovine kanala. Temperatura u kanalu takoĎe opada čime i količina toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala.

Većim vrednostima odnosa Hartmann-ovih brojeva u donjoj i gornjoj polovini kanala odgovaraju manje brzine u kanalu, manji tangencijalni naponi na zidovima kanala, niţe temperature u kanalu. U slučaju pokretnog zida manje su količine toplote transportovane od tečnosti na gornji zid, dok u slučaju nepokretnih zidova ovog transporta toplote i nema.

Promena spoljašnjeg električnog opterećenja K ima značajan uticaj na ove probleme MHD strujanja tečnosti i transporta toplote. Za $K > 0$, za njegove veće vrednosti brzina je u kanalu sa nepokretnim zidovima veća i suprotnog je smera od smera pada pritiska u kanalu. U kanalu sa pokretnim gornjim zidom uzduţna brzina je manja i ima smer isti sa smerovima pada pritiska i brzine kretanja gornjeg zida. Za $K < 0$, većim vrednostima $|K|$ odgovaraju veće brzine koje imaju smer pada pritiska, u oba slučaja. Većim vrednostima K odgovaraju više temperature u kanalu.

Većim vrednostima odnosa dinamičkih viskoznosti tečnosti u donjoj i gornjoj polovini kanala odgovaraju veće brzine i više temperature u kanalu, kao i veće količine toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala.

Sledeći deo zaključaka odnosi se na slučajeve 4.1 i 4.2, ali kada je donja polovina kanala porozna, a gornja "slobodna".

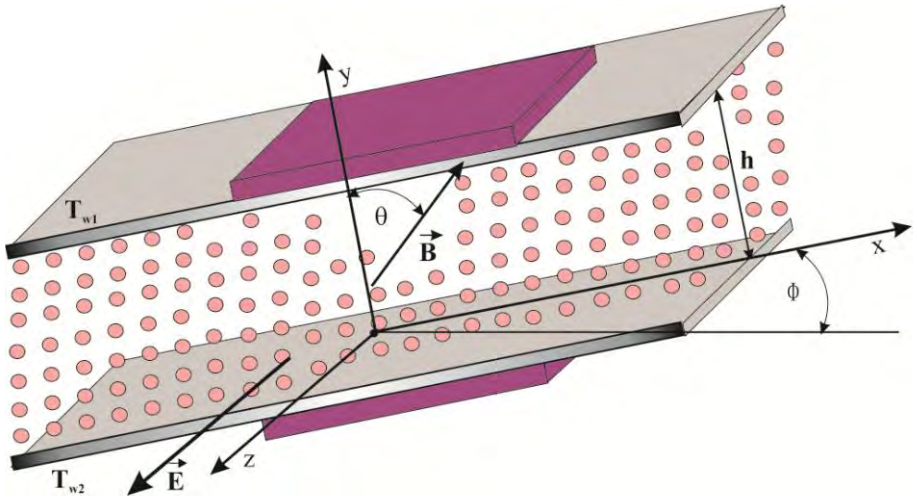
Zaključuje se da većim vrednostima odnosa Hartmann-ovih brojeva u donjoj i gornjoj polovini kanala odgovaraju manje brzine u kanalu i manji tangencijalni naponi na zidovima kanala. Istovremeno su i temperature u kanalu niţe, a količina toplote transportovana sa tečnosti na gornji zid je manja, s tim što kod kanala sa nepokretnim zidovima moţe i da je nema u ovom smeru.

Za kanal u reţimu praznog hoda, u slučaju 4.1, brzina je suprotnog smera u celom preseku kanala, dok je u slučaju 4.2 ona suprotnog smera od smera pada pritiska i smera brzine gornjeg zida do visine $y^* \approx 1.05$, a odatle pa do gornjeg zida ona je smera brzine gornjeg zida. Kada je kanal u reţimu generatora onda i u jednom i u drugom slučaju dolazi do promene smera brzine u poprečnom preseku kanala. Za $K<0$ većim vrednostima $|K|$ odgovaraju veće brzine u kanalu i one u oba slučaja imaju smer pada pritiska. Temperatura u kanalu raste sa porastom veličine K kao i količina toplote transportovana sa tečnosti na gornji zid kanala.

Poglavlje 5

5. Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini

5.1 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini između nagnutih paralelnih ploča



Slika 5a Fizički model strujanja

U ovom delu rada se izučava MHD strujanje tečnosti u kanalu koji sa horizontalnom ravni gradi ugao ϕ. Zidovi kanala su nepokretni na meĐusobnom stalnom rastojanju h i odrţavaju se na stalnim temperaturama T_{w2} donji i T_{w1} gornji. Zidovi su elektroneprovodni. Spoljašnje primenjeno magnetno polje je homogeno, intenzitet magnetne indukcije je B, gradi ugao θ sa normalom na zidove kanala i leţi u ravni uzduţnog preseka kanala. Spoljašnje primenjeno električno polje je homogeno, čij je intenzitet E, a upravno je na uzduţni presek kanala. Problem se razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji.

5.1.1 Matematički model

U cilju formiranja matematičkog modela opisanog problema MHD strujanja i prenosa toplote polazi se od jednačine kontinuiteta (2.4.3), proširene Navier-Stokes-ove jednačine (2.5.14) koja ovde sadrţi i jedan dopunski član dat izrazom:

$$\rho\beta_T\Delta T\vec{g}, \tag{5.1.1}$$

koji predstavlja uzgonsku silu prouzrokovanu razlikom gustina zbog promene temperature. Pored ovih jednačina koristi se energijska jednačina (2.6.24) i Ohm-ov zakon (2.7.2).

Postupajući na način kako je to učinjeno na primer u poglavlju 3.1 dolazi se do zaključka da komponenta brzine u pravcu upravnom na zidove kanala mora biti konstantna. To znači da ova komponenta brzine postoji samo u slučajevima kada na zidovima kanala postoje izvori (ponori). Imajući u vidu da je to opštiji problem on će se ovde i izučavati.

Projektujući proširenu Navir-Stokes-ovu jednačinu sa dopunskim članom (5.1.1) na ose usvojenog koordinatnog sistema dobijaju se sledeće jednačine:

$$\rho v\frac{du}{dy}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}-\frac{\mu}{K^*}u-\lambda\sigma B\left(E+\lambda Bu-vB\sqrt{1-\lambda^2}\right)-g\rho\beta_T\left(T_{w2}-T\right)\sin\phi, \tag{5.1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{K^*}v-\sigma B\sqrt{1-\lambda^2}\left(E+\lambda Bu-vB\sqrt{1-\lambda^2}\right)+g\rho\beta_T\left(T_{w2}-T\right)\cos\phi=0. \tag{5.1.3}$$

Jednačina energije, u ovom slučaju, je:

$$k\frac{d^2T}{dy^2}+\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{\mu}{K^*}u^2+\sigma\left(E+\lambda uB-vB\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2=0. \tag{5.1.4}$$

Ovde su korišćena sva uprošćenja koja su korišćena u poglavlju 3.1, i ovde se na to samo skreće paţnja bez njihovog detaljnog ponavljanja. Korišćena je i oznaka $\lambda=\cos\theta$.

Odgovarajući granični uslovi su:

$$u(0)=0,\ u(h)=0,$$
$$T(0)=T_{w2},\ \ T(h)=T_{w1}. \tag{5.1.5}$$

Jednačine (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) i granični uslovi (5.1.5) predstavljaju matematički model ovde opisanog problema. I ovde se pretpostavlja, kao što je činjeno i u prethodnim problemima, da je pad pritiska po jedinici duţine kanala konstantan tj. da se moţe predstaviti relacijom:

$$P=-\frac{\partial p}{\partial x}=\text{const}, \tag{5.1.6}$$

gde je P poznata konstanta.

Za dalje izučavanje ovog problema, ovaj matematički model pogodno je transformisati na odgovarajući bezdimenzioni matematički model. U tom cilju koriste se bezdimenzione veličine date izrazima (3.1.16), u kojima je karakteristična veličina U data izrazom (3.1.17). Sprovodeći potrebne transformacije jednačine (5.1.2), (5.1.3) (5.1.4) nije komplikovano transformisati na sledeće bezdimenzione oblike:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - \beta\,\mathrm{Re}\frac{du^*}{dy^*} - \left(\Lambda + \lambda^2\mathrm{Ha}^2\right)u^* - \lambda\mathrm{Ha}^2\mathrm{S} + 1 + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\sin\phi = 0, \tag{5.1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^2}{\rho\nu^2}p\right) - \lambda\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^2u^* + \mathrm{Re}\left(\beta\Lambda - \mathrm{SHa}^2\sqrt{1-\lambda^2}\right) - \mathrm{Gr}\cos\phi = 0, \tag{5.1.8}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Ec}\left[\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + \left(\Lambda + \lambda^2\mathrm{Ha}^2\right)u^{*2} + 2\lambda\mathrm{SHa}^2u^* + \mathrm{S}^2\mathrm{Ha}^2\right] = 0, \tag{5.1.9}$$

respektivno, gde su korišćene sledeće oznake:

$$\beta = \frac{\nu}{U},\ \mathrm{Re} = \frac{hU}{\nu},\ \Lambda = \frac{h^2}{K^*},\ \mathrm{Ha} = Bh\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}},\ K = \frac{E}{BU},$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta_T h^3(T - T_{w2})}{\nu^2},$$

$$S = K - \beta\sqrt{1-\lambda^2},\ \mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k},$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{U^2}{c_p\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}. \tag{5.1.10}$$

Granični uslovi (5.1.5) transformisani na bezdimenzione oblike imaju sledeći zapis:

$$u^*(0) = 0,\ u^*(1) = 0,$$

$$\Theta(0) = 0,\ \Theta(1) = 1. \tag{5.1.11}$$

Jednačine (5.1.7), (5.1.8) i (5.1.9) sa graničnim uslovima (5.1.11) predstavljaju matematički model u bezdimenzionom obliku ovde opisanog strujanja.

Zapaţa se da je ovaj matematički model aproksimacija "tačnog" matematičkog modela zbog načina na koji je uveden Grashof-ov broj. Ovakav model omogućava da se dobiju analitička rešenja, a s obzirom na male razlike temperatura aproksimovana rešenja su sasvim zadovoljavajuća posebno za analizu uticaja pojedinih veličina na ovo MHD strujanje i prenos toplote u poroznom nagnutom kanalu.

Za dalje izučavanje ovog problema treba rešiti jednačine (5.1.7), (5.1.8) i (5.1.9) sa graničnim uslovima (5.1.11).

5.1.2 Rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine, bezdimenzione temperature i bezdimenzionog pritiska

Za odreĎivanje analitičkog izraza koji predstavlja bezdimenzionu uzduţnu brzinu tečnosti u kanalu neophodno je rešiti jednačinu (5.1.7). U tom cilju, dobro je zapisati je u sledećem obliku:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - R_1\frac{du^*}{dy^*} - R_2 u^* = Q_1 \tag{5.1.12}$$

gde su zbog kraćeg zapisa uvedene oznake:

$$R_1 = \beta\,\mathrm{Re},\ \ R_2 = \Lambda + \lambda^2 Ha^2,\ \ Q_1 = \lambda Ha^2 S - 1 - \frac{Gr}{Re}\sin\phi. \tag{5.1.13}$$

Zapaţa se, da se jednačina (5.1.12) formalno ne razlikuje od jednačine (3.1.18), ali se suštinski razlikuje jer iste oznake R_2 i Q_1 predstavljaju različite izraze u jednom i u drugom slučaju.

Zadrţane su iste oznake da bi, na dalje, moglo da se koristi kompletno istraţivanje sprovedeno u poglavlju 3.1.2. Dakle, rešenje jednačine (5.1.12) imaće reprezentaciju (3.1.27), a integracione konstante koje u njemu figurišu imaće reprezentacije (3.1.28).

Za odreĎivanje rasporeda bezdimenzione temperature unosi se raspored bezdimenzione uzduţne brzine u jednačinu (5.1.9) i ista se transformiše na sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} = &-\Pr Ec[\left(r_1^2 + R_2\right)C_1^2\exp\left(2r_1y^*\right) + \left(r_2^2 + R_2\right)C_2^2\exp\left(2r_2y^*\right) + \\ &+2\left(r_1r_2 + R_2\right)C_1C_2\exp\left(\left(r_1 + r_2\right)y^*\right) + 2\left(\lambda SHa^2 - Q_1\right)C_1\exp\left(r_1y^*\right) + \\ &+2\left(\lambda SHa^2 - Q_1\right)C_2\exp\left(r_2y^*\right) + S^2Ha^2 + \frac{Q_1}{R_2}\left(Q_1 - 2\lambda SHa^2\right)].\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Rešenje poslednje jednačine ima oblik (3.1.31). Veličine r_1 i r_2 date su izrazima (3.1.25). Treba zapaziti da su u izrazu za brzinu u ovom slučaju oznake R_3, R_4 i R_5 iste sa odgovarajućim izrazima u poglavlju 3.1.3 i da su date izrazima (3.1.32), a da su oznake R_6, R_7 i R_8 različite i u ovom problemu predstavljaju sledeće izraze:

$$\begin{gathered} R_6 = \frac{2}{r_1^2}\left(\lambda SHa^2 - Q_1\right)C_1, \quad R_7 = \frac{2}{r_2^2}\left(\lambda SHa^2 - Q_1\right)C_2, \\ R_8 = \frac{1}{2}\left[S^2Ha^2 + \frac{Q_1}{R_2}\left(Q_1 - 2\lambda SHa^2\right)\right]. \end{gathered} \tag{5.1.15}$$

Integracione konstante C_3 i C_4 koje figurišu u izrazu za raspored bezdimenzione temperature (3.1.31), i kod ovog problema, date su izrazima (3.1.33).

U cilju određivanja rasporeda pritiska u kanalu neophodno je rešiti jednačinu (5.1.8), što je sada moguće jer je određen raspored bezdimenzione uzdužne brzine u kanalu.

Zapišimo prethodno jednačinu (5.1.8) u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^2}{\rho\nu^2}p\right)=\lambda\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^2u^*+R_9, \tag{5.1.16}$$

u kome je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka:

$$R_9=\mathrm{Gr}\cos\phi-\mathrm{Re}\left(\beta\Lambda-\mathrm{SHa}^2\sqrt{1-\lambda^2}\right). \tag{5.1.17}$$

Unoseći raspored bezdimenzione uzdužne brzine (3.1.27) u jednačinu (5.1.16) i imajući u vidu relaciju (5.1.6) i imajući u vidu relaciju (5.1.6) dobija se da je njeno rešenje dato izrazom:

$$\frac{h^2}{\rho\nu^2}p=R_{10}\exp\left(r_1y^*\right)+R_{11}\exp\left(r_2y^*\right)+R_{12}y^*-\frac{Ph^2}{\rho\nu^2}x+C_5, \tag{5.1.18}$$

gde je C_5 integraciona konstanta, a radi kraćeg zapisa, uvedene su oznake:

$$R_{10}=\lambda\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^2\frac{C_1}{r_1},\quad R_{11}=\lambda\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^2\frac{C_2}{r_2},$$

$$R_{12}=R_9-\lambda\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^2\frac{Q_1}{R_2}. \tag{5.1.19}$$

Za određivanje integracione konstante C_5 koristi se granični uslov za pritisak. Ako je, na primer, za $x=0$ i $y=0$ pritisak $p=p_0$ dobija se da je integraciona konstanta:

$$C_5=\frac{h^2}{\rho\nu^2}p_0-R_{10}-R_{11}, \tag{5.1.20}$$

i onda izraz za raspored pritiska (5.1.18) dobija oblik:

$$\frac{h^2}{\rho\nu^2}p=R_{12}y^*-R_{10}\left[1-\exp\left(r_1y^*\right)\right]-R_{11}\left[1-\exp\left(r_2y^*\right)\right]+\frac{h^2}{\rho\nu^2}\left(p_0-Px\right). \tag{5.1.21}$$

Ovim su određeni analitički izrazi za raspored bezdimenzione uzdužne brzine, raspored bezdimenzione temperature i raspored bezdimenzionog pritiska u kanalu.

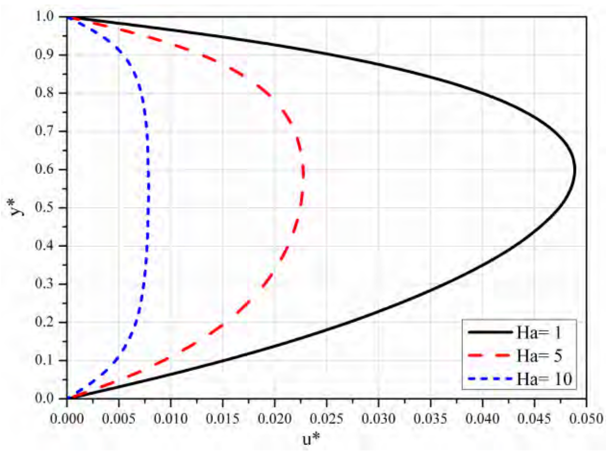
5.1.3 Analiza rezultata

Radi preglednosti i jednostavnije analize deo dobijenih rezultata prikazan je na slikama koje slede. Tako su na slici 5.1 i slici 5.2 prikazani rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti Hartmann-ovog broja, respektivno. Kretanje tečnosti u kanalu je u smeru ose x. Prikazani rezultati se odnose na slučaj kada je ugao nagiba kanala 30° .

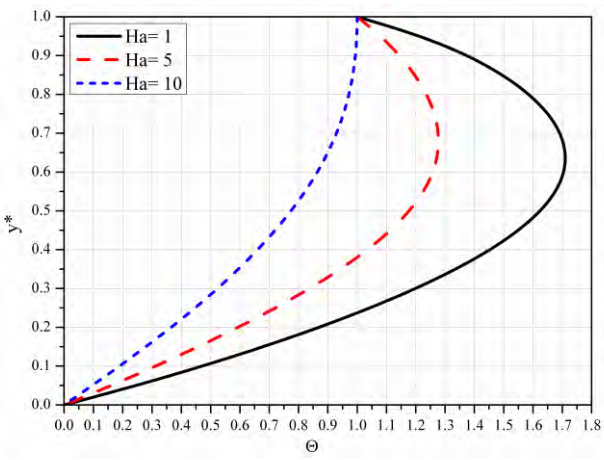
Sa slike 5.1 se zaključuje da rast Hartmann-ovog broja tj. povećanje intenziteta magnetne indukcije spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja dovodi do smanjenja uzduţne brzine u kanalu i do “poravnanja” njenog profila. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala, što se objašnjava činjenicom da su na donjem zidu kanala izvori a na gornjem ponori. Istovremeno se smanjuju i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Naravno, smanjuju se srednje brzine i protoci tečnosti kroz kanal.

Sa slike 5.2 se zaključuje da povećanje vrednosti Ha broja dovodi do sniţenja temperature u kanalu i da smanjenja količine toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid kanala. Za veće vrednosti Ha broja u većem delu donje polovine kanala prenos toplote je uglavnom kondukcijom.

Ovi zaključci o uticaju Ha broja su u saglasnosti sa zaključcima izvedenim u poglavljima 3.1.2 i 3.1.3.



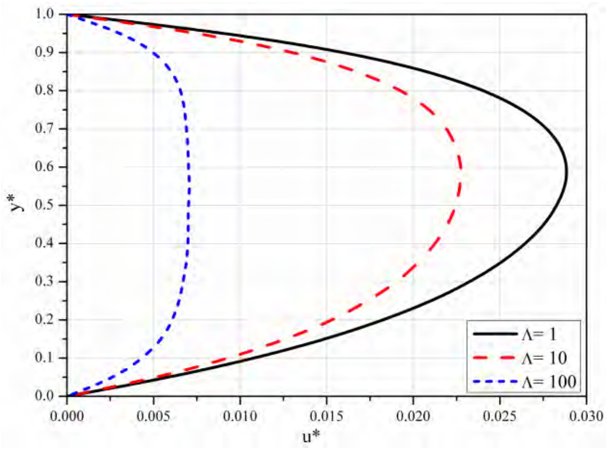
Slika 5.1 Raspored bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti Hartmann-ovog broja



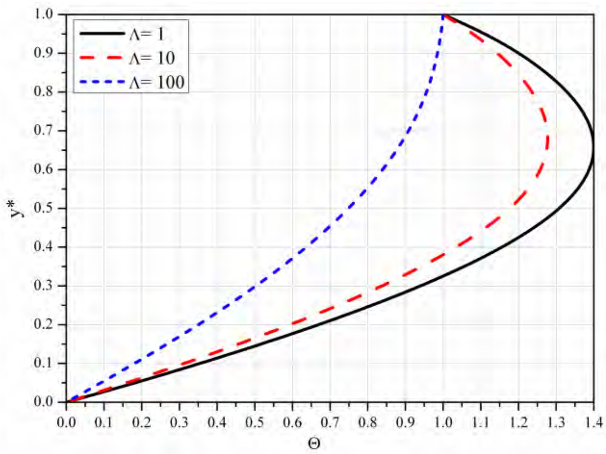
Slika 5.2 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti Hartmann-ovog broja

Na slici 5.3 i slici 5.4 su prikazani rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti kanala, respektivno. Kanal sa horizontalnom ravni gradi ugao od 30°, a pad pritiska i kretanje tečnosti su u smeru x ose. Kanal radi u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.3 se zaključuje da povećanje vrednosti faktora poroznosti tj. smanjenje propustljivosti kanala dovodi do smanjenja brzine u kanalu, smanjenja tangencijalnih napona na zidovima kanala i do "poravnanja" profila brzine. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala jer su na donjem zidu kanala izvori.



Slika 5.3 Raspored bezdimenzione uzdužne brzine za različite vrednosti faktora poroznosti

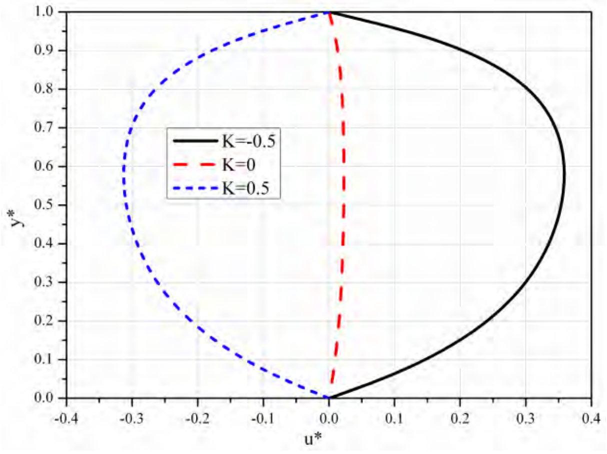


Slika 5.4 Raspored bezdimenzione temperature za različite vrednosti faktora poroznosti

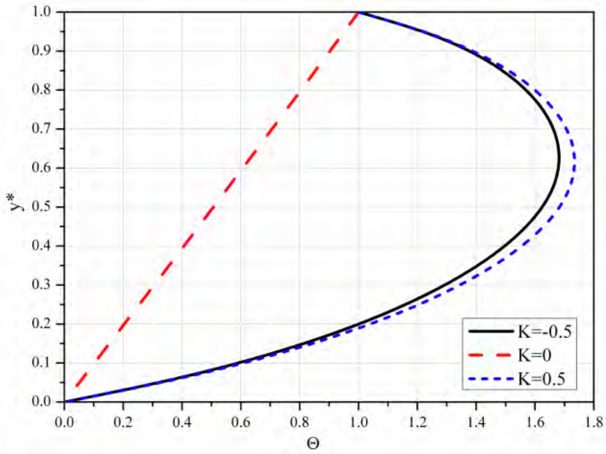
Sa slike 5.4 se zaključuje da povećanjem vrednosti faktora poroznosti opada temperatura tečnosti i količina toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala. Za male propustljivosti kanala ovog transporta toplote neće ni biti. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala. Za male propustljivosti kanala u većem delu donje polovine kanala prenos toplote je kondukcijom.

Na slikama 5.5 i 5.6 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti faktora električnog opterećenja. Promena ovog faktora realizovana je promenom intenziteta jačine spoljašnjeg električnog polja. Kanal sa horizontalnom ravni gradi ugao od 30°. Pad pritiska i kretanje tečnosti je u smeru odabrane x ose. Na donjem zidu kanala nalaze se izvori, a na gornjem ponori.

Sa slike 5.5 se zaključuje da je za $K=-0.5$ i $K=0$ uzdužna brzina tečnosti u kanalu, u celom poprečnom preseku kanala, istog smera sa smerom pada pritiska u kanalu, dok je za $K=0.5$ brzina suprotnog smera od smera pada pritiska. Intenzitet brzine raste sa porastom vrednosti $|K|$. Maksimalna brzina je, za sve vrednosti K, u gornjoj polovini kanala.

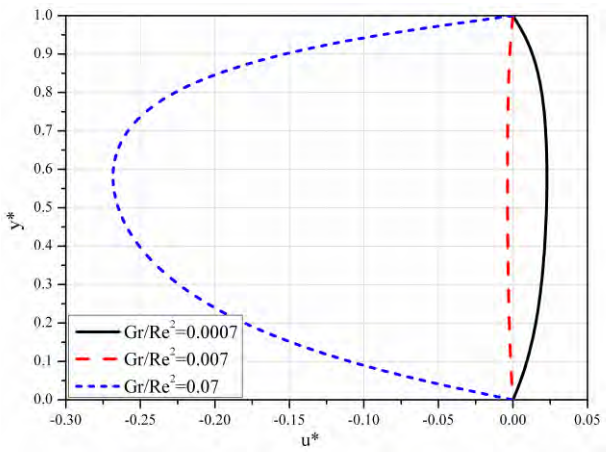


Slika 5.5 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti K

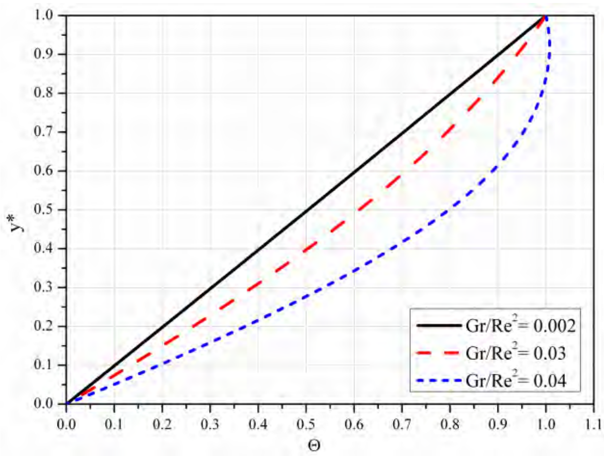


Slika 5.6 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K

Sa slike 5.6 se zaključuje da je za slučaj rada kanala u reţimu kratkog spoja prenos toplote u celom poprečnom preseku kondukcijom i tada je temperatura u kanalu najniţa. Sa porastom vrednosti $|K|$ raste i temperatura u kanalu. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala. Za $|K| > 0$ postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala, dok za $K = 0$ ovog transporta nema.



Slika 5.7 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Gr/Re^2

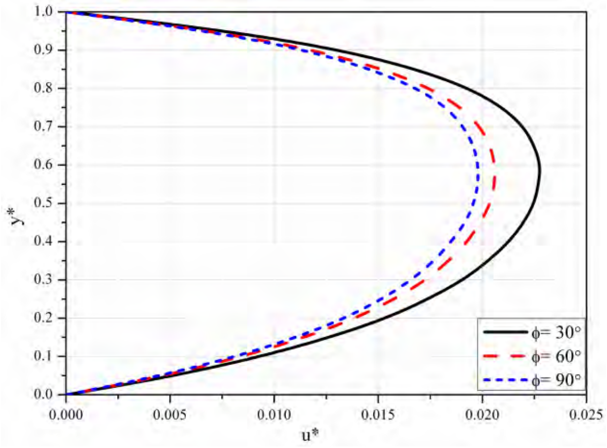


Slika 5.8 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Gr/Re^2

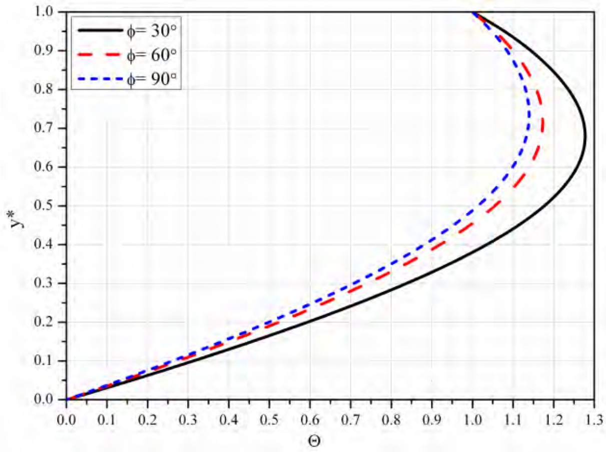
Na slikama 5.7 i 5.8 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti odnosa Grashof-ovog broja i kvadrata Reynolds-ovog broja. Rezultati su za slučaj kada kanal sa horizontalom gradi ugao od 30° i kada su na njihovom donjem zidu izvori, a na gornjem ponori.

Sa slike 5.7 se zaključuje da sa porastom ovog odnosa opada uzduţna brzina tečnosti u kanalu i opadaju tangencijalni naponi na zidovima kanala. Za sve vrednosti ovog odnosa maksimalne uzduţne brzine su u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala.

Sa slike 5.8 se zaključuje da za veće vrednosti odnosa $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$ temperature u kanalu su niţe. Za vrednost $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2 = 0.04$, u većem delu poprečnog preseka kanala, prenos toplote je uglavnom kondukcijom. Za vrednost $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2 = 0.002$ postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala.



Slika 5.9 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti ϕ



Slika 5.10 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti ϕ

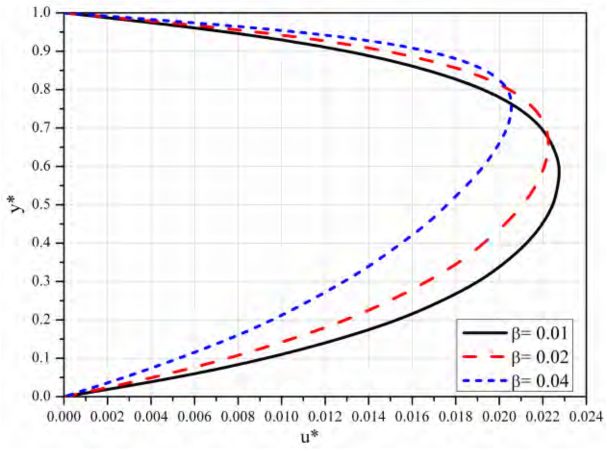
Na slikama 5.9 i 5.10 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti ugla nagiba kanala. Rezultati su za kanal kod koga su na donjem zidu izvori, a na gornjem zidu ponori, dok u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.9 se zaključuje da sa porastom ugla nagiba kanala opadaju brzina tečnosti u kanalu i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala.

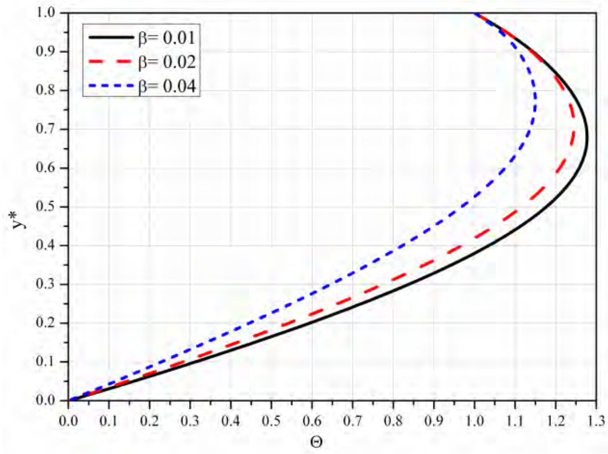
Sa slike 5.10 se zaključuje da sa porastom ugla nagiba kanala opada temperatura u kanalu i smanjuje se količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala.

Na slikama 5.11 i 5.12 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti β. Rasporedi su dati za kanal ugla nagiba 30° na čijem se donjem zidu nalaze izvori, a na gornjem zidu ponori, dok je kanal u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.11 se zaključuje da većim vrednostima β odgovaraju manje uzduţne brzine u kanalu, manji tangencijalni naponi na donjem zidu kanala a veći na gornjem. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala i to bliţe gornjem zidu za veće vrednosti β.



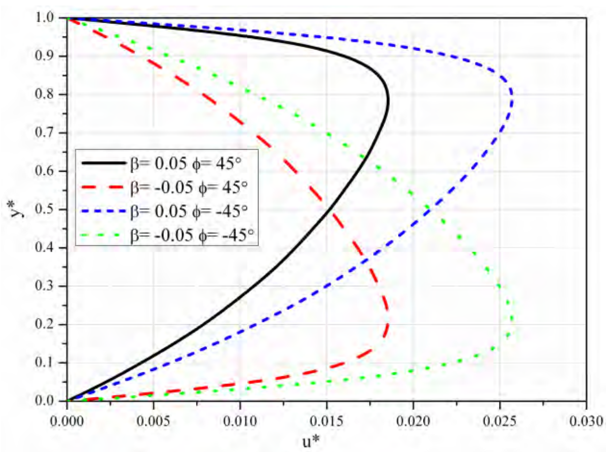
Slika 5.11 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β



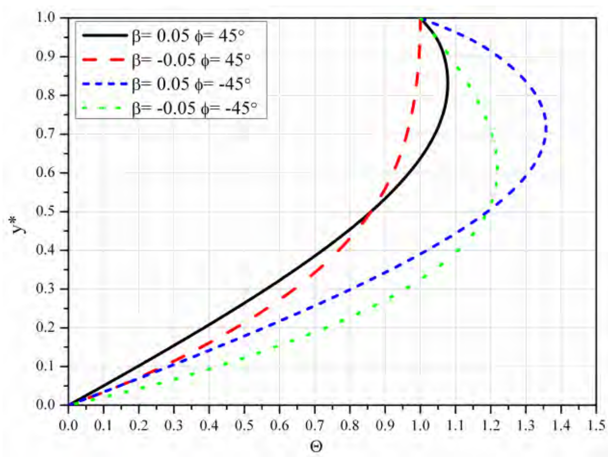
Slika 5.12 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β

Sa slike 5.12 se zaključuje da većim vrednostima β odgovaraju niţe temperature u kanalu i manje količine toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala a bliţe gornjem zidu za veće vrednosti β.

Na slikama 5.13 i 5.14 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite uglove nagiba kanala i za različite vrednosti β.



Slika 5.13 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti ϕ i β

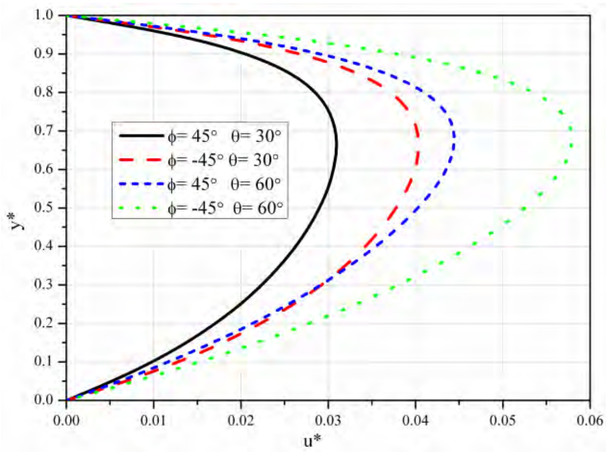


Slika 5.14 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti ϕ i β

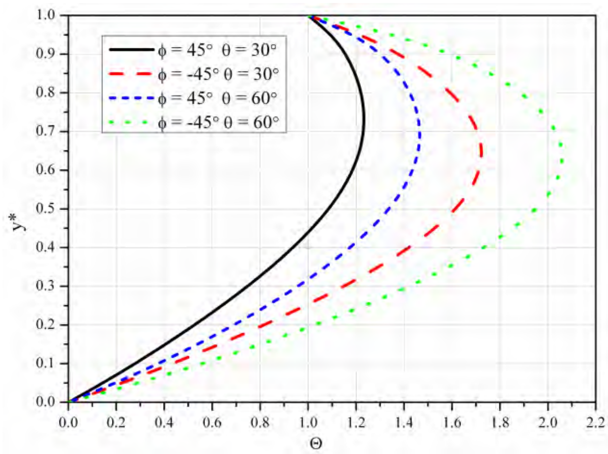
Spoljašnje primenjeno magnetno polje je upravno na zidove kanala, a kanal je u reţimu kratkog spoja. Pad pritiska je u smeru ose x.

Sa slike 5.13 se zaključuje da je za slučaj $\phi = 45^{\circ}$ (kanal “iznad” horizontalne ravni), za izvore na donjem zidu a ponore na gornjem i obrnuto, a za istu vrednost $|\beta|$, rasporedi brzina su simetrični u odnosu na sredinu kanala. Maksimalna brzina je u gornjoj polovini kanala za $\beta > 0$, a u donjoj polovini kanala za $\beta < 0$. Za $\beta > 0$ su tangencijajni naponi veći na gornjem zidu od napona na donjem zidu, a za $\beta < 0$ vaţi obrnuto. Ovi zaključci vaţe i za slučaj kada je $\phi = -45^{\circ}$ (kanal "ispod" horizontalne ravni). Isto tako se zaključuje da je, za istu vrednost β i istu vrednost $|\phi|$, brzina veća za $\phi < 0$ tj. kada je kanal "ispod" horizontalne ravni.

Sa slike 5.14 se zaključuje da je za istu vrednost β, nezavisno od toga na kom su zidu kanala izvori a na kom ponori, temperatura viša za slučaj kada je kanal "ispod" horizontalne ravni tj. kada je $\phi < 0$. U svim slučajevima temperature su maksimalne u gornjoj polovini kanala. Količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid kanala veća je za slučaj kada je $\phi < 0$.



Slika 5.15 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti ϕ i θ



Slika 5.16 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti ϕ i θ

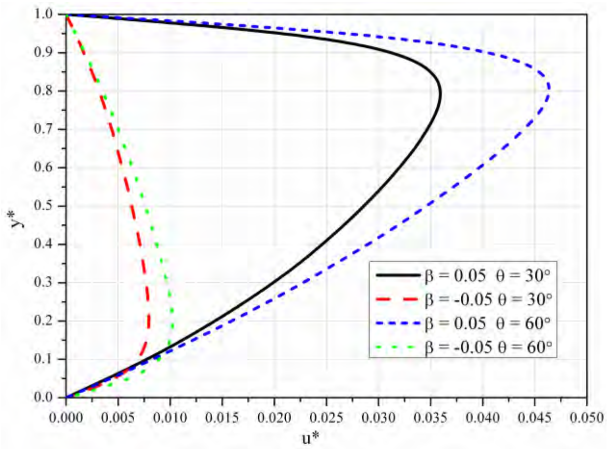
Na slikama 5.15 i 5.16 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti ugla nagiba kanala i različite vrednosti ugla koji gradi spoljašnje primenjeno magnetno polje sa normalom na zidove kanala. Na donjem zidu nalaze se izvori, a na gornjem su ponori. Kanal je i ovde u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.15 se zaključuje da je, za istu vrednost ugla nagiba primenjenog spoljašnjeg magnetnog polja u odnosu na normalu na zidove kanala, uzduţna brzina tečnosti u kanalu veća za $\phi < 0$ od brzine za $\phi > 0$ pri čemu su vrednosti $|\phi|$ jednake, a pri istim ostalim karakterističnim veličinama. Odgovarajući tangencijalni naponi na zidovima kanala su veći za $\phi < 0$. U svim slučajevima brzine su maksimalne u gornjoj polovini kanala.

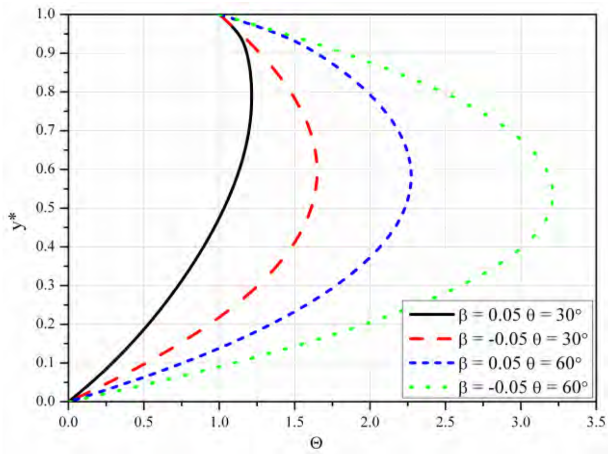
Sa slike 5.16 se zaključuje da je, za istu vrednost ugla θ, temperatura u kanalu viša za $\phi < 0$ od temperature za $\phi > 0$ pri čemu su vrednosti $|\phi|$ jednake i ostale karakteristične veličine su iste. Količina toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid je takoĎe veća. Za sve slučajeve maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala.

Na slikama 5.17 i 5.18 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzdużne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti veličina β i θ.

Sa slike 5.17 se zaključuje da je, za iste uglove θ koje gradi spoljašnje primenjeno magnetno polje sa normalom na zidove kanala, uzdużna brzina u kanalu manja za slučaj kada su na donjem zidu ponori, a na gornjem izvori. Isto se zaključuje da je za isto β brzina u kanalu veća za veće uglove θ. Za $\beta > 0$ maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala, a za $\beta < 0$ u donjoj polovini kanala.



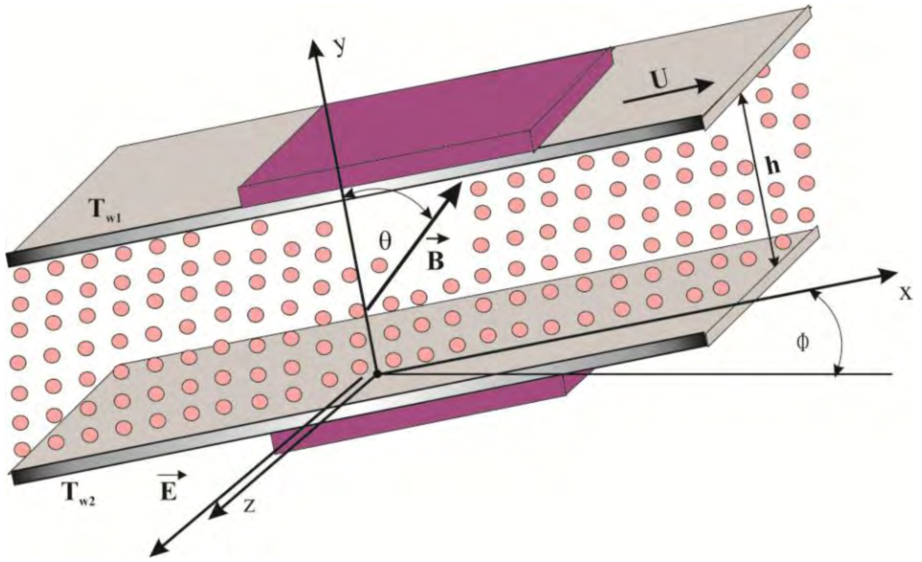
Slika 5.17 Bezdimenziona uzdużna brzina za različite vrednosti β i θ



Slika 5.18 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β i θ

Sa slike 5.18 se zaključuje da je, za istu vrednost θ, temperatura viša za $\beta < 0$ od temperature za $\beta > 0$. Zaključuje se i da je za istu vrednost β temperatura u kanalu veća za veći ugao θ.

5.2 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini između nagnutih paralelnih ploča od kojih je gornja pokretna



Slika 5b Fizički model strujanja

U poglavlju 5.2 izučava se MHD strujanje tečnosti i prenos toplote u kanalu čiji zidovi sa horizonalnom ravni grade ugao ϕ. Donji zid kanala je na stalnoj temperaturi T_{w2}, a gornji na stalnoj temperaturi T_{w1}. Zidovi kanala su elektro neprovodni i nalaze se na rastojanju h. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno, intenziteta magnetne indukcije B, a gradi ugao θ sa normalom na zidove kanala i leţi u ravni uzduţnog preseka kanala. Primenjeno je spoljašnje električno polje E upravno na uzduţni presek kanala. Problem se razmatra u bezindukcionoj aproksimaciji. Treba zapaziti da je kod problema koji se ovde izučava, za razliku od problema koji je izučen u prethodnom poglavlju, gornji zid kanala pokretan i kreće se konstantnom brzinom intenziteta U, paralelno donjem zidu.

5.2.1 Matematički model

Za formiranje matematičkog modela problema koji se izučava u ovom poglavlju treba sprovesti istu proceduru kao i u prethodnom poglavlju. Imajući u vidu da se ovaj fizički model razlikuje od fizičkog modela u prethodnom poglavlju samo u tome što je kod njega gornji zid pokretan, nije neophodno ponavljati kompletnu proceduru. Naime mogu se koristiti rezultati te procedure dobijeni u prethodnom poglavlju.

Postupajući kako je gore rečeno dobija se da matematički model ovog problema predstavljaju jednačine (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) i granični uslovi:

$$u(0)=0,\ \ u(h)=U,$$
$$T(0)=T_{w2},\ \ T(h)=T_{w1}, \tag{5.2.1}$$

u kojima je U intenzitet brzine kretanja gornjeg zida kanala. Zapaţa se da se ovaj matematički model razlikuje od matematičkkog modela problema u 5.1 samo u graničnom uslovu za brzinu tečnosti na gornjem zidu kanala.

I ovde se predpostavlja da je pad pritiska po jedinici duţine kanala konstantan i dat je relacijom (5.1.6).

Za transformaciju ovog matematičkog modela na odgovarajući bezdimenzioni matematički model koriste se bezdimenzione veličine date izrazima (3.1.16). Treba zapaziti da je u ovim izrazima veličina U, intenzitet brzine kretanja gornjeg zida kanala, a ne veličina data izrazom (3.1.17) kako je to bilo u prethodnom poglavlju.

Matematički model u bezdimenzionom obliku predstavljaju jednačine (5.1.12), (5.1.8), (5.1.9) i granični uslovi:

$$u^*(0)=0,\ \ u^*(1)=1,$$
$$\Theta(0)=0,\ \ \Theta(1)=1. \tag{5.2.2}$$

U jednačinama (5.1.12), (5.1.8) i (5.1.9) su korišćene oznake:

$$G=\frac{Ph^2}{\mu U},\ \ Q_1=\lambda Ha^2 S-G-\frac{Gr}{Re}\sin\phi, \tag{5.2.3}$$

i oznake date relacijama (5.1.10) i (5.1.13).

Zapaţa se da je nepodudarnost samo u oznaci Q_1 kod ovog problema i problema iz prethodnog poglavlja. Bezdimenzione jednačine su u oba poglavlja iste što je bilo i za očekivati. Razlika je u graničnom uslovu za bezdimenzionu brzinu na gornjem zidu kanala, što je isto tako očekivano.

5.2.2 Rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine, bezdimenzione temperature i bezdimenzionog pritiska

Da bi se odredili rasporedi bezdimenzionih veličina moraju se rešiti jednačine (5.1.12), (5.1.8) i (5.1.9) sa graničnim uslovima (5.2.2). Iz jednačine (5.1.12) dobija se da je raspored bezdimenzione uzduţne brzine dat izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = C_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + C_2 \exp\left(r_2 y^*\right) - \frac{Q_1}{R_2}, \tag{5.2.1}$$

gde su veličine r_1 i r_2 date izrazima (3.1.25) a integracione konstante C_1 i C_2 izrazima (3.2.4).

Iz jednačine (5.1.9), posle zamene izraza za bezdimenzionu brzinu (5.2.1), dobija se da je raspored bezdimenzione temperature dat izrazom:

$$\begin{aligned}\Theta\left(y^*\right) = -\Pr \mathrm{Ec}\{&R_3 \exp\left(2r_1 y^*\right) + R_4 \exp\left(2r_2 y^*\right) + \\ &+R_5 \exp\left(\left(r_1 + r_2\right) y^*\right) + R_6 \exp\left(r_1 y^*\right) + \\ &+R_7 \exp\left(r_2 y^*\right) + R_8 y^{*2} + C_3 y^* + C_4\}\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

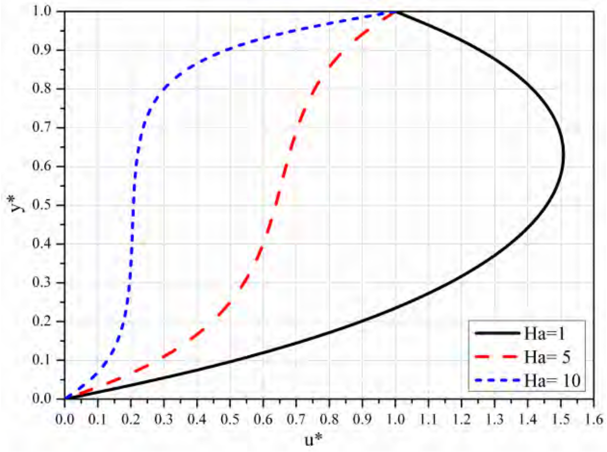
gde konstante R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 i R_8 imaju iste reprezentacije kao i kod prethodnog modela, a takoĎe i integracione konstante C_3 i C_4. Ovo je i očekivano jer su jednačine za bezdimenzionu temperaturu i njima odgovarajući granični uslovi iste u oba slučaja.

Raspored bezdimenzionog pritiska dat je izrazom (5.1.21).

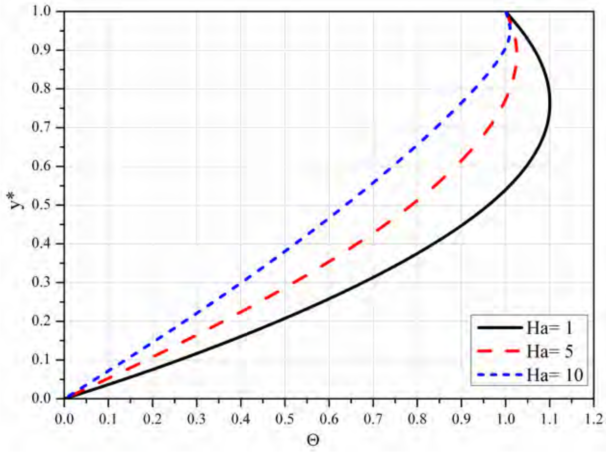
5.2.3 Analiza rezultata

Na slikama 5.19 i 5.20 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti Hartmann-ovog broja. Kanal gradi ugao od 30° sa horizontalnom ravni, na donjem zidu kanala nalaze se izvori a na gornjem ponori. Spoljašnje primenjeno magnetno polje je upravno na zidove kanala. Kanal je u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.19 se zaključuje da većim vrednostima Ha broja odgovaraju manje brzine u kanalu i dolazi do "poravnanja" profila brzine u većem delu poprečnog preseka kanala. Velike vrednosti Ha broja odnosno jaka spoljašnja primenjena magnetna polja mogu dovesti skoro do zaustavljanja strujanja u kanalu.

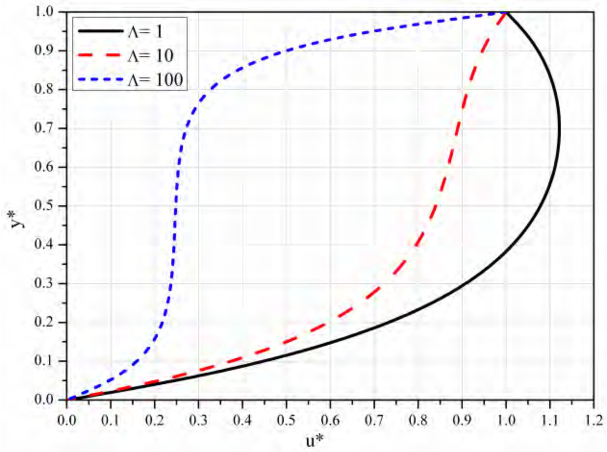


Slika 5.19 Bezdimenziona uzduţna brzina
za različite vrednosti Ha

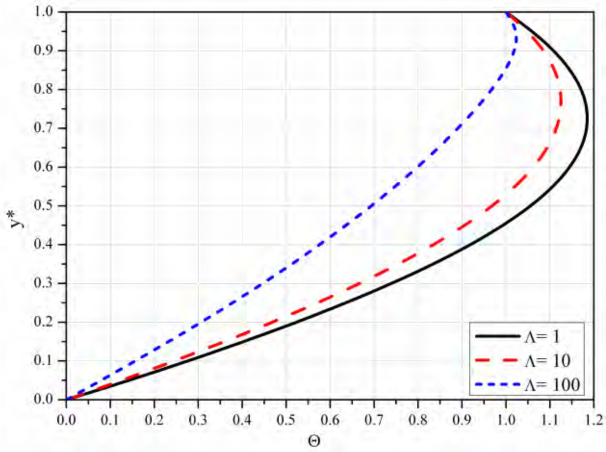


Slika 5.20 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Ha

Sa slike 5.20 se zaključuje da povećanje vrednosti Ha broja dovodi do sniţenja temperature u kanalu i smanjenja količine toplote koja se transportuje sa tečnosti na pokretni zid kanala.



Slika 5.21 Bezdimenziona uzduţna brzina
za različite vrednosti Λ

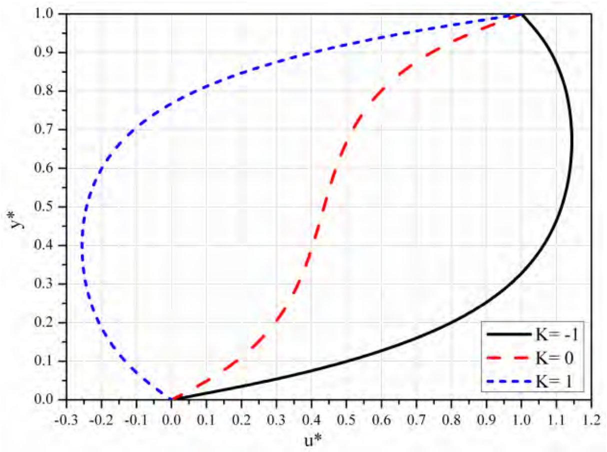


Slika 5.22 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Λ

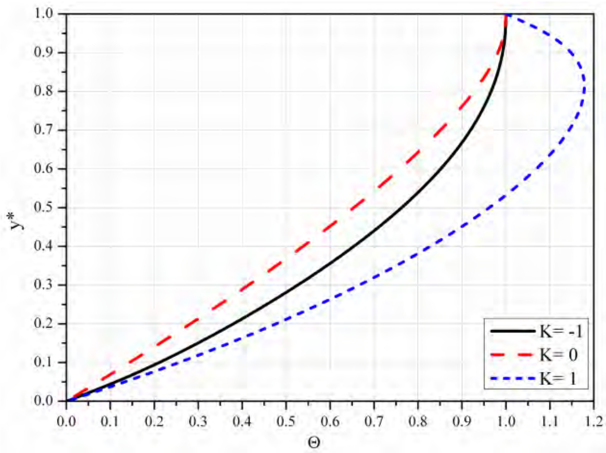
Na slikama 5.21 i 5.22 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti, respektivno. Kanal je pod uglom od 30° u odnosu na horizontalnu ravan. Na donjem zidu kanala nalaze se izvori a na gornjem ponori. Kanal je u reţimu kratkog spoja. Faktor poroznosti menjan je tako što je menjana propustljivost kanala.

Sa slike 5.21 se zaključuje da povećanje faktora poroznosti tj. smanjenje propustljivosti kanala dovodi do smanjenja brzine u kanalu i smanjenja tangencijalnih napona na donjem zidu kanala dok na gornjem zidu oni rastu. Velike vrednosti faktora poroznosti "poravnavaju" profil brzine u velikom delu poprečnog preseka kanala, a mogu dovesti skoro do zaustavljanja strujanja u najvećem delu poprečnog preseka kanala osim u uţoj zoni pored gornjeg zida.

Sa slike 5.22 se zaključuje da većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju niţe temperature u kanalu i manje količine toplote transportovane sa tečnosti na pokretni zid kanala. Temperature su, za sve vrednosti faktora poroznosti, maksimalne u gornjoj polovini kanala tj. bliţe pokretnom zidu kanala.



Slika 5.23 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti K



Slika 5.24 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K

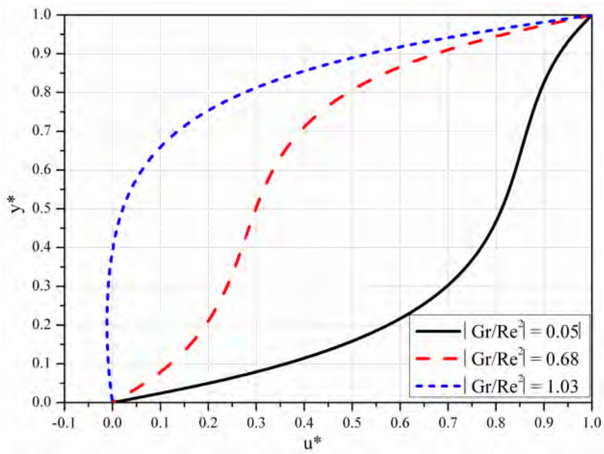
Na slikama 5.23 i 5.24 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti faktora spoljašnjeg električnog polja. Kanal sa horizontalnom ravni gradi ugao od 30°, spoljašnje magnetno polje je upravno na zidove kanala. Na donjem zidu kanala nalaze se izvori, a na gornjem ponori.

Sa slike 5.23 se zaključuje da promena jačine primenjenog spoljašnjeg električnog polja dovodi do promene uzduzne brzine u kanalu. Na slici su prikazani rasporedi za različite vrednosti faktora električnog opterećenja $K=-1;0;1$. Za $K=-1$ brzina u kanalu je najveća i u celom poprečnom preseku kanala njen smer se poklapa sa "smerom" pada pritiska u kanalu. Za $K=1$ brzina u kanalu je najmanja i u većem delu poprečnog preseka kanala ima smer koji je suprotan od "smera" pada pritiska u kanalu. Za $K=0$ brzina tečnosti u kanalu ima u celom poprečnom preseku isti smer sa "smerom" pada pritiska u kanalu.

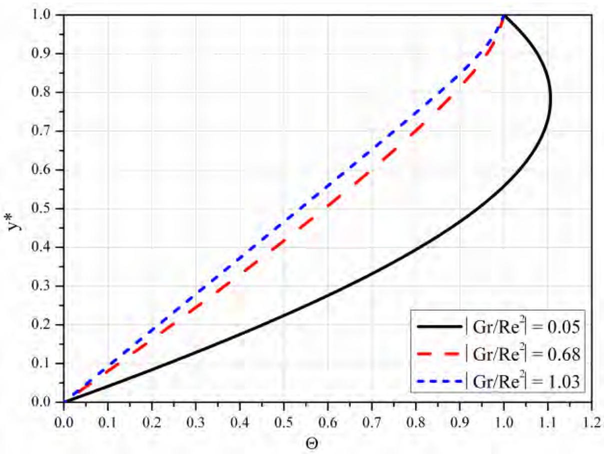
Sa slike 5.24 se zaključuje da su temperature u kanalu za vrednosti faktora opterećenja $K=\pm 1$ više od temperatura kada je kanal u reţimu kratkog spoja. Najveća količina toplote se transportuje sa tečnosti na pokretni zid kanala za slučaj $K=1$, dok za $K=-1$ i $K=0$ ovog transporta i nema.

Na slikama 5.25 i 5.26 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti odnosa Grashof-ovog broja i kvadrata Reynolds-ovog broja, respektivno. Kanal se horizontalnom ravni gradi ugao od 30°, a primenjeno spoljašnje magnetno polje je upravno na zidove kanala. Na donjem zidu kanala nalaze se izvori a na gornjem – pokretnom ponori. Kanal je u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.25 se zaključuje da sa povećanjem vrednosti ovog odnosa brzina u kanalu opada, a profil brzine se "poravnava" u većem delu poprečnog preseka kanala. Kod intenzivne slobodne konvekcije od gornje ka donjoj ploči sila potiska je suprotna smeru pada pritiska i uz magnetno polje dovodi do znatnog smanjenja brzine.



Slika 5.25 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Gr/Re^2



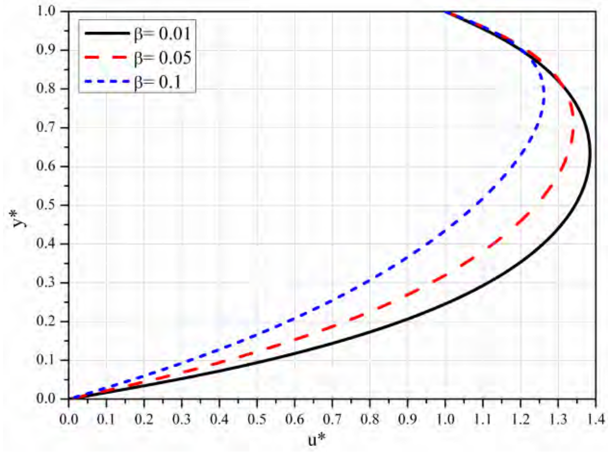
Slika 5.26 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Gr/Re^2

Sa slike 5.26 se zaključuje da povećanje vrednosti ovog odnosa dovodi do sniţenja temperature u kanalu. Za vrednosti ovog odnosa 0.68 i 1.03 nema transporta toplote sa tečnosti na gornji zid kanala dok za vrednost 0.05 on postoji. Za veće vrednosti ovog odnosa, u većem delu poprečnog preseka kanala, prenos toplote je uglavnom kondukcijom.

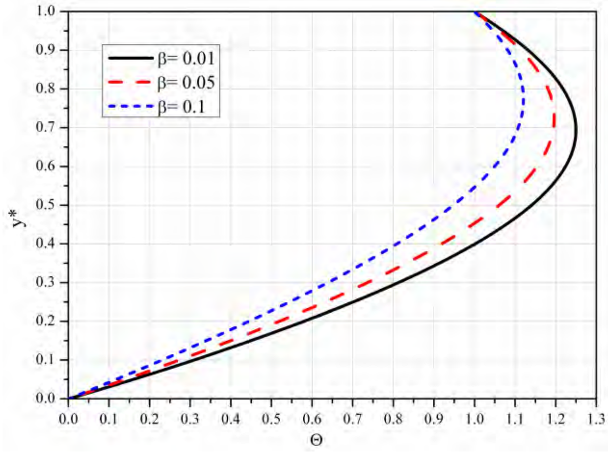
Na slikama 5.27 i 5.28 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti β, respektivno. Na ovim slikama su prikazani rasporedi kada su na donjem zidu izvori, a na gornjem ponori. Nagibni ugao kanala prema horizontali je 30°. Spoljašnje primenjeno magnetno polje je upravno na zidove kanala.

Sa slike 5.27 se zaključuje da sa porastom vrednosti β (odnosa poprečne i uzduţne brzine) opada brzina u kanalu a poloţaj njene maksimalne vrednosti se pomera ka gornjem zidu kanala. Tangencijalni napon na donjem zidu kanala opada

Sa slike 5.28 se zaključuje da se sa porastom vrednosti β sniţava temperatura u kanalu, poloţaj maksimalne temperature se pomera prema gornjem zidu kanala i smanjuje se količina toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala.

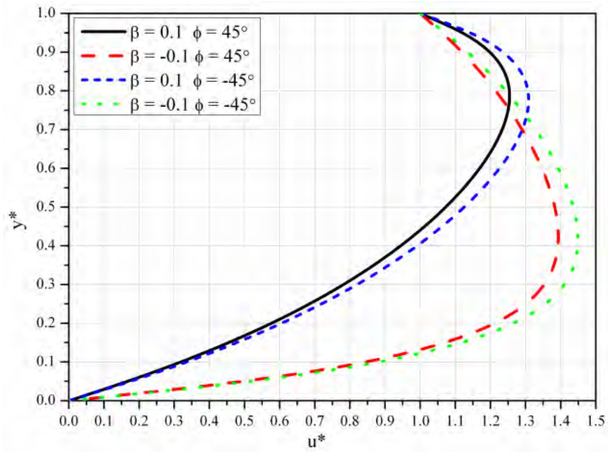


Slika 5.27 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti parametra β

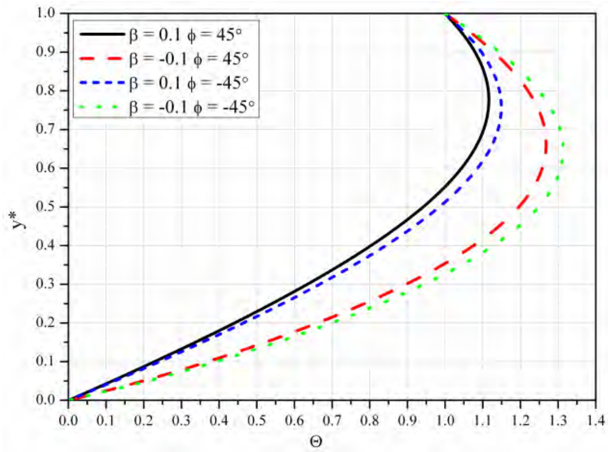


Slika 5.28 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti parametra β

.



Slika 5.29 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β i ϕ

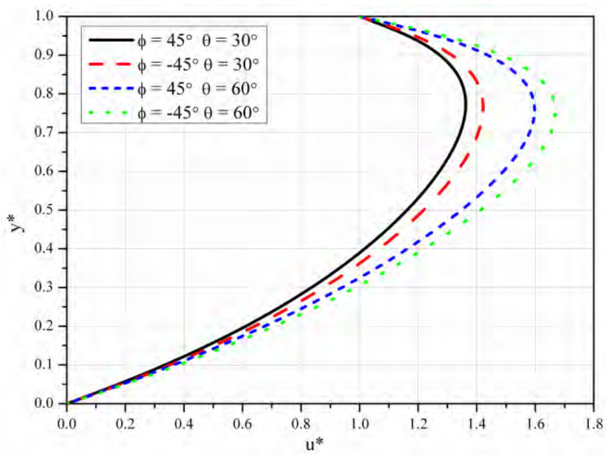


Slika 5.30 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β i ϕ

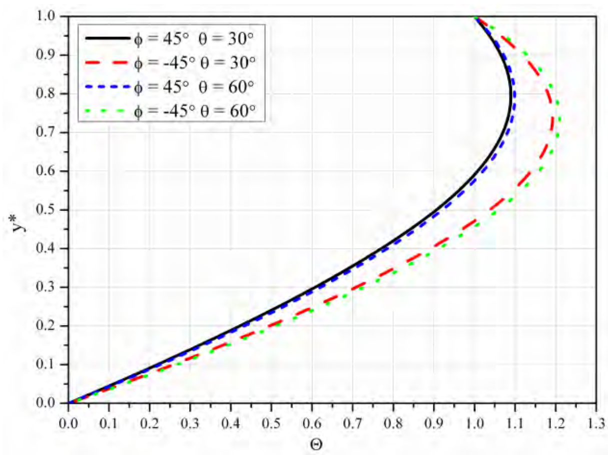
Na slikama 5.29 i 5.30 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti β i ϕ, respektivno.

Sa slike 5.29 se zaključuje da kada je kanal pod uglom od 45° "iznad" horizontalne ravni brzina u većem delu poprečnog preseka kanala veća za $\beta = -0.1$, od brzine za $\beta = 0.1$. Za $\beta = 0.1$ poloţaj maksimalne brzine je bliţi gornjem zidu, a za $\beta = -0.1$ je bliţi donjem zidu. I za slučaj kada je kanal pod uglom od 45°, ali "ispod" horizontalne ravni gornji zaključci ostaju u vaţnosti. Za istu vrednost β brzina u kanalu je veća kada je kanal "ispod" horizontalne ravni. Zaključuje se da komponenta brzine V u smeru suprotnom od y ose dovodi do malog smanjenja Lorentz-ove sile te iz tog razloga uzduţne brzine rastu i protok u kanalu se povećava. Sa druge strane promena nagiba kanala menja tj. intenzivira silu potiska i polje brzine raste ili opada u zavisnosti od ovog ugla i temperature zidova.

Sa slike 5.30 se zaključuje da je za istu vrednost ugla ϕ temperatura u kanalu viša za $\beta = -0.1$ u odnosu na slučaj kada je $\beta = 0.1$. Poloţaj maksimalne temperature je za $\beta = 0.1$ bliţi gornjem zidu u odnosu na poloţaj maksimalne temperature za slučaj kada je $\beta = -0.1$.



Slika 5.31 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti ϕ i θ



Slika 5.32 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti ϕ i θ

Na slikama 5.31 i 5.32 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu, za različite vrednosti ugla nagiba kanala i različite uglove koje gradi primenjeno spoljašnje magnetno polje sa normalom na zidove kanala, respektivno. Na donjem zidu kanala su izvori a na gornjem ponori. Kanal je u reţimu kratkog spoja.

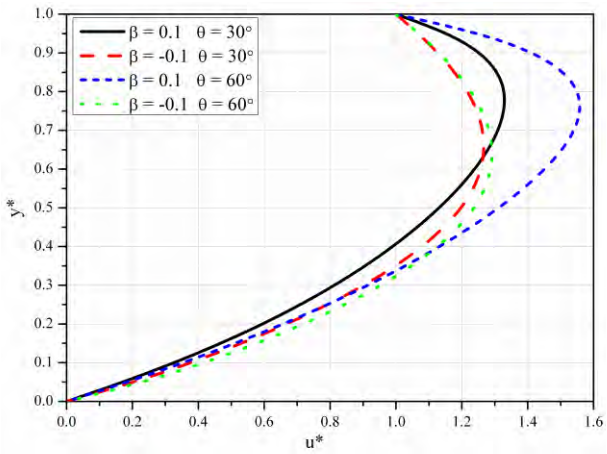
Sa slike 5.31 se zaključuje da, za istu vrednost ugla nagiba kanala, brzina u kanalu je veća za veće vrednosti ugla θ i veći su tangentncijalni naponi na zidovima kanala. Za iste vrednosti ugla θ brzine su veće za slučaj kada je kanal ”ispod” horizontalne ravni od brzina za slučaj kada je kanal “iznad” horizontalne ravni.

Sa slike 5.32 se zaključuje da je za istu vrednost ugla nagiba kanala temperatura u kanalu viša za veću vrednost ugla nagiba magnetnog polja θ. Za istu vrednost ugla θ temperatura u kanalu je viša za kanal koji je “ispod” horizontalne ravni. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala. Povećanjem ugla θ smanjuje se Lorentz-ova sila, raste protok i viskozno zagrevanje, a opada Joule-ova toplota.

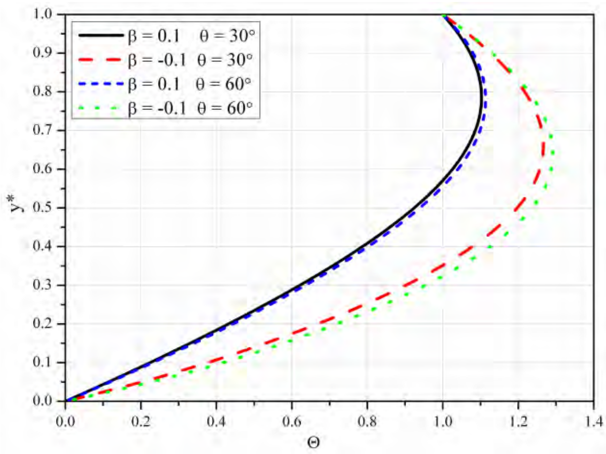
Na slikama 5.33 i 5.34 su prikazani rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti veličine β i ugla θ, respektivno.

Kanal sa horizontalnom ravni gradi ugao 60° i nalazi se "iznad" nje. Kanal je u reţimu kratkog spoja.

Sa slike 5.33 se zaključuje da je za istu vrednost β, brzina u kanalu veća za veću vrednost ugla θ, kao i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Za $\theta = 30^{\circ}$ brzina je u većem delu poprečnog preseka kanala veća za slučaj $\beta = -0.1$ od brzine za slučaj kada je $\beta = 0.1$. Za $\theta = 60^{\circ}$ brzina je u manjem delu poprečnog preseka kanala veća za slučaj kada je $\beta = -0.1$ od brzine za slučaj kada je $\beta = 0.1$.



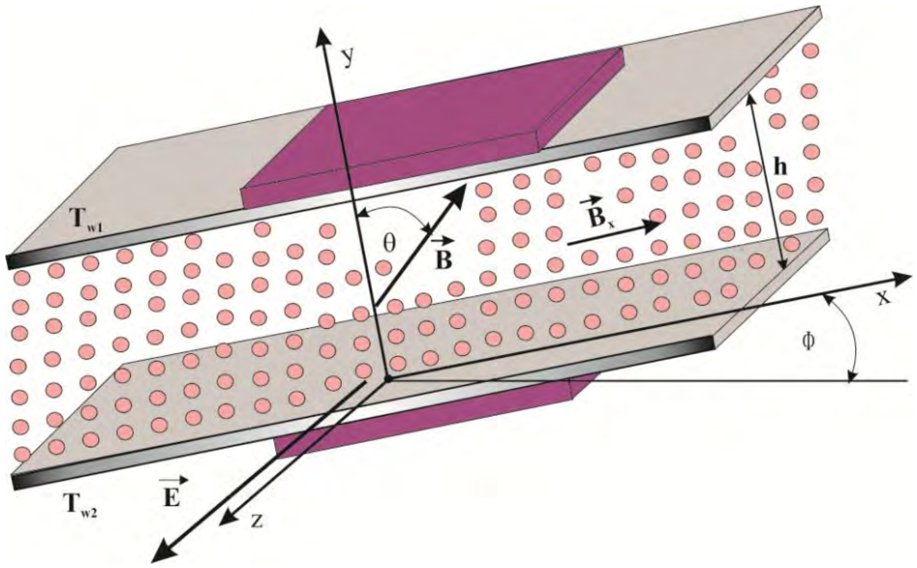
Slika 5.33 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β i θ



Slika 5.34 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β i θ

Sa slike 5.34 se zaključuje da je za istu vrednost β temperatura u kanalu viša za veću vrednost θ. Za istu vrednost θ temperatura u kanalu je viša za slučaj $\beta = -0.1$ od temperature za slučaj $\beta = 0.1$.

5.3 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini između nagnutih paralelnih ploča sa indukovanim magnetnim poljem



Slika 5c Fizički model strujanja

U ovom poglavlju se izučava MHD strujanje i prenos toplote u poroznoj sredini koja je ograničena pločama nagnutim pod uglom ϕ u odnosu na horizontalu. Zidovi kanala su nepokretni, elektro-neprovodni i nalaze se na meĎusobnom rastojanju h. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno, nalazi se u ravni uzduţnog preseka kanala i gradi ugao θ sa normalom na zidove kanala. Indukovano magnetno polje je u uzduţnoj ravni kanala i paralelno je zidovima kanala. Zidovi kanala su na stalnim temperaturama T_{w2} donji i T_{w1} gornji. Pad pritiska u kanalu je konstantan u smeru ose x, usvojenog koordinatnog sistema.

5.3.1 Matematički model

Vektor magnetne indukcije primenjenog spoljašnjeg magnetnog polja nalazi u xy ravni i moţe se predstaviti izrazom:

$$\vec{B}_0 = B_0 \sin\theta \vec{i} + B_0 \cos\theta \vec{j}, \tag{5.3.1}$$

koji uvoĎenjem oznake:

$$\lambda = \cos\theta, \tag{5.3.2}$$

postaje:

$$\vec{B}_0 = B_0\sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{i} + \lambda B_0\,\vec{j}. \tag{5.3.3}$$

Magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja je pravca ose x i moţe se predstaviti sledećim vektorom:

$$\vec{B}_x = B_x\,\vec{i}. \tag{5.3.4}$$

Rezultujuća magnetna indukcija magnetnog polja onda ima sledeću reprezentaciju:

$$\vec{B} = \left(B_x + B_0\sqrt{1-\lambda^2}\right)\vec{i} + \lambda B_0\,\vec{j}. \tag{5.3.5}$$

Kako je strujanje u kanalu ravansko, brzina u kanalu moţe se predstaviti u obliku:

$$\vec{W} = u\,\vec{i} + v\vec{j}. \tag{5.3.6}$$

Imajući u vidu sve pretpostavke o strujanju, koje su činjene i do sada, na primer u poglavlju 3.1, iz jednačine kontinuiteta (2.4.3) se dobija da je komponenta brzine u pravcu upravnom na zidove kanala konstantna. Ova komponenta brzine postoji samo u slučajevima ako na zidovima postoje izvori (ponori), a ukoliko njih nema ona je jednaka nuli. Ovde će se posmatrati slučajevi kada izvori (ponori) postoje.

Gustina električne struje definisana je izrazom:

$$\vec{j}^* = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}. \tag{5.3.7}$$

Polazeći sada od proširene Navier-Stokes-ove jednačine (2.5.14) sa dodatnim članom (5.1.1), unoseći u nju izraze (5.3.5), (5.3.6), (5.3.7) i projektujući je na ose x i y, dobijaju se sledeće jednačine:

$$\rho v\frac{du}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{\mu}{K^*}u - + \frac{\lambda B_0}{\mu_0}\frac{dB_x}{dy} - g\rho\beta_T\left(T_{w2} - T\right)\sin\phi, \tag{5.3.8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{K^*}v + \frac{1}{\mu_0}\left(B_x + B_0\sqrt{1-\lambda^2}\right)\frac{dB_x}{dy} + g\rho\beta_T\left(T_{w2} - T\right)\cos\phi = 0. \tag{5.3.9}$$

Jednačina magnetne indukcije (2.7.3) u ovom slučaju transformiše se na jednačinu:

$$\frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{d^2B_x}{dy^2} - v\frac{dB_x}{dy} + \lambda B_0\frac{du}{dy} = 0. \tag{5.3.10}$$

Jednačina energije (2.6.24), posle zamene izraza (5.3.6), (5.3.7) i uprošćenja, koja su i do sada činjena, transformiše se na jednačinu:

$$k\frac{d^2T}{dy^2}+\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{\mu}{K^*}u^2+\frac{1}{\sigma\mu_0^2}\left(\frac{dB_x}{dy}\right)^2=0. \tag{5.3.11}$$

I ovde se pretpostavlja da je pad pritiska po jedinici duţine kanala stalan tj. vaţi relacija:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=P=\text{const.} \tag{5.3.12}$$

Odgovarajući granični uslovi su:

$$\begin{gathered} u(0)=0,\ u(h)=0, \\ B_x(0)=0,\ B_x(h)=0, \\ T(0)=T_{w2},\ T(h)=T_{w1}. \end{gathered} \tag{5.3.13}$$

Jednačine (5.3.8), (5.3.9), (5.3.10), (5.3.11) i granični uslovi (5.3.13) predstavljaju matematički model problema MHD strujanja i prenosa toplote u nagnutom poroznom kanalu, koji se u ovom poglavlju izučava.

Za dalje izučavanje opisanog problema ovaj matematički model se transformiše na odgovarajući bezdimenzioni matematički model. U tom cilju se uvode bezdimenzione veličine date izrazima (3.3.9).

Korišćenjem uvedenih bezdimenzionih veličina jednačina (5.3.8) se transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}-\beta\,\mathrm{Re}\frac{du^*}{dy^*}-\Lambda u^*+\lambda\frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Rm}}\frac{db}{dy^*}+1+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\sin\phi=0, \tag{5.3.14}$$

dok se jednačina (5.3.10) se transformiše na jednačinu:

$$\frac{1}{\lambda\mathrm{Rm}}\frac{d^2b}{dy^{*2}}-\frac{\beta}{\lambda}\frac{db}{dy^*}+\frac{dK^*}{dy^*}=0, \tag{5.3.15}$$

jednačina (5.3.11) se transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}}+\mathrm{Pr\,Ec}\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2+\Lambda\,\mathrm{Pr\,Ec}u^{*2}+\mathrm{Pr\,Ec}\frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Rm}^2}\left(\frac{db}{dy^*}\right)^2=0, \tag{5.3.16}$$

i na kraju jednačina (5.3.9) se transformiše na jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_0 p}{B_0^2}\right)+\left(b+\sqrt{1-\lambda^2}\right)\frac{db}{dy^*}+\frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}\left(\beta\Lambda+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\cos\phi\right)=0. \tag{5.3.17}$$

Ovde uvedene oznake, koje su korišćene i do sada, i predstavljene su izrazima (3.1.21), (3.3.16) i (5.1.10).

Odgovarajući granični uslovi u bezdimenzionom obliku, dobijaju se iz graničnih uslova (5.3.13) i imaju sledeće oblike:

$$u^*(0)=0,\ \ u^*(1)=0,$$
$$b(0)=0,\ \ b(1)=0,$$
$$\Theta(0)=0,\ \ \Theta(1)=1. \tag{5.3.18}$$

Jednačine (5.3.14), (5.3.15), (5.3.16), (5.3.17) i granični uslovi (5.3.18) predstavljaju matematički model u bezdimenzionom obliku problema koji se ovde izučava.

5.3.2 Rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja

Za odreĎivanje rasporeda bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja neophodno je rešiti jednačine (5.3.14) i (5.3.15) koje su meĎusobno spregnute. U tom cilju se iz jednačine (5.3.14) odreĎuje veličina db/dy^* i dobija da je:

$$\frac{db}{dy^*}=\frac{Rm}{\lambda Ha^2}\left[\beta\,Re\frac{du^*}{dy^*}+\Lambda u^*-\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}-\left(1-\frac{Gr}{Re}\sin\phi\right)\right], \tag{5.3.19}$$

pri čemu se mora imati u vidu da za ovakav zapis mora biti $\lambda\neq 0$. Zamenom veličine date izrazom (5.3.19) i njenog izvoda po y^* u jednačini (5.3.15) ista se transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^3u^*}{dy^{*3}}-a_1\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}+a_2\frac{du^*}{dy^*}+a_3u^*=\beta Rm\left(1-\frac{Gr}{Re}\sin\phi\right), \tag{5.3.20}$$

u kojoj su korišćene oznake a_1 i a_3 date izrazima (3.3.21),dok je a_2 dato izrazom:

$$a_2=\beta^2\,Re\,Rm-\Lambda-\lambda^2Ha^2. \tag{5.3.21}$$

Dakle, dobijena je nehomogena diferencijalna jednačina trećeg reda sa konstantnim koeficijentima. Ova jednačina se razlikuje od jednačine (3.3.20) u tome što su im različiti nezavisni članovi i što oznaka a_2 predstavlja različite veličine, kod jedne i kod druge jednačine.

Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine ima zapis (3.3.22). Sada treba propratiti postupak koji je korišćen u poglavlju 3.3.2. Partikularno rešenje jednačine (5.3.20) je:

$$u_p^*(y^*)=\frac{1}{\Lambda}\left(1-\frac{Gr}{Re}\sin\phi\right). \tag{5.3.22}$$

Onda je, u slučaju I, opšte rešenje jednačine (5.3.20) dato izrazom:

$$\begin{aligned} u^*\left(y^*\right) &= A_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + \\ &+ [A_2 \cos\left(c_2 y^*\right) + A_3 \sin\left(c_2 y^*\right)] \exp\left(c_1 y^*\right) + \\ &+ \frac{1}{\Lambda}\left(1 + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right), \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

u kome su c_1 i c_2 date izrazima (3.3.32), a A_1, A_2 i A_3 su integracione konstante.

U slučaju II, opšte rešenje jednačine (5.3.20) ima sledeću reprezentaciju:

$$\begin{aligned} u^*\left(y^*\right) &= B_1 \exp\left(m_1 y^*\right) + B_2 \exp\left(m_2 y^*\right) + \\ &+ B_3 y^* \exp\left(m_2 y^*\right) + \frac{1}{\Lambda}\left(1 + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right), \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

u kojoj su veličine m_1 i m_2 date izrazima (3.3.36), a B_1, B_2 i B_3 su integracione konstante.

U slučaju III, opšte rešenje jednačine (5.3.20) ima zapis:

$$\begin{aligned} u^*\left(y^*\right) &= C_1 \exp\left(n_1 y^*\right) + C_2 \exp\left(n_2 y^*\right) + \\ &+ C_3 \exp\left(n_3 y^*\right) + \frac{1}{\Lambda}\left(1 + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right), \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

u kome su veličine n_1, n_2 i n_3 date izrazima (3.3.38),a C_1, C_2 i C_3 su integracione konstante.

Za sada je odreĐeno opšte rešenje jednačine (5.3.20) u sva tri slučaja koji su definisani u poglavlju 3.3.2.

Sada se prelazi na odreĐivanje opštih rešenja jednačine (5.3.19). U svakom od razmatranih slučajeva treba u jednačinu (5.3.19) uneti u^*, du^*/dy^* i d^2u^*/dy^{*2} i izvršiti integraciju tako dobijene jednačine.

Tako se u slučaju I dobija da je opšte rešenje jednačine (5.3.19) dato izrazom:

$$\begin{aligned} b\left(y^*\right) &= \frac{Rm}{\lambda Ha^2}\{A_1 L_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + \\ &+ \left(L_2 A_2 - L_3 A_3\right)\cos\left(c_2 y^*\right)\exp\left(c_1 y^*\right) + \\ &+ \left(L_2 A_3 + L_3 A_2\right)\sin\left(c_2 y^*\right)\exp\left(c_1 y^*\right) + \\ &+ \beta Re \frac{\left(1 - \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right)}{\Lambda} + A_4\} \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

u kome su veličine L_1, L_2 i L_3 date izrazima (3.3.42), a A_4 je integraciona konstanta.

Sada se, korišćenjem graničnih uslova (5.3.18) za bezdimenzionu uzduţnu brzinu i bezdimenzionu magnetnu indukciju indukovanog magnetnog polja, odreĎuju integracione konstante $A_1,\ A_2,\ A_3$ i A_4 i dobija se da su konstante $A_2,\ A_3$ i A_4 date izrazima (3.3.43), dok je konstanta A_1 data izrazom:

$$A_1 = -A_2 - \frac{1}{\Lambda^*}, \tag{5.3.27}$$

u kome je:

$$\frac{1}{\Lambda^*} = \frac{1}{\Lambda}\left(1 - \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right). \tag{5.3.28}$$

Oznake $L_9,\ L_{11},\ L_{13},\ L_{15},\ L_{16}$ i L_{17} koje se pojavljuju u izrazima za integracione konstante date su izrazima (3.3.44), dok su oznake ovde označene sa $L_{10},\ L_{12}$ i L_{14} date izrazima:

$$\begin{gathered} L_{10} = \frac{1}{\Lambda^*}\left(1 - \exp\left(r_1\right)\right), \\ L_{12} = \frac{1}{\Lambda^*}\left(\beta Re - L_1\right),\ L_{14} = \frac{1}{\Lambda^*}\left(\beta Re - L_6\right), \end{gathered} \tag{5.3.29}$$

i razlikuju se od istih oznaka u (3.3.44).

Za dalja istraţivanja izraz (5.3.26) koristiće se u sledećem obliku:

$$\begin{gathered} b\left(y^*\right) = \frac{Rm}{\lambda Ha^2}\{L_{18}\exp\left(r_1 y^*\right) + \\ + \left[L_{19}\cos\left(c_2 y^*\right) + L_{20}\sin\left(c_2 y^*\right)\right]\exp\left(c_1 y^*\right) + L_{21}\}, \end{gathered} \tag{5.3.30}$$

gde su, zbog kraćeg zapisa, uvedene oznake $L_{18},\ L_{19}$ i L_{20} date izrazima (3.3.46) i oznaka L_{21} koja ima oblik:

$$L_{21} = \frac{\beta Re}{\Lambda^*} + A_4. \tag{5.3.31}$$

Zapaţa se da se ova poslednja oznaka razlikuje od iste oznake korišćene u poglavlju 3.3.2.

Ovim su u slučaju I odreĎeni raspored bezdimenzione uzduţne brzine i raspored bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u kanalu.

Postupajući na isti način, kao u slučaju I, za slučaj II se dobija da je:

$$
\begin{aligned}
b\left(y^*\right) = \frac{Rm}{\lambda Ha^2}[&L_{22}B_1 \exp\left(m_1 y^*\right) + \\
&+\left(L_{23}B_2 - L_{24}B_3\right)\exp\left(m_2 y^*\right) + L_{23}B_3 y^* \exp\left(m_2 y^*\right) + \\
&+\frac{\beta \mathrm{Re}}{\Lambda^*} + B_4]
\end{aligned} \tag{5.5.32}
$$

gde su, zbog kraćeg zapisa, korišćene oznake (3.3.48), a B_4 je integraciona konstanta.

Koristeći granične uslove (5.3.18) dobija se da su, u ovom slučaju, integracione konstante date izrazima:

$$
\begin{gathered}
B_1 = \frac{1}{\Lambda^*}\frac{L_{32}-1}{L_{31}-L_{32}}, \quad B_2 = -B_1 - \frac{1}{\Lambda^*}, \\
B_3 = \frac{1}{L_{30}}\left(L_{28}B_1 + L_{29}B_2\right), \\
B_4 = L_{24}B_3 - L_{22}B_1 - L_{23}B_2 - \frac{\beta \mathrm{Re}}{\Lambda^*},
\end{gathered} \tag{5.3.33}
$$

gde su uvedene oznake L_{25} do L_{32} date izrazima (3.3.50).

Ovim su u slučaju II odreĎeni rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja u kanalu.

U slučaju III se dobija da je:

$$
\begin{aligned}
b\left(y^*\right) = \frac{Rm}{\lambda Ha^2}[&L_{33}C_1 \exp\left(n_1 y^*\right) + L_{34}C_2 \exp\left(n_2 y^*\right) + \\
&+L_{35}C_3 \exp\left(n_3 y^*\right) + \frac{\beta \mathrm{Re}}{\Lambda^*} + C_4]
\end{aligned} \tag{5.3.34}
$$

gde su uvedene oznake L_{33}, L_{34} i L_{35} date izrazima (3.3.52), a C_4 je integraciona konstanta.

Koristeći, kao i u prethodna dva slučaja, granične uslove (5.3.18) dobija se da su integracione konstante date izrazima:

$$
\begin{gathered}
C_1 = \frac{1}{\Lambda^*}\frac{L_{43}-L_{45}}{L_{42}L_{45}-L_{43}L_{44}}, \quad C_2 = -\frac{1}{L_{45}}\left(\frac{1}{\Lambda^*} + L_{44}C_1\right), \\
C_3 = -\frac{1}{L_{41}}\left(L_{39}C_1 + L_{40}C_2\right), \quad C_4 = -L_{33}C_1 - L_{34}C_2 - L_{35}C_3 - \frac{\beta \mathrm{Re}}{\Lambda^*}
\end{gathered} \tag{5.3.35}
$$

u kojima su, radi kraćih zapisa, korišćene oznake (3.3.54).

Ovim su i u slučaju III odreĎeni raspored bezdimenzione uzduţne brzine i raspored bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja u kanalu.

5.3.3 Rasporedi bezdimenzione temperature i pritiska

Za odreĎivanje rasporeda bezdimenzione temperature neophodno je rešiti jednačinu (5.3.16) u svakom od posmatrana tri slučaja. U tom cilju dobro je, prethodno, ovu jednačinu napisati u obliku:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^{*2}} = -\Pr Ec\left[\left(\frac{du^*}{dy^*}\right)^2 + \Lambda u^{*2} + \frac{Ha^2}{Rm^2}\left(\frac{db}{dy^*}\right)^2\right], \tag{5.3.36}$$

zatim u njoj zameniti dobijena rešenja za u^*, du^*/dy^* i db/dy^* u svakom od slučajeva I, II i III i tako dobijenu jednačinu dva puta integraliti tj. rešiti.

Tako se u slučaju I dobija da je bezdimenzioni raspored temperature dat izrazom:

$$\begin{aligned}\theta\left(y^*\right) = -\Pr Ec\{&L_{62}{}^*\exp\left(2r_1y^*\right) + L_{63}{}^*\exp\left(r_1y^*\right) + \\ &+\left[L_{64}{}^* + L_{65}{}^*\sin\left(2c_2y^*\right) + L_{66}{}^*\cos\left(2c_2y^*\right)\right]\exp\left(2c_1y^*\right) + \\ &+\left[L_{67}{}^*\sin\left(c_2y^*\right) + L_{68}{}^*\cos\left(c_2y^*\right)\right]\exp\left(\left(r_1+c_1\right)y^*\right) + \\ &+\left[L_{69}{}^*\sin\left(c_2y^*\right) + L_{70}{}^*\cos\left(c_2y^*\right)\right]\exp\left(c_1y^*\right) + \\ &+\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda^{*2}}y^{*2} + D_1y^* + D_2\},\end{aligned} \tag{5.3.37}$$

u kome su, radi kraćeg zapisa, korišćene oznake L_{46}, L_{47}, L_{48}, L_{49} date izrazima (3.3.56) i ovde uvedene oznake:

$$L^*_{50} = A_1^2\left(r_1^2 + \Lambda\right) + \frac{r_1^2L_{18}^2}{\lambda^2Ha^2},\ L^*_{51} = L_{46}^2 + \Lambda A_3^2 + \frac{L_{48}^2}{\lambda^2Ha^2},$$

$$L^*_{52} = L_{47}^2 + \Lambda A_2^2 + \frac{L_{49}^2}{\lambda^2Ha^2},\ L^*_{53} = 2\left(A_1r_1L_{46} + \Lambda A_1A_3 + \frac{r_1L_{18}L_{48}}{\lambda^2Ha^2}\right),$$

$$L^*_{54} = 2\left(A_1r_1L_{47} + \Lambda A_1A_2 + \frac{r_1L_{18}L_{49}}{\lambda^2Ha^2}\right),\ L^*_{55} = L_{46}L_{47} + \Lambda A_3A_2 + \frac{L_{48}L_{49}}{\lambda^2Ha^2},$$

$$L^*_{56} = \frac{1}{4}\frac{1}{c_2^2+c_1^2}\left(-c_2L^*_{51} + c_2L^*_{52} + 2c_1L^*_{55}\right),\ L^*_{57} = \frac{1}{4}\frac{1}{c_2^2+c_1^2}\left(c_1L^*_{51} + c_2L^*_{52} - 2c_2L^*_{55}\right),$$

$$L^*_{58} = \frac{1}{c_2^2+\left(r_1+c_1\right)^2}\left[\left(r_1+c_1\right)L^*_{53} + c_2L^*_{54}\right],\ L^*_{59} = \frac{1}{c_2^2+\left(r_1+c_1\right)^2}\left[-c_2L^*_{53} + \left(r_1+c_1\right)L^*_{54}\right],$$

$$L^*_{60} = \frac{2}{c_2^2+c_1^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*}\left(A_2c_2 + A_3c_1\right),\ L^*_{61} = \frac{2}{c_2^2+c_1^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*}\left(A_2c_1 - A_3c_2\right),$$

$$L^*_{62} = \frac{L^*_{50}}{4r_1^2},\ L^*_{63} = \frac{2A_1}{r_1^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*},\ L^*_{64} = \frac{1}{8c_1^2}\left(L^*_{51} + L^*_{52}\right),$$

$$L^*_{65} = \frac{1}{2}\frac{1}{c_2^2 + c_1^2}\left(L^*_{56}c_1 + L^*_{57}c_2\right),\ L^*_{66} = \frac{1}{2}\frac{1}{c_2^2 + c_1^2}\left(L^*_{57}c_1 - L^*_{56}c_2\right),$$

$$L^*_{67} = \frac{1}{c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2}\left(L^*_{58}\left(r_1 + c_1\right) + L^*_{59}c_2\right),\ L^*_{68} = \frac{1}{c_2^2 + \left(r_1 + c_1\right)^2}\left(L^*_{59}\left(r_1 + c_1\right) - L^*_{58}c_2\right),$$

$$L^*_{69} = \frac{1}{c_2^2 + c_1^2}\left(L^*_{60}c_1 + L^*_{61}c_2\right),\ L^*_{70} = \frac{1}{c_2^2 + c_1^2}\left(L^*_{61}c_1 - L^*_{60}c_2\right), \tag{5.3.38}$$

a gde su D_1 i D_2 integracione konstante.

Korišćenjem graničnih uslova (5.3.18) dobija se da su integracione konstante date izrazima:

$$D_2 = -L^*_{62} - L^*_{63} - L^*_{64} - L^*_{66} - L^*_{68} - L^*_{70},$$

$$D_1 = -\frac{1}{\Pr Ec} - D_2 - L^*_{71}, \tag{5.3.39}$$

gde je uvedena oznaka:

$$\begin{aligned} L^*_{71} &= L^*_{62}\exp\left(2r_1\right) + L^*_{63}\exp\left(r_1\right) + \\ &+ \left[L^*_{64} + L^*_{65}\sin\left(2c_2\right) + L^*_{66}\cos\left(2c_2\right)\right]\exp\left(2c_1\right) + \\ &+ \left[L^*_{67}\sin\left(c_2\right) + L^*_{68}\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(r_1 + c_1\right) + \\ &+ \left[L^*_{69}\sin\left(c_2\right) + L^*_{70}\cos\left(c_2\right)\right]\exp\left(c_1\right) + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda^{*2}}. \end{aligned} \tag{5.3.40}$$

U slučaju II se dobija da je raspored temperature dat izrazom:

$$\begin{aligned} \theta\left(y^*\right) &= -\Pr Ec[S^*_{15}\exp\left(2m_1y^*\right) + \\ &+ \left(S^*_{16} + S^*_{17}y^* + S^*_{18}y^{*2}\right)\exp\left(2m_2y^*\right) + \\ &+ \left(S^*_{19} + S^*_{20}y^*\right)\exp\left(\left(m_1 + m_2\right)y^*\right) + \\ &+ S^*_{21}\exp\left(m_1y^*\right) + \left(S^*_{22} + S^*_{23}y^*\right)\exp\left(m_2y^*\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda^{*2}}y^{*2} + F_1y^* + F_2], \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

gde su F_1 i F_2 integracione konstante, a radi kraćeg zapisa uvedene su oznake S_1, S_2, S_3, S_4 date izrazima (3.3.6) i dopunske oznake:

$$S^*_5 = \left(m_1^2 + \Lambda\right)B_1^2 + \frac{S_1^2}{\lambda^2 Ha^2},$$

$$S^*_6 = \left(m_2^2 + \Lambda\right)B_2^2 + B_3\left(B_3 + 2B_2m_2\right) + \frac{\left(S_2 + S_3\right)^2}{\lambda^2 Ha^2},$$

$$S^*_7 = 2\left[B_1m_1\left(B_2m_2 + B_3\right) + \Lambda B_1B_2 + \frac{S_1\left(S_2 + S_3\right)}{\lambda^2 Ha^2}\right],$$

$$S^*_8 = B_3^2\left(m_2^2 + \Lambda\right) + \frac{S_4^2}{\lambda^2 Ha^2},$$

$$S^*_9 = 2\left[B_1B_3\left(m_1m_2 + \Lambda\right) + \frac{S_1S_4}{\lambda^2 Ha^2}\right],$$

$$S^*_{10} = 2\left[B_2B_3\left(m_2^2 + \Lambda\right) + B_3^2m_2 + \frac{\left(S_2 + S_3\right)S_4}{\lambda^2 Ha^2}\right],$$

$$S^*_{11} = \frac{S^*_8}{2m_2},\; S^*_{12} = \frac{S^*_9}{m_1 + m_2},\; S^*_{13} = \frac{1}{2m_2}\left(S^*_{10} - \frac{S^*_8}{m_2}\right),$$

$$S^*_{14} = 2\frac{B_3}{m_2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*},\; S^*_{15} = \frac{S^*_5}{4m_1^2},$$

$$S^*_{16} = \frac{1}{4m_2^2} + \left(S_6 - S_{13} + \frac{S_{11}}{m_2}\right) + \frac{1}{8m_2^3}\left(\frac{S^*_8}{m_2} - S^*_{10}\right),$$

$$S^*_{17} = \frac{1}{2m_2}\left(S^*_{13} - \frac{S^*_{11}}{m_2}\right),\; S^*_{18} = \frac{S^*_{11}}{2m_2},$$

$$S^*_{19} = \frac{1}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\left(S^*_7 - S^*_{12} - \frac{S^*_9}{\left(m_1 + m_2\right)}\right),$$

$$S^*_{20} = \frac{S^*_{12}}{m_1 + m_2},\; S^*_{21} = 2\frac{B_1}{m_1^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*},$$

$$S^*_{22} = \frac{2}{m_2^2}\left(B_2 - \frac{B_3}{m_2}\right)\frac{\Lambda}{\Lambda^*} - \frac{S^*_{14}}{m_2^2},\; S^*_{23} = \frac{S^*_{14}}{m_2}. \tag{5.3.42}$$

Korišćenjem graničnih uslova (5.3.18) dobija se da su integracione konstante F_1 i F_2 date izrazima:

$$F_2 = -S^*_{15} - S^*_{16} - S^*_{19} - S^*_{21} - S^*_{22},$$

$$F_1 = -F_2 - S^*_{24} - \frac{1}{Pr\,Ec}, \tag{5.3.43}$$

gde je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka:

$$\begin{aligned}S^*_{24} &= S^*_{15}\exp\left(2m_1\right)+\left(S^*_{16}+S^*_{17}+S^*_{18}\right)\exp\left(2m_2\right)+\\&+\left(S^*_{19}+S^*_{20}\right)\exp\left(m_1+m_2\right)+\\&+S^*_{21}\exp\left(m_1\right)+\left(S^*_{22}+S^*_{23}\right)\exp\left(m_2\right)+\\&+\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda^{*2}}.\end{aligned} \tag{5.3.44}$$

U slučaju III se dobija da je raspored bezdimenzione temperature u kanalu dat izrazom:

$$\begin{aligned}\theta\left(y^*\right) &= -\Pr Ec[S^*_{31}\exp\left(2n_1y^*\right)+\\&+S^*_{32}\exp\left(2n_2y^*\right)+S^*_{33}\exp\left(2n_3y^*\right)+\\&+S^*_{34}\exp\left(\left(n_1+n_2\right)y^*\right)+S^*_{35}\exp\left(\left(n_1+n_3\right)y^*\right)+\\&+S^*_{36}\exp\left(\left(n_2+n_3\right)y^*\right)+S^*_{37}\exp\left(n_1y^*\right)+\\&+S^*_{38}\exp\left(n_2y^*\right)+S^*_{39}\exp\left(n_3y^*\right)+\\&+\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda^{*2}}y^{*2}+G_1y^*+G_2],\end{aligned} \tag{5.3.45}$$

gde su G_1 i G_2 integracione konstante a, radi kraćeg zapisa, uvedene su sledeće oznake:

$$S^*_{25} = C_1^2\left[\Lambda+n_1^2\left(1+\frac{L_{33}^2}{\lambda^2Ha^2}\right)\right],$$

$$S^*_{26} = C_2^2\left[\Lambda+n_2^2\left(1+\frac{L_{34}^2n_2^2}{\lambda^2Ha^2}\right)\right],$$

$$S^*_{27} = C_3^2\left[\Lambda+n_3^2\left(1+\frac{L_{35}^2n_3^2}{\lambda^2Ha^2}\right)\right],$$

$$S^*_{28} = 2C_1C_2\left[\Lambda+n_1n_2\left(1+\frac{L_{33}L_{34}}{\lambda^2Ha^2}\right)\right],$$

$$S^*_{29} = 2C_1C_3\left[\Lambda+n_1n_3\left(1+\frac{L_{33}L_{35}}{\lambda^2Ha^2}\right)\right],$$

$$S^*_{30} = 2C_2C_3\left[\Lambda+n_2n_3\left(1+\frac{L_{34}L_{35}}{\lambda^2Ha^2}\right)\right],$$

$$S^*_{31} = \frac{S^*_{25}}{4n_1^2},\ S^*_{32} = \frac{S^*_{26}}{4n_2^2},\ S^*_{33} = \frac{S^*_{27}}{4n_3^2},\ S^*_{34} = \frac{S^*_{28}}{\left(n_1+n_2\right)^2},$$

$$S^*_{35} = \frac{S^*_{29}}{\left(n_1+n_3\right)^2},\; S^*_{36} = \frac{S^*_{30}}{\left(n_2+n_3\right)^2},\; S^*_{37} = 2\frac{C_1}{n_1^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*},$$

$$S^*_{38} = 2\frac{C_2}{n_2^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*},\; S^*_{39} = 2\frac{C_3}{n_3^2}\frac{\Lambda}{\Lambda^*}. \tag{5.3.46}$$

Korišćenjem, kao i u prethodna dva slučaja, graničnih uslova (5.3.18) dobija se da su integracione konstante G_1 i G_2 date izrazima:

$$G_2 = -S^*_{31} - S^*_{32} - S^*_{33} - S^*_{34} - S^*_{35} - S^*_{36} - S^*_{37} - S^*_{38} - S^*_{39},$$

$$G_1 = -G_2 - S^*_{40} - \frac{1}{\Pr \mathrm{Ec}}, \tag{5.3.47}$$

gde je, radi kraćeg zapisa, uvedena oznaka:

$$\begin{aligned} S^*_{40} &= S^*_{31}\exp\left(2n_1\right) + S^*_{32}\exp\left(2n_2\right) + \\ &+ S^*_{33}\exp\left(2n_3\right) + S^*_{34}\exp\left(n_1+n_2\right) + \\ &+ S^*_{35}\exp\left(n_1+n_3\right) + S^*_{36}\exp\left(n_2+n_3\right) + \\ &+ S^*_{37}\exp\left(n_1\right) + S^*_{38}\exp\left(n_2\right) + \\ &+ S^*_{39}\exp\left(n_3\right) + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Lambda^{*2}}. \end{aligned} \tag{5.3.48}$$

Ovim su, u sva tri slučaja, odreĐeni rasporedi bezdimenzione temperature u kanalu. u analitičkom obliku.

Sada se prelazi na odreĐivanje rasporeda bezdimenzionog pritiska u kanalu u svakom od gore navedenih slučajeva. U tom cilju treba u sva tri slučaja rešiti jednačinu (5.3.17). Zato se, prethodno, ova jednačina zapisuje u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_0 p}{B_0^2}\right) = -b\frac{db}{dy^*} - \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{db}{dy^*} - \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}\left(\beta\Lambda + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\cos\phi\right), \tag{5.3.49}$$

zatim integrali i dobija da je:

$$\frac{\mu_0 p}{B_0^2} = -\frac{1}{2}b^2 - \sqrt{1-\lambda^2}\,b - \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}\left(\beta\Lambda + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\cos\phi\right)y^* + f\left(x\right), \tag{5.3.50}$$

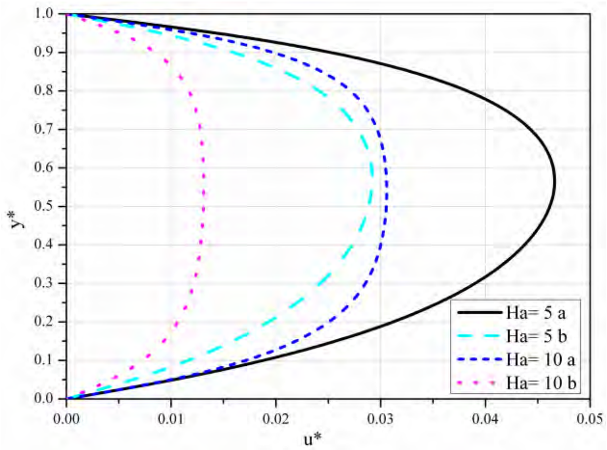
gde je, za sada, $f\left(x\right)$ proizvoljna funkcija uzduţne koordinate. Koristeći relaciju (5.3.12) i činjenicu da je u tački $x=0,\ y=0$ pritisak jednak p_0 dobija se da je raspored pritiska dat izrazom:

$$\frac{\mu_0}{B_0^2}p = \frac{\mu_0}{B_0^2}p_0 - \frac{1}{2}b^2 - \sqrt{1-\lambda^2}\,b - \frac{\mu_0}{B_0^2}Px - \frac{\mathrm{Rm}}{\mathrm{Ha}^2}\left(\beta\Lambda + \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\cos\phi\right)y^*. \tag{5.3.51}$$

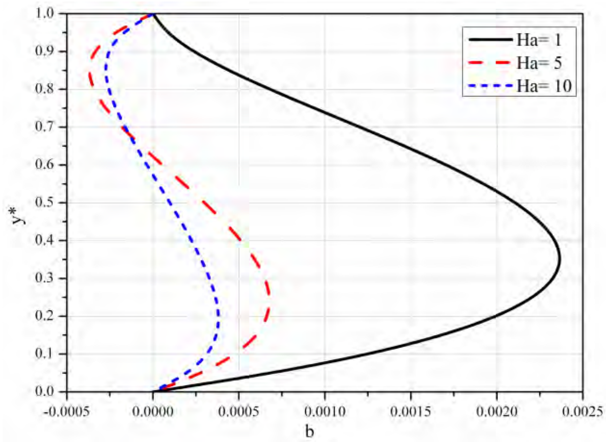
Izraz (5.3.51) je formalno isti za sva tri slučaja s tim što u njemu za veličinu b treba uzeti izraz (5.3.26) u slučaju I, izraz (5.3.32) u slučaju II i izraz (5.3.34) u slučaju III.

5.3.4 Analiza rezultata

Ovde će se izvršiti analiza rezultata dobijenih u poglavljima 5.3.2 i 5.3.3. Zbog preglednosti i jednostavnije analize deo dobijenih rezultata predstavljen je na slikama koje slede.

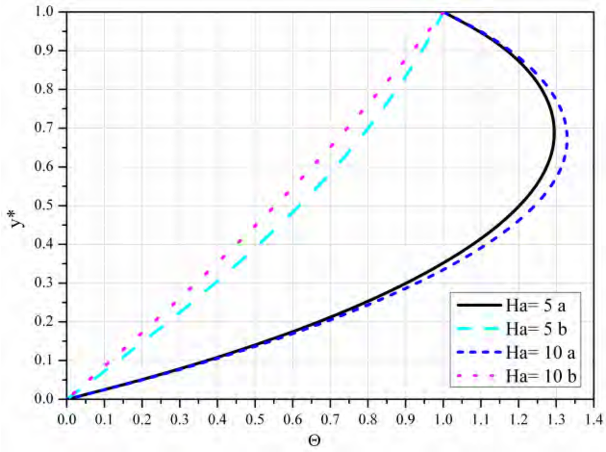


Slika 5.35 Bezdimenziona uzduţn a brzina za različite vrednosti Ha



Slika 5.36 Bezdimenziona magnetna indukcija za različite vrednosti Ha

Tako su na slikama 5.35, 5.36 i 5.37 predstavljeni rasporedi bezdimenzione uzduţ ne brzine, bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti Ha broja, respektivno. Razmatrani kanal sa horizontalnom ravni gradi ugao od 30°, njegovi zidovi su nepokretni, a na konstantnim i različitim temperaturama, elektroneprovodni. Na donjem zidu kanala nalaze se izvori, dok su na gornjem ponori. Primenjeno spoljašnje magnetno polje sa normalom na zidove kanala gradi ugao od 30°. Na slikama 5.35 i 5.37 oznake a i b odnose se na slučajeve sa indukcijom i bez indukcije, respektivno. I na narednim slikama ove oznake imaće isto značenje.



Slika 5.37 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Ha

Sa slike 5.35 se zaključuje da je, za istu vrednost Ha broja, brzina u kanalu veća kada postoji i indukovano magnetno polje od odgovarajuće brzine kada njega nema. Tangencijalni naponi na zidovima kanala su takoĎe veći. Za slučaj koji se ovde izučava, a to je kada se uzima u obzir i indukovano magnetno polje, povećanje vrednosti Ha broja dovodi do smanjenja brzine i do "poravnanja" profila brzine u kanalu, kao što je to bilo i u slučajevima do sada. Maksimalna brzina je u gornjoj polovini kanala.

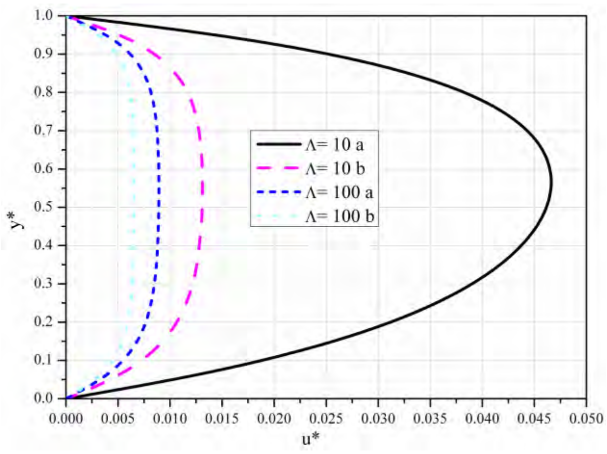
Sa slike 5.36 se zaključuje da sa porastom vrednosti Ha broja opada jačina indukovanog magnetnog polja. Indukovano magnetno polje menja i svoj smer. Za veće Ha brojeve promena smera indukovanog magnetnog polja je bliţa donjem zidu kanala. U okolini donjeg zida indukovano magnetno polje je istog smera sa smerom brzine. Indukovano magnetno polje je maksimalnog intenziteta u donjoj polovini kanala, za sve vrednosti Ha broja. Spoljašnje magnetno polje sa povećanjem svog intenziteta smanjuje mogućnost indukovanja polja jer većom silom deluje na provodnik i umanjuje njegovu brzinu. Za slučaj da se odrţava ista brzina provodnika indukovano polje bi imalo veći intenzitet.

Sa slike 5.37 se zaključuje da je za istu vrednost Ha broja temperatura u kanalu viša kada postoji i indukovano magnetno polje od odgovarajuće temperature kada se ono zanemaruje. Sa porastom vrednosti Ha broja, u ovom slučaju, raste i temperatura u kanalu.

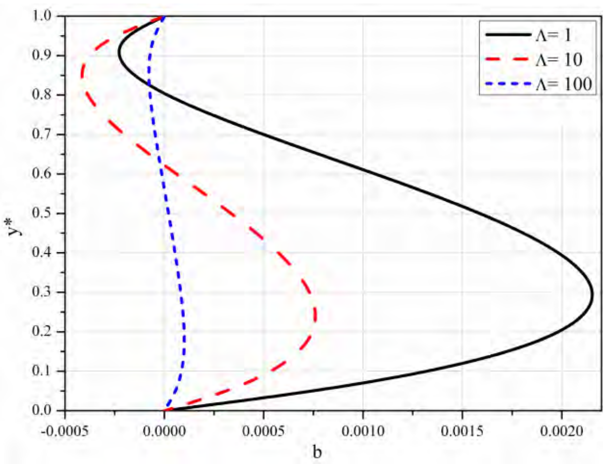
Na slikama 5.38, 5.39 i 5.40 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione magnetne indukcije i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti, respektivno. Kanal je isti kao i za slučaj kada je ispitivan uticaj Ha broja.

Sa slike 5.38 se zaključuje da je za istu vrednost fakora poroznosti brzina u kanalu veća kada postoji i indukovano magnetno polje od odgovarajuće brzine kada se ono zanemaruje, kao i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Za slučaj koji se razmatra u ovom poglavlju većim vrednostima Λ odgovaraju manje brzine u kanalu i manji tangetni naponi na zidovima kanala, a istovremeno i "ravniji" profili brzine u kanalu. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala, ali sa porastom Λ to postaje neprimetno.

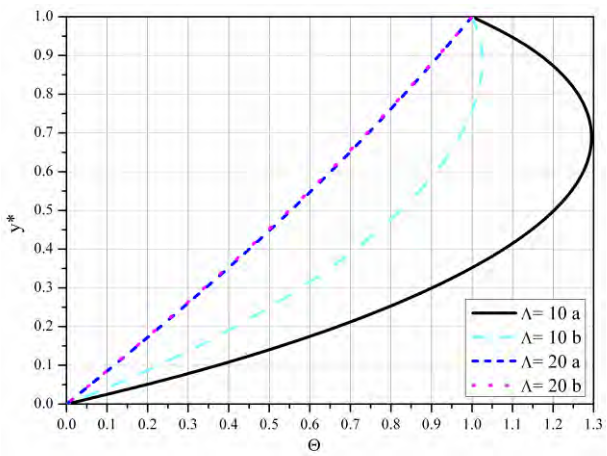
Sa slike 5.39 se zaključuje da većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju slabija indukovana magnetna polja. Indukovano magnetno polje menja svoj smer, a mesto promene je bliţe donjem zidu što je vrednost Λ veća. U okolini donjeg zida indukovano magnetno polje je istog smera sa smerom brzine u kanalu. Maksimalni intenziteti indukovanog magnetnog polja su u donjoj polovini kanala



Slika 5.38 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ



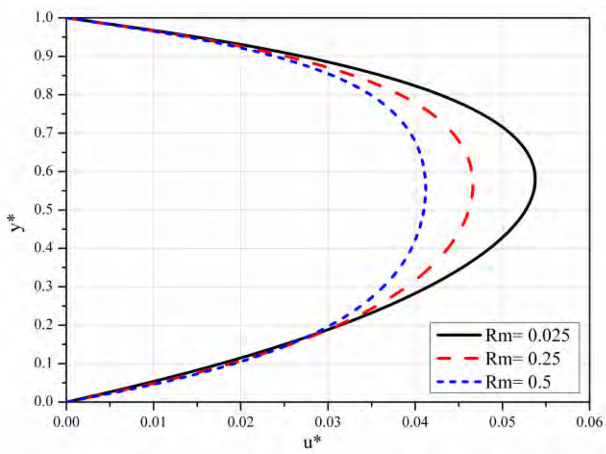
Slika 5.39 Bezdimenziona magnetna indukcija za različite vrednosti Λ



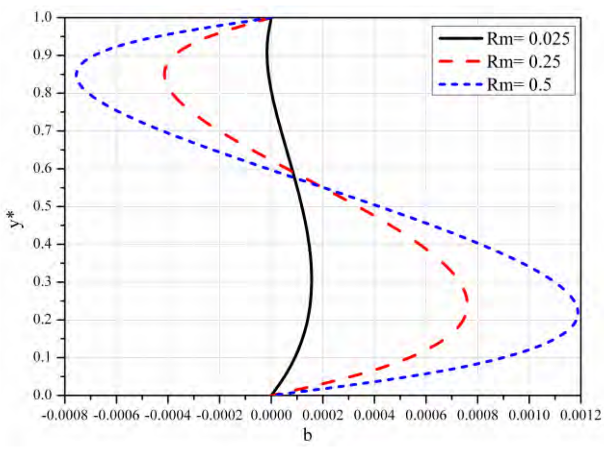
Slika 5.40 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ

Sa slike 5.40 se zaključuje da je za manje, a iste vrednosti faktora poroznosti temperatura u kanalu viša za slučaj kada je od uticaja i indukovano magnetno polje od odgovarajuće temperature kada se njegov uticaj zanemaruje. Za slučaj istih, a većih vrednosti faktora poroznosti temperature su skoro iste i kada se uzima u obzir uticaj indukovanog magnetnog polja i kada se on zanemaruje. Onda je prenos toplote u kanalu uglavnom kondukcijom. U slučaju koji se ovde razmatra većim vrednostima Λ odgovaraju niţe temperature u kanalu. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala. Za manje vrednosti Λ postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala.

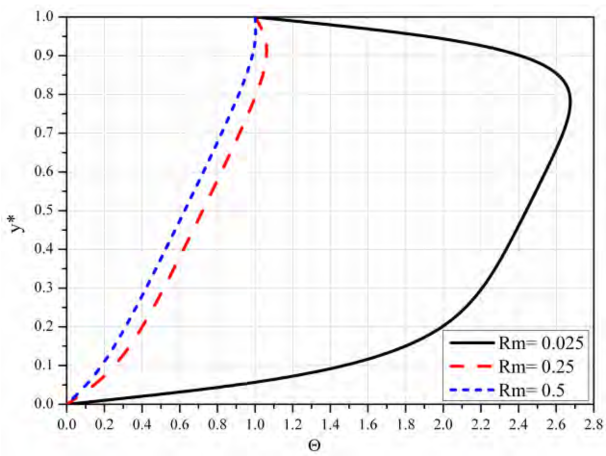
Na slikama 5.41, 5.42 i 5.43 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione magnetne indukcije i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti Rm broja, respektivno.



Slika 5.41 Bezdimenziona uzduţna brzina
za različite vrednosti Rm



Slika 5.42 Bezdimenziona magnetna indukcija
za različite vrednosti Rm



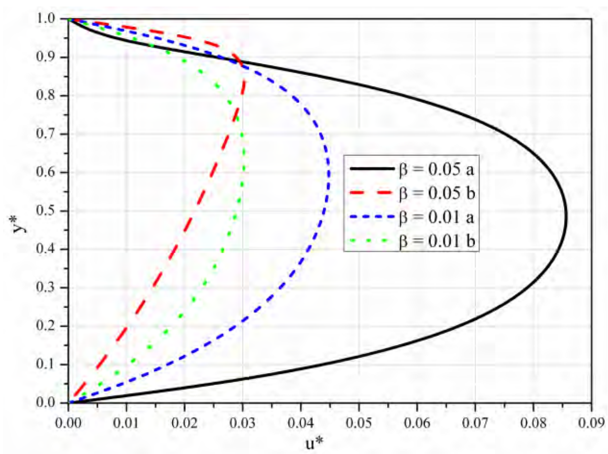
Slika 5.43 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Rm

Sa slike 5.41 se zaključuje da većim vrednostima Rm broja odgovaraju manje brzine u kanalu u većem delu poprečnog preseka kanala, a dolazi i do "poravnanja" profila brzine u poprečnom preseku kanala. Maksimalne brzine su u gornjoj polovini kanala za sve vrednosti Rm broja. Uzrok ovome je postojanje izvora na donjem zidu kanala, a ponora na gornjem zidu.

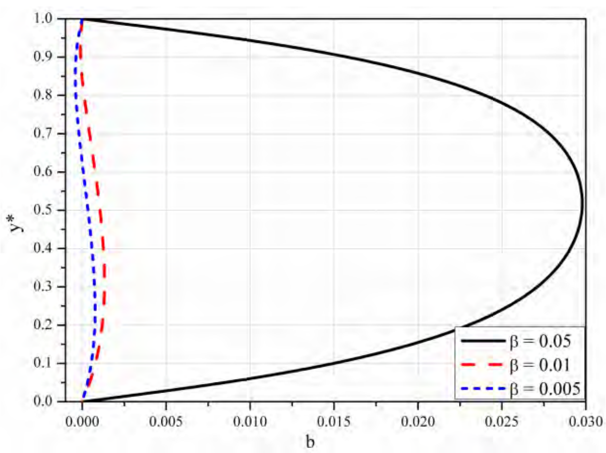
Sa slike 5.42 se zaključuje da većim vrednostima Rm broja odgovaraju jača indukovana magnetna polja. Indukovano magnetno polje menja svoj smer. Mesto promene smera indukovanog magnetnog polja je bliţe donjem zidu kanala za veće vrednosti Rm broja. U okolini donjeg zida indukovano magnetno polje ima isti smer sa smerom uzduţne brzine u kanalu.

Sa slike 5.43 se zaključuje da većim vrednostima Rm broja odgovaraju niţe temperature u kanalu i manje količine toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala. Za veće vrednosti Rm broja u većem delu poprečnog preseka kanala prenos toplote je uglavnom kondukcijom. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala za sve vrednosti Rm broja.

Na slikama 5.44, 5.45 i 5.46 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti veličine β, respektivno.

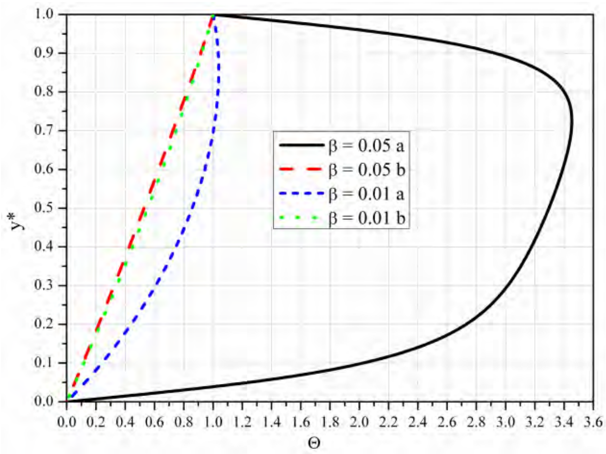


Slika 5.44 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β



Slika 5.45 Bezdimenziona magnetna indukcija za različite vrednosti β

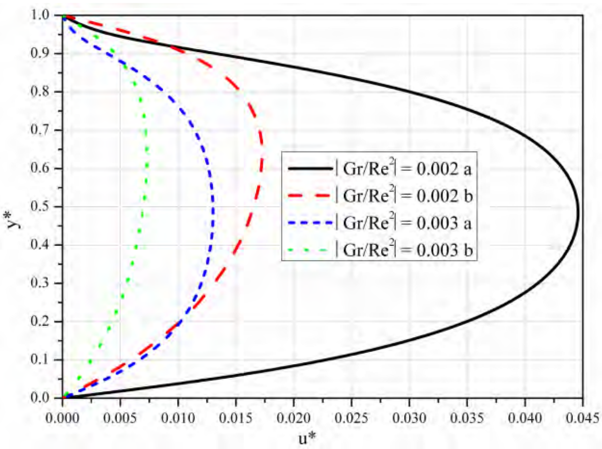
Sa slike 5.44 se zaključuje da je za istu vrednost β brzina u kanalu veća u većem delu kanala veća za slučaj kada se razmatra uticaj indukovanog magnetnog polja u poreĐenju sa odgovarajućom brzinom kada tog uticaja nema. Za slučaj koji se, u ovom poglavlju, izučava većim vrednostima β odgovaraju veće brzine, što je posledica jakih indukovanih magnetnih polja tj. smanjenog uticaja spoljašnjeg primenjenog polja.



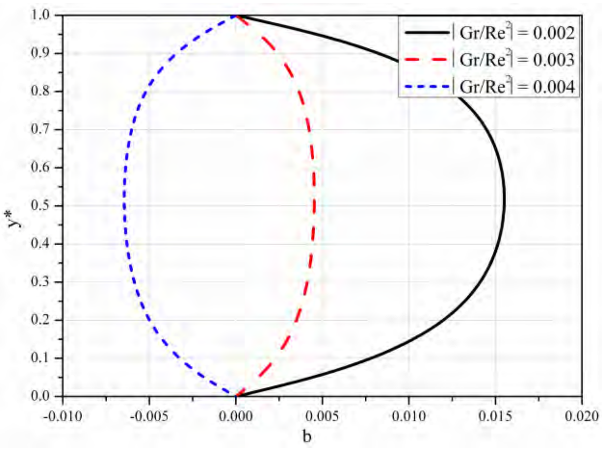
Slika 5.46 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti β

Sa slike 5.45 se zaključuje da većim vrednostima veličine β odgovara indukcija većeg intenziteta. Za $\beta = 0.05$ ovo magnetno polje ima isti smer sa smerom brzine u celom poprečnom preseku kanala, a njegov intenzitet je višestruko veći od intenziteta za druge dve vrednosti veličine β. Za $\beta = 0.01$ i $\beta = 0.005$ dolazi i do promene smera indukovanog magnetnog polja. Mesto promene smera je bliţe donjem zidu za manju vrednost β. U okolini donjeg zida smer indukovanog magnetnog polja je isti sa smerom brzine za sve ovde razmatrane vrednosti β.

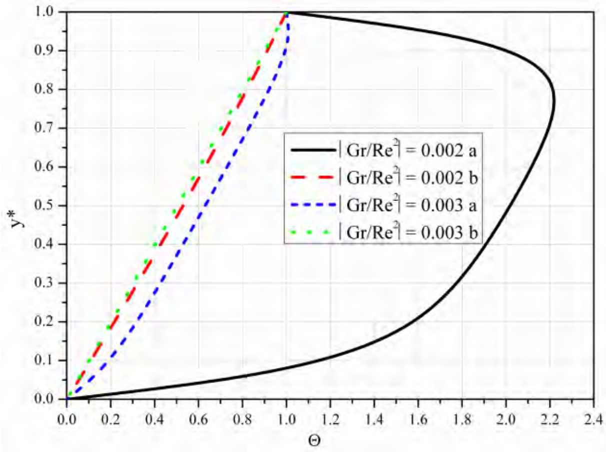
Sa slike 5.46 se zaključuje da je za istu vrednost β temperatura u kanalu viša za slučaj kada se uzima u obzir uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće temperature kada se taj uticaj zanemaruje. U slučaju koji se ovde izučava većim vrednostima β odgovaraju više temperature u kanalu i veće količine toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala.



Slika 5.47 Bezdimenziona uzduţna brzina
za različite vrednosti Gr/Re^2



Slika 5.48 Bezdimenziona magnetna indukcija
za različite vrednosti Gr/Re^2



Slika 5.49 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Gr/Re^2

Na slikama 5.47, 5.48 i 5.49 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione magnetne indukcije i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti odnosa Grashof-ovog i kvadrata Reynolds-ovog broja, respektivno.

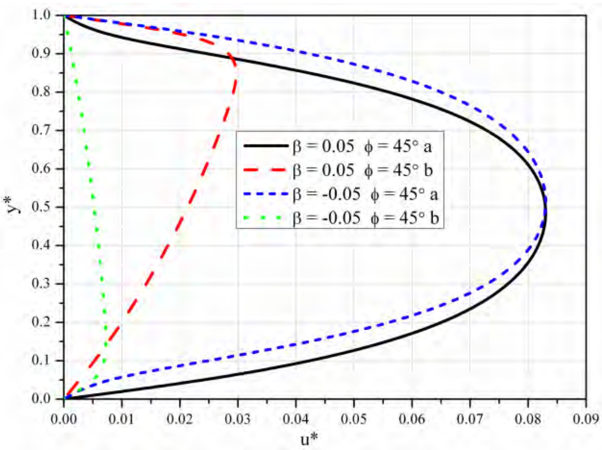
Sa slike 5.47 se zaključuje da je za istu vrednost ovog odnosa uzduţna brzina u kanalu veća u većem delu poprečnog preseka za slučaj kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće brzine kada se ovaj uticaj zanemaruje. Za slučaj koji se ovde razmatra većoj vrednosti ovog odnosa odgovara manja brzina u kanalu i manji tangencijalni naponi na zidovima kanala.

Sa slike 5.48 se zaključuje da su za odnose 0.002 i 0.003 indukovana magnetna polja, u celom poprečnom preseku kanala, istog smera sa smerom brzine u kanalu i da većoj vrednosti odnosa odgovara slabije indukovano magnetno polje. Za vrednost odnosa 0.004 indukovano magnetno polje je u celom poprečnom preseku kanala, suprotnog smera od smera brzine u kanalu. Ovaj odnos polako menja smer strujanja kako raste tj. on najpre smanjuje indukovano polje, a kasnije bi ga povećavao po apsolutnoj vrednosti.

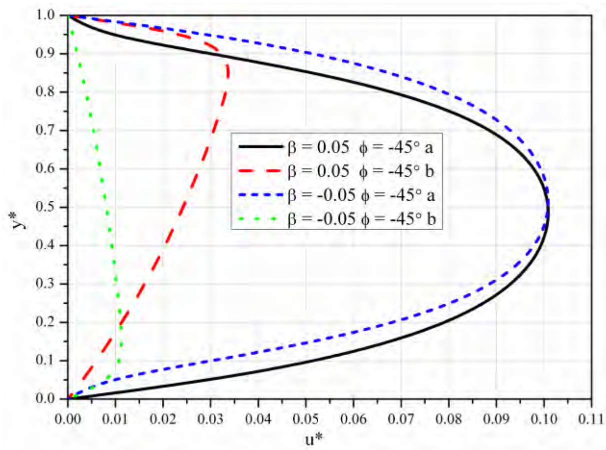
Sa slike 5.49 se zaključuje da je za istu vrednost ovog odnosa temperatura u kanalu viša kada je od uticaja i indukovano magnetno polje od odgovarajuće temperature kada ovog uticaja nema. U slučaju koji se ovde izučava većim vrednostima odnosa odgovaraju niţe temperature u kanalu i manje količine toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala.

Na slikama 5.50 i 5.51 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine u kanalu za različite vrednosti β, a za $\phi = 45^\circ$ i $\phi = -45^\circ$, respektivno. Na slici 5.52 prikazana je bezdimenziona magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti β i

ϕ. Na slikama 5.53 i 5.54 su prikazani rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti β, a za $\phi = 45^{\circ}$ i $\phi = -45^{\circ}$.



Slika 5.50 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β i $\phi = 45^{\circ}$

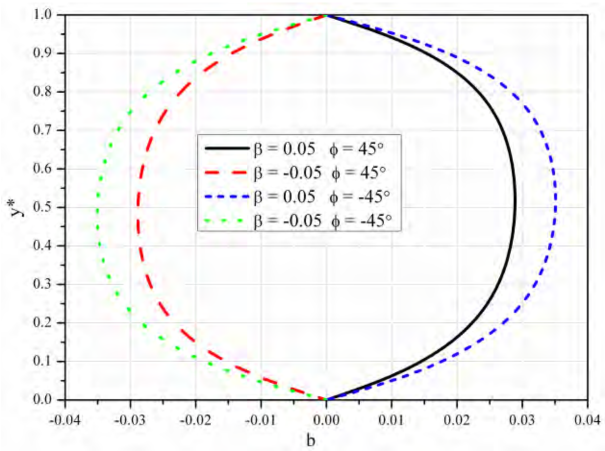


Slika 5.51 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β i $\phi = -45^{\circ}$

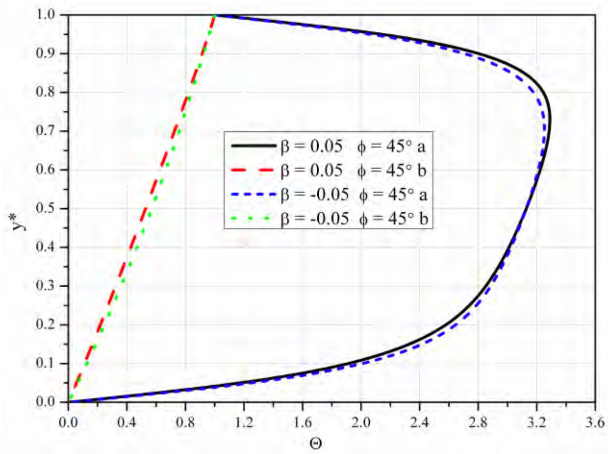
Sa slike 5.50 se zaključuje da je za istu vrednost veličine β uzduţna brzina u kanalu veća u većem delu poprečnog preseka kada se uzima i uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće brzine kada ovog uticaja nema. Za slučaj kada postoji uticaj indukovanog magnetnog polja onda je brzina u donjem delu kanala manja za $\beta = -0.05$, dok je u gornjoj polovini ona veća od brzine za $\beta = 0.05$. Ovi zaključci se odnose na kanal koji je "iznad" horizontalne ravni pod uglom od 45°, a i na kanal koji se nalazi "ispod" horizontalne ravni pod uglom od 45°, za koji su rasporedi prikazani na slici 5.51. Brzine su veće kada je kanal "ispod" horizontalne ravni od brzina kada je kanal pod istim uglom, ali "iznad" horizontalne ravni.

Sa slike 5.52 se zaključuje da je za $\beta = 0.05$, a za oba nagiba kanala indukovano magnetno polje, u celom poprečnom preseku, istog smera sa smerom uzduţne brzine u kanalu. Ovo polje je intenzivnije kada je kanal "ispod" horizontalne ravni. Za vrednost $\beta = -0.05$ indukovano magnetno polje, u celom poprečnom preseku, je suprotnog smera od smera uzduţne brzine u kanalu. Indukovano magnetno polje je jače za slučaj kada je kanal "ispod" horizontalne ravni.

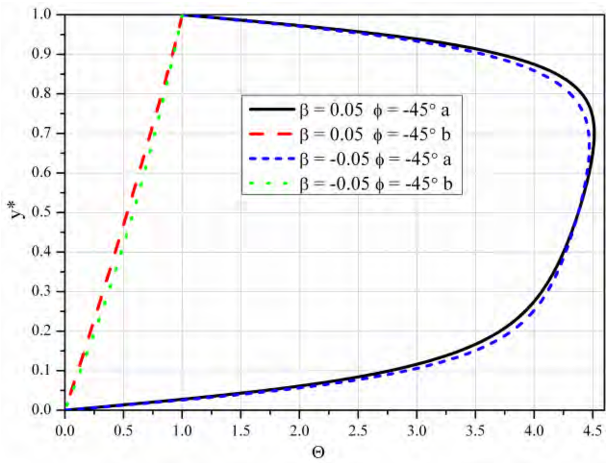
Sa slike 5.53 se zaključuje da je, za istu vrednost β, temperatura u kanalu viša za slučaj kada se uzima i uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće temperature kada se ovaj uticaj zanemaruje. Za slučaj kada se uzima i uticaj indukovanog magnetnog polja temperatura je za $\beta = -0.05$ u donjoj polovini kanala viša, a u gornjoj polovini kanala niţa od temperature kada je $\beta = 0.05$. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala. Ovi zaključci odnose se na slučaj kada je kanal pod istim uglom "ispod" horizontalne ravni za koji su rezultati prikazani na slici 5.54. Temperature u kanalu su više za slučaj kada je on pod istim uglom "ispod" horizontalne ravni.



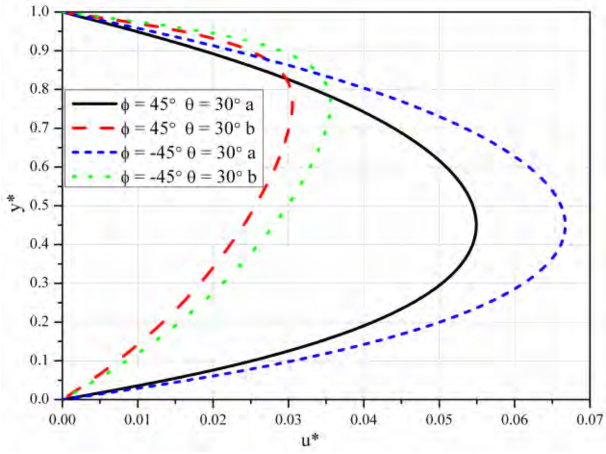
Slika 5.52 Bezdimenziono indukovano polje za različite vrednosti β i ϕ



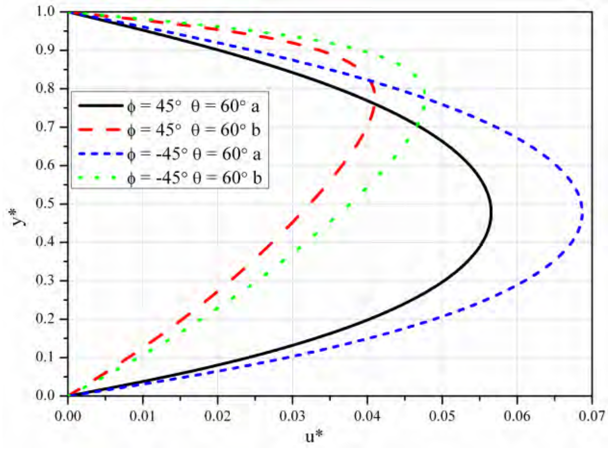
Slika 5.53 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β i $\phi = 45^{\circ}$



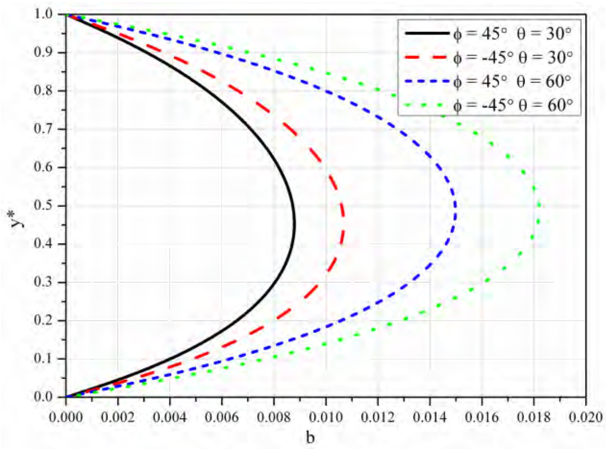
Slika 5.54 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β i $\phi = -45^{\circ}$



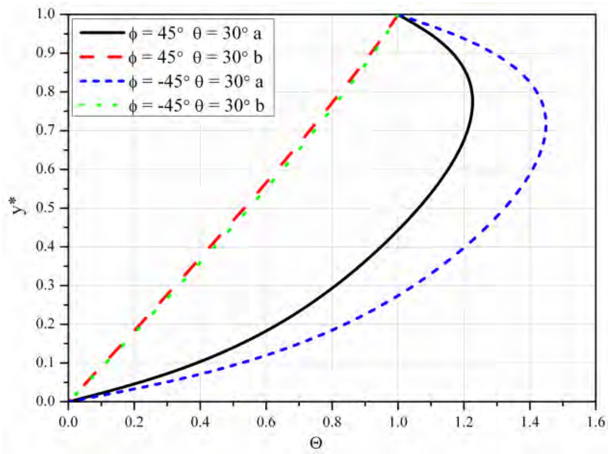
Slika 5.55 Bezdimenziona uzduţna brzina
za različite vrednosti ϕ i $\theta = 30^{\circ}$



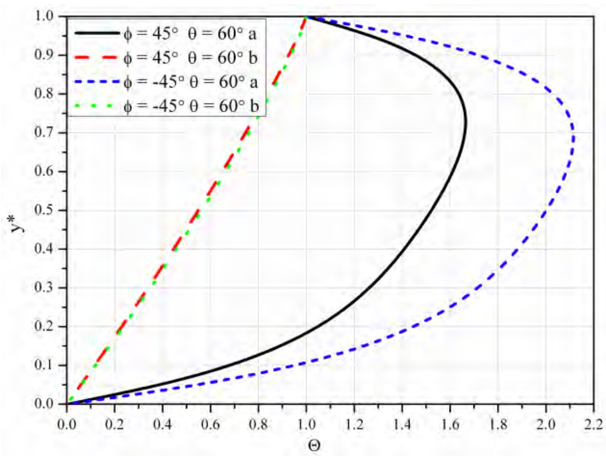
Slika 5.56 Bezdimenziona uzduţna brzina
za različite vrednosti ϕ i $\theta = 60^{\circ}$



Slika 5.57 Bezdimenziona magnetna indukcija
za različite vrednosti ϕ i θ



Slika 5.58 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti ϕ i $\theta = 30^{\circ}$



Slika 5.59 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti ϕ i $\theta = 60^{\circ}$

Na slikama 5.55 i 5.56 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine za različite vrednosti ugla ϕ, a za $\theta = 30^{\circ}$ i $\theta = 60^{\circ}$, respektivno. Na slici 5.57 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti uglova ϕ i θ. Na slikama 5.58 i 5.59 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti ugla ϕ, a za $\theta = 30^\circ$ i $\theta = 60^\circ$.

Sa slike 5.55 se zaključuje da je za istu vrednost ugla ϕ i $\theta = 30^\circ$ brzina u kanalu, za slučaj kada se uzima i uticaj indukovanog magnetnog polja, veća od odgovarajuće brzine kada se ovaj uticaj zanemaruje. Za slučaj kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja brzina u kanalu je veća kada je on "ispod" horizontalne ravni od brzine u kanalu kada je on "iznad" horizontalne ravni pod istim uglom. Tangencijalni naponi na zidovima su, u ovom slučaju, takoĎe veći. Maksimalne brzine su u donjoj polovini kanala jer su na donjem zidu ponori, a na gornjem izvori. Ovi zaključci su validni i za slučaj $\theta = 60^\circ$ za koji su rezultati prikazani na slici 5.56.

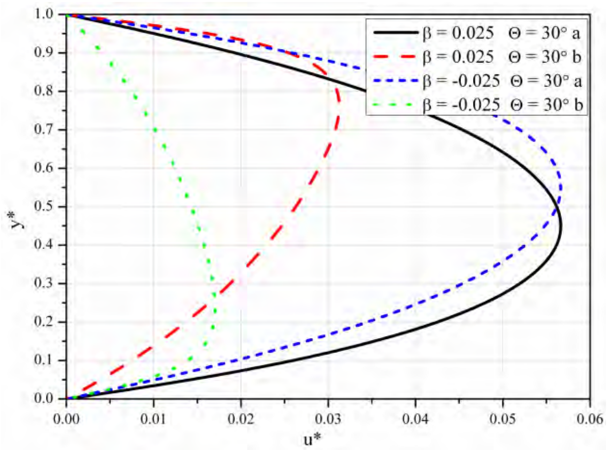
Sa slike 5.57 se zaključuje da je, za isti nagib kanala tj. za istu vrednost ugla ϕ magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja veća za veću vrednost ugla θ tj. ovde za $\theta = 60^\circ$. Za istu vrednost ugla θ, tj. za isti nagib primenjenog spoljašnjeg magnetnog polja, indukovano magnetno polje je intenzivnije za slučaj kada je kanal "ispod" horizontale od indukovanog magnetnog polja kada je kanal "iznad" horizontale pod istim uglom. Indukovano magnetno polje je, u celom poprečnom preseku, za ovde date rezultate, istog smera sa smerom uzduţne brzine u kanalu.

Sa slike 5.58 se zaključuje da je za isti nagib kanala i iste uglove θ temperatura u kanalu viša kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće temperature kada se ovaj uticaj zanemaruje. Ako se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja onda je za isti ugao θ temperatura viša u kanalu koji je "ispod" horizontalne ravni od odgovarajuće temperature u kanalu koji je "iznad" horizontalne ravni pod istim uglom. Temperature su maksimalne u gornjoj polovini kanala. Količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid veća je kada je kanal "ispod" horizontalne ravni. Ovi zaključci su validni i za slučaj kada je ugao $\theta = 60^\circ$ za koji su rezultati prikazani na slici 5.59.

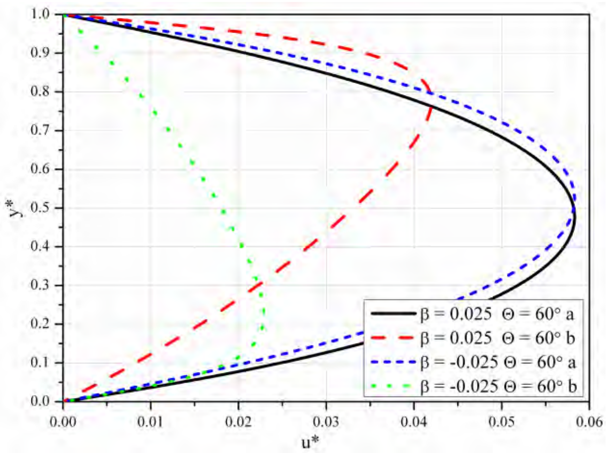
Na slikama 5.60 i 5.61 predstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine u kanalu za različite vrednosti β, a za $\theta = 30^\circ$ i $\theta = 60^\circ$, respektivno. Kao i do sada, oznaka "a" odnosi se na slučaj kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja, a oznaka "b" kada se ovaj uticaj zanemaruje. Na slici 5.62 prikazana je bezdimenziona magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja za različite vrednost β i θ. Na slikama 5.63 i 5.64

predstavljeni su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti β, a za $\theta = 30^\circ$ i $\theta = 60^\circ$, respektivno.

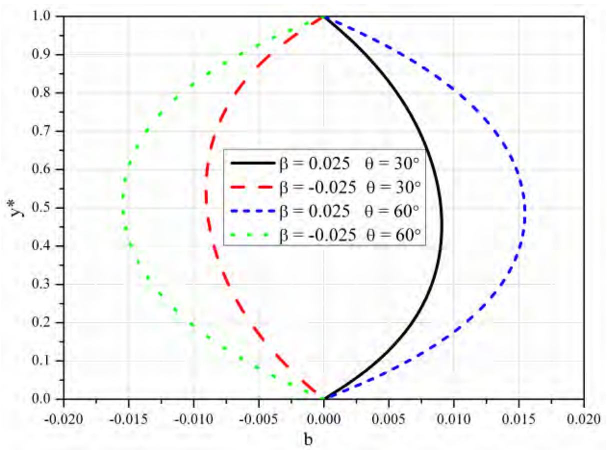
Sa slike 5.60 se zaključuje da je za istu vrednost β i iste vrednosti $\theta = 30^\circ$ uzduţna brzina u kanalu veća za slučaj kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće brzine kada se ovaj uticaj zanemari. Za slučaj $\beta = -0.025$, a kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja uzduţna brzina je u donjoj polovini kanala manja, a u gornjoj polovini kanala veća od odgovarajuće brzine za $\beta = 0.025$. Ovi zaključci su validni i za $\theta = 60^\circ$ čiji su rezultati prikazani na slici 5.61. Rezultati su za kanal koji je “iznad” horizontalne ravni i sa njom gradi ugao od 30°.



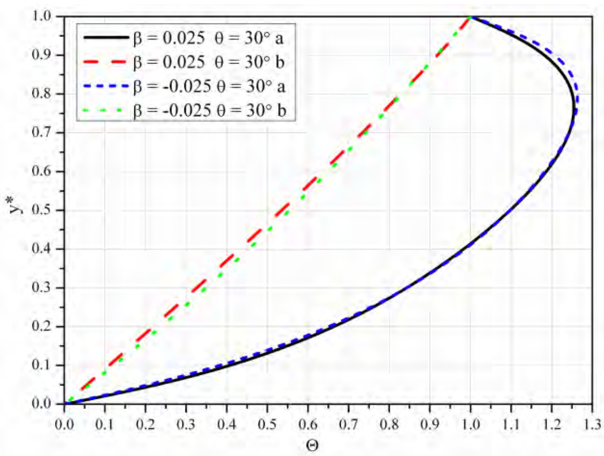
Slika 5.60 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β i $\theta = 30^\circ$



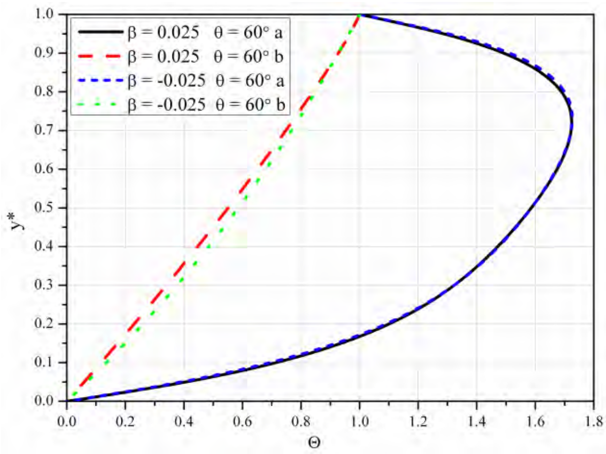
Slika 5.61 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti β i $\theta = 60^\circ$



Slika 5.62 Bezdimenziona magnetna indukcija za različite vrednosti β i θ



Slika 5.63 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β i $\theta = 30^\circ$

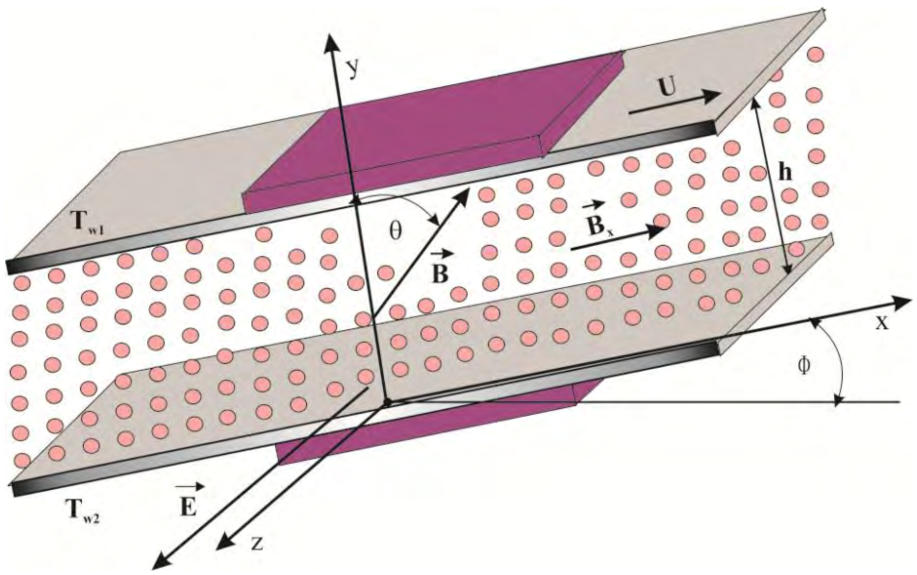


Slika 5.64 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti β i $\theta = 60^{\circ}$

Sa slike 5.62 se zaključuje da je za istu vrednost θ, indukovano magnetno polje istog smera sa smerom uzdužne brzine za $\beta = 0.025$, a suprotnog smera za $\beta = -0.025$. Za istu vrednost β indukovano magnetno polje je intenzivnije za veću vrednost θ, ovde za $\theta = 60^{\circ}$. Maksimalni intenziteti indukovanih magnetnih polja su u okolini sredine kanala.

Sa slike 5.63 i slike 5.64 se zaključuje da je za iste vrednosti β i iste vrednosti θ temperatura u kanalu viša za slučaj kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja od odgovarajuće temperature kada se ovaj uticaj zanemaruje. Rasporedi temperatura kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja za $\beta = -0.025$ i $\beta = 0.025$ skoro se poklapaju, male razlike se zapažaju u okolini zidova kanala i veće su za manju vrednost ugla θ. Maksimalne temperature su u gornjoj polovini kanala.

5.4 Slobodno konvektivno MHD strujanje u poroznoj sredini između nagnutih paralelnih ploča od kojih je gornja pokretna sa indukovanim magnetnim poljem



Slika 5d Fizički model strujanja

U ovom poglavlju se razmatra MHD strujanje i prenos toplote u poroznoj sredini ograničenoj pločama koje sa horizontalnom ravni grade ugao ϕ (videti sliku). Zidovi kanala su paralelni i nalaze se na meĐusobnom rastojanju h. Donji zid je nepokretan, a gornji se kreće konstantnom brzinom čiji je intenzitet U. Zidovi kanala su elektroneprovodni. Primenjeno spoljašnje magnetno polje je homogeno, nalazi se u ravni uzduţnog preseka kanala i gradi ugao θ sa normalom na zidove kanala. Intenzitet spoljašnjeg magnetnog polja je B_0. Zidovi kanala su na stalnim temperaturama, T_{w2} donji i T_{w1} gornji. Usled kretanja fluida indukuje se magnetno polje u uzduţnoj ravni kanala paralelno njegovim zidovima. Pad pritiska u kanalu je u smeru ose x, odabranog koordinatnog sistema.

5.4.1 Matematički model

Zapaţa se da se ovaj fizički model razlikuje od fizičkog modela izučenog u prethodnom poglavlju samo u tome što je kod njega gornji zid kanala pokretan. Imajući to u vidu, za očekivati je, da će pri formiranju odgovarajućeg matematičkog modela moći da se koriste mnogi izrazi do kojih se došlo u prethodnom poglavlju. To će se ovde, u cilju skraćenja postupka, maksimalno i iskoristiti.

Sprovodeći postupak i uprošćenja kako je to uraĎeno u prethodnom modelu dolazi se do zaključka da matematički model ovog strujanja predstavljaju jednačine (5.3.8), (5.3.9), (5.3.10), (5.3.11) i granični uslovi:

$$u(0)=0,\ u(h)=U,$$
$$B_x(0)=0,\ B_x(h)=0,$$
$$T(0)=T_{w2},\ T(h)=T_{w1}. \tag{5.4.1}$$

Dakle, jednačine su iste sa jednačinama kod prethodnog modela, a granični uslovi se razlikuju samo u graničnom uslovu za brzinu na gornjem zidu kanala. Ovde je brzina tečnosti na gornjem zidu kanala jednaka brzini kretanja tog zida.

Za dalje istraţivanje ovog problema, kako je to i do sada činjeno, formira se odgovarajući matematički model u bezdimenzionom obliku. U tom cilju se uvode bezdimenzione veličine date izrazima (3.3.9) u kojima je U intenzitet brzine kretanja gornjeg zida. Koristeći uvedene bezdimenzione veličine jednačina (5.3.8) se transformiše na bezdimenzionu jednačinu:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}}-\beta\,\mathrm{Re}\frac{du^*}{dy^*}-\Lambda u^*+\lambda\frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Rm}}\frac{db}{dy^*}+G+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}}\sin\phi=0, \tag{5.4.2}$$

gde je uvedena oznaka:

$$G=\frac{Ph^2}{\mu U}, \tag{5.4.3}$$

a jednačine (5.3.10), (5.3.11) i (5.3.9) su svedene na bezdimenzione jednačine (5.3.15), (5.3.16) i (5.3.17), respektivno. Granični uslovi (5.4.1) se transformišu na bezdimenzione granične uslove:

$$u^*(0)=0,\ u^*(1)=1,$$
$$b(0)=0,\ b(1)=0,$$
$$\Theta(0)=0,\ \Theta(1)=1. \tag{5.4.4}$$

Jednačine (5.4.2), (5.3.15), (5.3.16), (5.3.17) i granični uslovi (5.4.4) predstavljaju matematički model u bezdimenzionom obliku ovde opisanog problema.

Zapaţa se da se ovaj bezdimenzioni matematički model razlikuje od odgovarajućeg matematičkog modela problema u prethodnom poglavlju. Razlika je u jednačinama impulsa i u graničnim uslovima.

5.4.2 Rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine, magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja, temperature i pritiska

U cilju odreĎivanja ovih bezdimenzionih veličina prvo se iz jednačine (5.4.2) odreĎuje:

$$\frac{db}{dy^*} = \frac{Rm}{\lambda Ha^2}\left[\beta \operatorname{Re}\frac{du^*}{dy^*} + \Lambda u^* - \frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - \left(G + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right)\right], \tag{5.4.5}$$

a zatim i izvod tog izraza po y^* i onda se jednačina (5.3.15) transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^3u^*}{dy^{*3}} - a_1\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} + a_2\frac{du^*}{dy^*} + a_3u^* = \beta Rm\left(G + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right), \tag{5.4.6}$$

gde su oznake a_1 i a_3 date izrazima (3.3.21), a a_2 izrazom (5.3.21).

Partikularno rešenje poslednje jednačine ima reprezentaciju:

$$u_p^*\left(y^*\right) = \frac{1}{\Lambda}\left(G + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right). \tag{5.4.7}$$

Za odreĎivanje rešenja odgovarajuće homogene jednačine (5.4.6) sprovodi se postupak kao u poglavlju 3.3.2 i dobija se da ono zavisi od izraza:

$$D = \frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}, \tag{5.4.8}$$

u kome su m i n dati relacijama (3.3.25).

U slučaju I, tj. za $D > 0$ opšte rešenje jednačine (5.4.6) dato je izrazom:

$$\begin{aligned}u^*\left(y^*\right) &= A_1\exp\left(r_1y^*\right) + \\ &+ \left[A_2\cos\left(c_2y^*\right) + A_3\sin\left(c_2y^*\right)\right]\exp\left(c_1y^*\right) + \\ &+ \frac{1}{\Lambda}\left(G + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right),\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

gde su A_1, A_2 i A_3 integracione konstante, a poslednji član glasi:

$$\frac{1}{\Lambda^*} = \frac{1}{\Lambda}\left(G + \frac{Gr}{Re}\sin\phi\right), \tag{5.4.10}$$

dok su veličine c_1 i c_2 date su izrazima (3.3.32).

U slučaju II, kada je $D = 0$, opšte rešenje jednačine (5.4.6) dato je izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = B_1 \exp\left(m_1 y^*\right) + B_2 \exp\left(m_2 y^*\right) + B_3 y^* \exp\left(m_2 y^*\right) + \frac{1}{\Lambda^*}, \tag{5.4.11}$$

u kome su m_1 i m_2 dati izrazima (3.3.36), a B_1, B_2 i B_3 su integracione konstante.

U slučaju III, za $D < 0$, rešenje ove jednačine je dato izrazom:

$$u^*\left(y^*\right) = C_1 \exp\left(n_1 y^*\right) + C_2 \exp\left(n_2 y^*\right) + C_3 \exp\left(n_3 y^*\right) + \frac{1}{\Lambda^*}, \tag{5.4.12}$$

u kome su n_1, n_2 i n_3 dati izrazima (3.3.38), a C_1, C_2 i C_3 su integracione konstante.

Zamenom izraza (5.4.9) u jednačini (5.4.5) i njenim rešavanjem, dobija se da je, u slučaju I, bezdimenziona magnetna indukcija indukovanog magnetnog polja data izrazom:

$$\begin{aligned} b\left(y^*\right) = {} & \frac{Rm}{\lambda Ha^2}\{A_1 L_1 \exp\left(r_1 y^*\right) + \\ & +[\left(L_2 A_2 - L_3 A_3\right)\cos\left(c_2 y^*\right) + \\ & +\left(L_2 A_3 + L_3 A_2\right)\sin\left(c_2 y^*\right)]\exp\left(c_1 y^*\right) + \\ & +\frac{\beta Re}{\Lambda^*} + A_4\}, \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

gde su uvedene oznake L_1, L_2 i L_3 date izrazima (3.3.42), a A_4 je integraciona konstanta.

Konstante integracije A_i odreĐujuse korišćenjem graničnih uslova (5.4.4) i dobija se da su date izrazima:

$$A_2 = \frac{L_{16} - L_5 L_{17} - L_{10} L_{16}}{L_9 L_{16} + L_5 L_{15}}, \quad A_1 = -A_2 - \frac{1}{\Lambda^*},$$

$$A_3 = \frac{1}{L_{16}}\left(L_{15} A_2 + L_{17}\right), \quad A_4 = -L_{13} A_2 - L_8 A_3 - L_{14}, \tag{5.4.14}$$

u kojima su:

$$L_{10} = \frac{1}{\Lambda^*}\left[1 - \exp\left(r_1\right)\right], \quad L_{12} = \frac{1}{\Lambda^*}\left(\beta Re - L_1\right),$$

$$L_{14} = \frac{1}{\Lambda^*}\left(\beta Re - L_6\right), \tag{5.4.15}$$

a ostale oznake su date izrazima (3.3.44). Za dalje istraţivanje, za veličinu b, koristiće se sledeća reprezentacija:

$$b\left(y^*\right)=\frac{Rm}{\lambda Ha^2}\{L_{18}\exp\left(r_1 y^*\right)+$$
$$[L_{19}\cos\left(c_2 y^*\right)+L_{20}\sin\left(c_2 y^*\right)]\exp\left(c_1 y^*\right)+L_{21}\},\tag{5.4.15}$$

gde su, zbog kraćeg zapisa, uvedene oznake L_{18}, L_{19} i L_{20} date izrazima (3.3.46) i oznaka L_{21} data izrazom:

$$L_{21}=\frac{\beta Re}{\Lambda^*}+A_4.\tag{5.4.16}$$

Ovim su, u slučaju I, određeni raspored bezdimenzione uzdužne brzine i raspored bezdimenzione magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja.

Za slučaj II, zamenom izraza (5.4.11) u jednačini (5.4.5) i njenim rešavanjem dobija se da je:

$$b\left(y^*\right)=\frac{Rm}{\lambda Ha^2}[L_{22}B_1\exp\left(m_1 y^*\right)+$$
$$+\left(L_{23}B_2-L_{24}B_3\right)\exp\left(m_2 y^*\right)+\tag{5.4.17}$$
$$+L_{23}B_3 y^*\exp\left(m_2 y^*\right)+\frac{\beta Re}{\Lambda^*}+B_4],$$

gde su korišćene oznake (3.3.48), a B_4 je integraciona konstanta. Korišćenjem graničnih uslova (5.4.4) dobija se da su integracione konstante $B_i\left(i=1,2,3\right)$ date izrazima:

$$B_1=\frac{1}{L_{31}-L_{32}}+\frac{1}{\Lambda^*}\frac{L_{32}-1}{L_{31}-L_{32}},\ B_2=-B_1-\frac{1}{\Lambda^*},$$
$$B_3=\frac{1}{L_{30}}\left(L_{28}B_1+L_{29}B_2\right),\ B_4=-L_{25}B_1-L_{26}B_2-L_{27}B_3-\frac{\beta Re}{\Lambda^*},\tag{5.4.18}$$

gde su korišćene oznake date izrazima (3.3.50).

Za slučaj III, zamenom izraza (5.4.12) u jednačini (5.4.5) i njenim rešavanjem dobija se da je:

$$b\left(y^*\right)=\frac{Rm}{\lambda Ha^2}[L_{33}C_1\exp\left(n_1 y^*\right)+$$
$$+L_{34}C_2\exp\left(n_2 y^*\right)+L_{35}C_3\exp\left(n_3 y^*\right)+\tag{5.4.19}$$
$$+\frac{\beta Re}{\Lambda^*}+C_4],$$

gde su korišćene oznake (3.3.52), a C_4 je integraciona konstanta. Za određivanje integracionih konstanti $C_i\left(i=1,2,3,4\right)$ koriste se granični uslovi (5.4.4) i dobija se da su date izrazima:

$$C_1 = \frac{L_{45}}{L_{42}L_{45} - L_{43}L_{44}} + \frac{1}{\Lambda^*}\frac{L_{43} - L_{45}}{L_{42}L_{45} - L_{43}L_{44}},$$

$$C_2 = -\frac{1}{L_{45}}\left(\frac{1}{\Lambda^*} + L_{44}C_1\right),$$

$$C_3 = -\frac{1}{L_{41}}\left(L_{39}C_1 + L_{40}C_2\right),$$

$$C_4 = -L_{33}C_1 - L_{34}C_2 - L_{35}C_3 - \frac{\beta \mathrm{Re}}{\Lambda^*}, \tag{5.4.20}$$

u kojima su korišćene oznake (3.3.54).

Ovim su i u sva tri slučaja određeni rasporedi bezdimenzione uzdužne brzine i bezdimenzione indukcije indukovanog magnetnog polja u kanalu.

Za određivanje bezdimenzione temperature u kanalu treba, u sva tri slučaja, rešiti jednačinu (5.3.11). Kako je ova jednačina ista i za ovaj model strujanja i za model opisan u prethodnom poglavlju to će i rešenja biti ista.

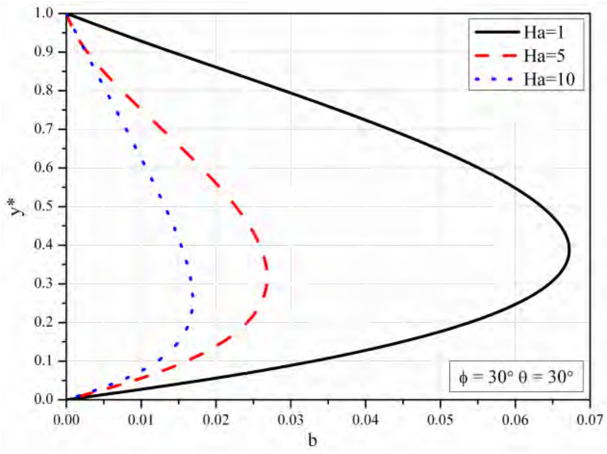
Dakle, biće data izrazima (5.3.37), (5.3.41) i (5.3.45) za slučajeve I, II i III respektivno. Naravno, za konstante A_i, B_i i C_i treba koristiti izraze date u ovom poglavlju.

Jednačina za određivanje rasporeda pritiska (5.3.17) ista je za oba modela strujanja te će i rešenja imati iste reprezentacije (5.3.51).

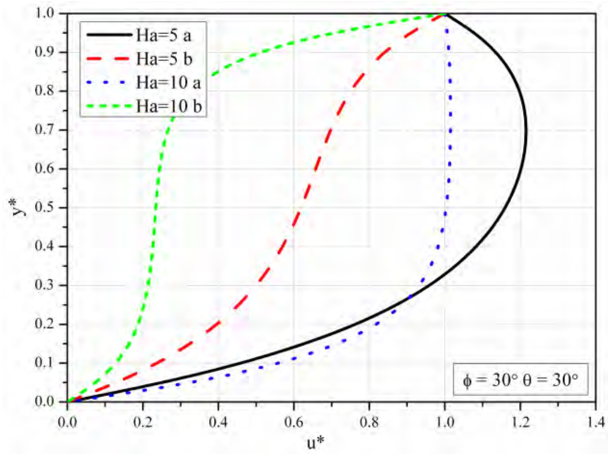
5.4.3 Analiza rezultata

Deo dobijenih rezultata, radi preglednosti i jednostavnije analize, predstavljen je na slikama koje slede. Krive sa oznakom "a" odnose se na rezultate dobijene u ovom poglavlju, a krive sa oznakom "b" odnose se na rezulate dobijene u poglavlju 5.2 tj. za slučaj kada se zanemaruje uticaj indukovanog magnetnog polja. Ovi rezultati su dati, da bi se donekle, mogla vršiti njihova poređenja.

Na slici 5.65 predstavljen je raspored intenziteta magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja za različite vrednosti Ha broja a za nagib kanala $\phi = 30^\circ$ i nagib spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja $\theta = 30^\circ$. Rezultati se odnose na slučaj kada su na donjem zidu izvori a na gornjem pokretnom zidu ponori i to za $\beta = 0.005$. Sa slike se zaključuje da većim vrednostima Ha broja tj. jačim spoljašnjim magnetnim poljima odgovaraju slabija indukovana magnetna polja, a njihove maksimalni intenziteti su bliže donjem zidu kanala. Za sve vrednosti Ha broja indukovano magnetno polje je istog smera sa smerom uzduţne brzine u kanalu.



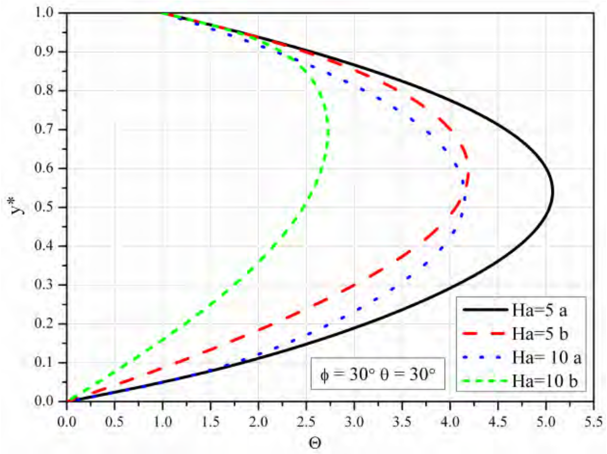
Slika 5.65 Indukovano magnetno polje za različite vrednosti Ha broja, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$



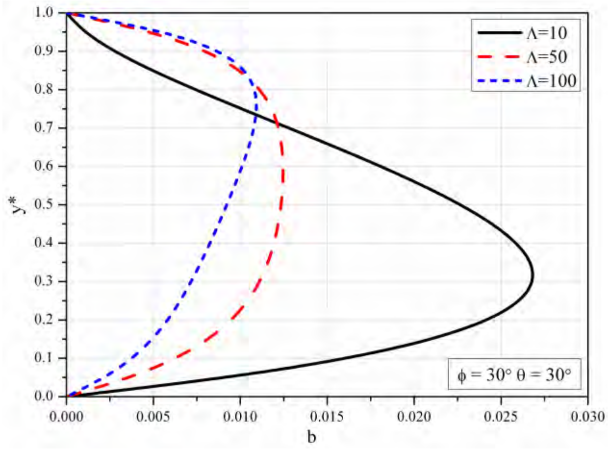
Slika 5.66 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha broja, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

Na slici 5.66 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine tečnosti u kanalu za različite vrednosti Ha broja, a za nagib kanala $\phi = 30^{\circ}$ i nagib spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja $\theta = 30^{\circ}$ i to za slučaj “a” kada se uzima uticaj indukovanog magnetnog polja i za slučaj “b” kada se taj uticaj zanemaruje. Zaključuje se, sa ove slike, da je za obe vrednosti Ha broja uzduţna brzina u kanalu veća, a posledično i protok kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja. Ovaj zaključak se moţe objasniti dodatnom Lorentz-ovom silom koja potiče od indukovanog magnetnog polja i koja, u ovom slučaju, povećava uzduţnu brzinu strujanja jer je istog pravca i smera kao i ona. Tangengencijalni napon na donjem zidu kanala je veći za slučaj “a” od odgovarajućeg napona za slučaj “b”. Za slučaj koji se izučava u ovom poglavlju, u većem delu poprečnog preseka kanala, većoj vrednosti Ha broja odgovara manja uzduţna brzina.

Na slici 5.67 prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti Ha broja, za nagib kanala $\phi = 30^{\circ}$ i nagib spoljašnjeg primenjenog magnetnog polja $\theta = 30^{\circ}$ a za slučajeve “a” i “b”. Sa ove slike se zaključuje da je za iste vrednosti Ha broja temperatura u poprečnom preseku kanala viša za slučaj “a” od temperature za slučaj “b”. Maksimalne vrednosti temperature za slučaj “a” su bliţe donjem zidu kanala, za obe vrednosti Ha broja. Za slučaj koji se izučava u ovom poglavlju (“a”) većim vrednostima Ha broja odgovaraju niţe temperature u poprečnom preseku kanala. Ovaj zaključak je validan i za slučaj “b”.

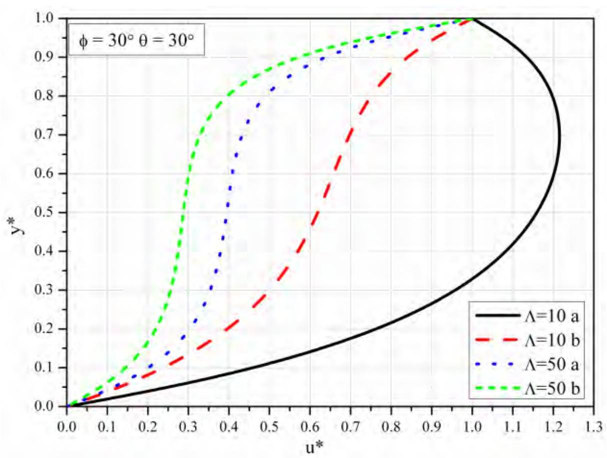


Slika 5.67 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Ha broja, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

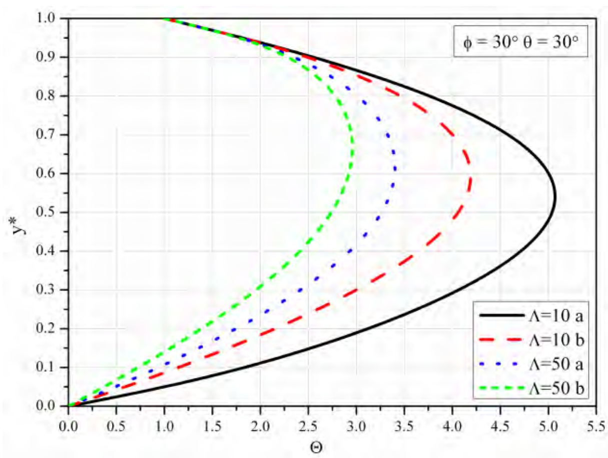


Slika 5.68 Bezdimenziono magnetno polje
za različite vrednosti Λ, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

Sa slike 5.68 se zaključuje da u većem delu poprečnog preseka kanala, bliţe donjem zidu, većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju slabija indukovana magnetna polja. U manjem delu poprečnog preseka kanala, koji je pored gornjeg pokretnog zida kanala većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju jača indukovana magnetna polja. Za sve vrednosti faktora poroznosti indukovano magnetno polje je pravca i smera uzduţne brzine tečnosti u kanalu. Sa porastom vrednosti faktora poroznosti poloţaj maksimalne vrednosti intenziteta magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja se pomera ka gornjem pokretnom zidu kanala.



Slika 5.69 Bezdimenziona brzina
za različite vrednosti Λ, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

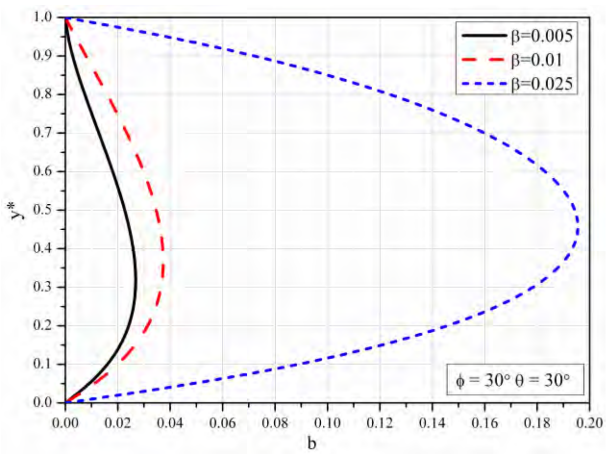


Slika 5.70 Bezdimenziona temperatura
za različite vrednosti Λ, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

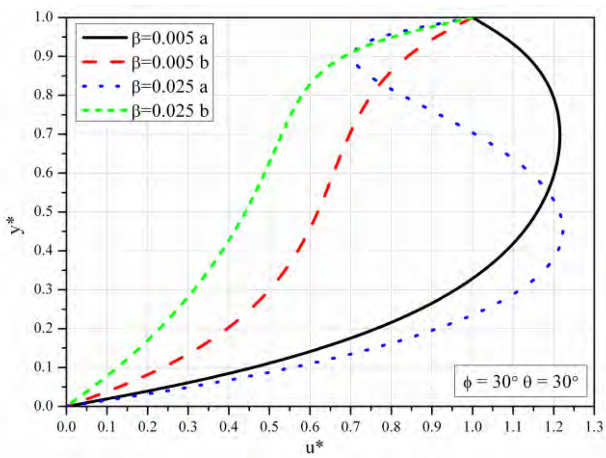
Sa slike 5.69 se zaključuje da za ovde razmatran slučaj većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju manje uzduţne brzine u kanalu. Ovaj zaključak je validan i za slučaj "b" koji je istraţen u poglavlju 5.2. Za iste vrednosti faktora poroznosti uzduţne brzine u poprečnom preseku kanala su veće za ovde razmatrani slučaj u odnosu od uzduţnih brzina u kanalu za slučaj “b”. Uzrok ovog povećanja uzduţne brzine je indukovano magnetno polje. Za sve vrednosti faktora poroznosti i za slučaj “a” i za slučaj “b” brzine su veće u gornjoj polovini kanala od brzina u donjoj polovini kanala.

Rasporedi bezdimenzione temperature u kanalu prikazani na slici 5.70 dovode do zaključka da je za veću vrednost faktora poroznosti temperatura u kanalu niţa za slučaj koji se izučava u ovom poglavlju. Isti zaključak vaţi i za slučaj “b” koji se odnosi na poglavlje 5.2. Za iste vrednosti faktora poroznosti temperatura u kanalu je niţa za slučaj “b” od temperature za slučaj “a”. Za istu vrednost Λ maksimalna temperatura u kanalu je bliţe donjem zidu u slučaju “a”. Za slučaj “a”, za veće vrednosti Λ, maksimalna temperatura u kanalu je bliţe gornjem zidu kanala. U oba slučaja količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid veća je za manje vrednosti faktora poroznosti. Za iste vrednosti Λ količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na gornji zid veća je u slučaju “a”.

Sa slike 5.71 se zaključuje da za kanal koji sa horizontalnom ravni gradi ugao od 30°, dok primenjeno spoljašnje magnetno polje sa normalom na zidove kanala gradi isti ugao a leţi u vertikalnoj ravni, pri čemu se na donjem zidu kanala nalaze izvori a na gornjem ponori, većim vrednostima veličine β odgovaraju indukovana magnetna polja većeg intenziteta. Sa povećanjem vrednosti β poloţaj maksimalnog intenziteta magnetne indukcije indukovanog magnetnog polja je bliţi gornjem pokretnom zidu kanala. Za sve vrednosti β indukovano magnetno polje je istog pravca i smera kao i uzduţna brzina.

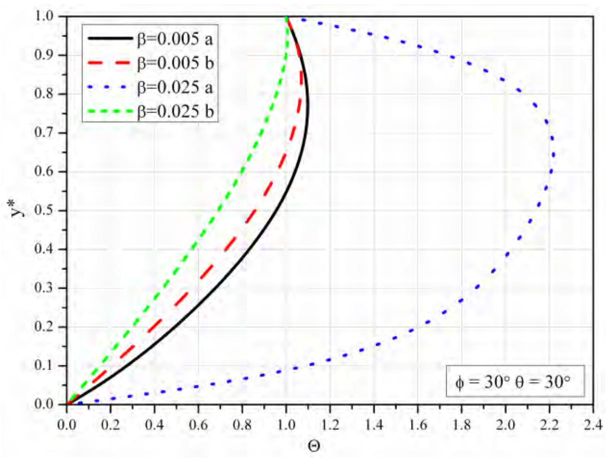


Slika 5.71 Bezdimenziono magnetno polje za različite vrednosti β, $\phi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$

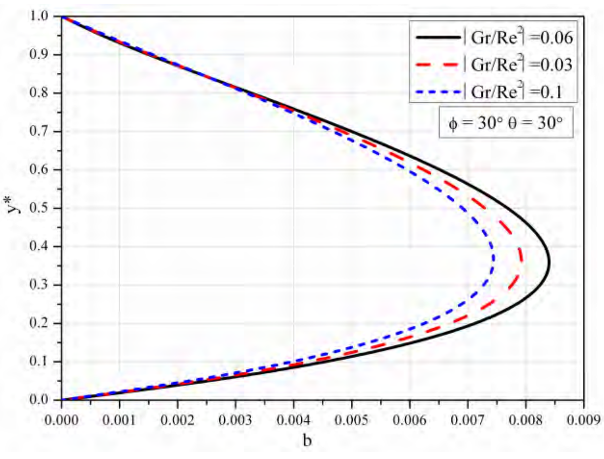


Slika 5.72 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti β, $\phi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$

Sa slike 5.72 se zaključuje da je za istu vrednost β, uzduţna brzina u kanalu veća za slučaj "a" od uzduţne brzine za slučaj "b". Za ovde razmatrani slučaj poloţaj maksimalne uzduţne brzine u kanalu je bliţi donjem zidu za veće vrednosti veličine β.



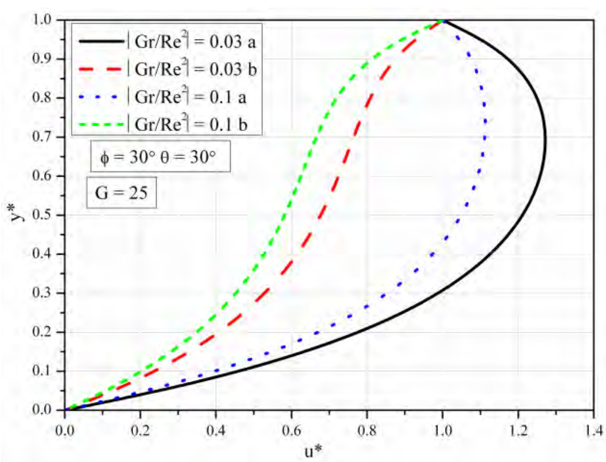
Slika 5.73 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti β, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$



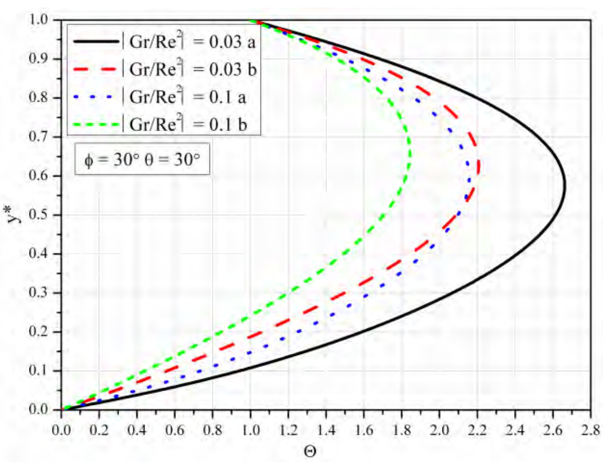
Slika 5.74 Bezdimenziono magnetno polje za različite vrednosti Gr/Re^2, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

Sa slike 5.73 se zaključuje da za ovde posmatrani slučaj većim vrednostima veličine β odgovaraju više temperature u kanalu i veće količine transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala. Za istu vrednost β temperatura u kanalu je viša a količina transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala je veća za slučaj "a".

Sa slike 5.74 se zaključuje da većim vrednostima odnosa Gr/Re^2 odgovaraju slabija indukovana magnetna polja, a za sve vrednosti ovog odnosa imaju isti pravac i smer kao i uzduţna brzina u kanalu. Sa promenom vrednosti ovog odnosa poloţaj maksimalne indukcije indukovanog magnetnog polja skoro da se ne menja.



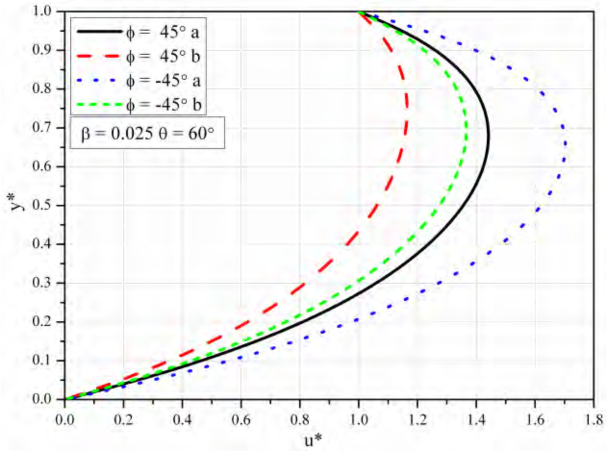
Slika 5.75 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti Gr/Re^2, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$



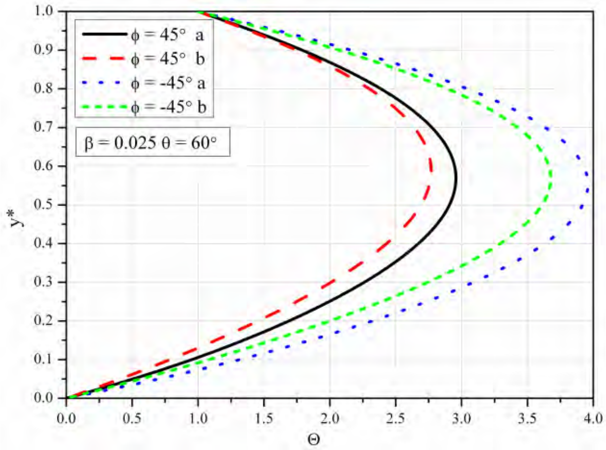
Slika 5.76 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Gr/Re^2, $\phi = 30^{\circ}$, $\theta = 30^{\circ}$

Sa slike 5.75 se zaključuje da za ovde posmatrani slučaj tj. slučaj "a" većim vrednostima odnosa $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$ odgovaraju manje uzduţne brzine u kanalu i manji tangencijalni naponi na gornjem pokretnom zidu kanala tj. sila potiska ima sada veći uticaj. Maksimalne uzduţne brzine u kanalu, u ovom slučaju, su veće od brzine kretanja gornjeg zida. Za iste vrednosti ovog odnosa veće su uzduţne brzine u kanalu za slučaj "a". Uzrok ovome je indukovano magnetno polje koje prouzrokuje dodatnu Lorentz-ovu silu koja povećava brzinu. Za slučaj "b" uzduţne brzine u kanalu su manje od brzine kretanja gornjeg zida kanala, za sve vrednosti odnosa $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$.

Sa slike 5.76 se zaključuje da za slučaj "a" većim vrednostima odnosa $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$ odgovaraju niţe temperature u kanalu i manje količine toplote transportovane sa tečnosti na gornji zid kanala. Ovi zaključci su validni i za slučaj "b". Maksimalne temperature su u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala u oba slučaja. Za iste vrednosti ovog odnosa temperatura u kanalu je viša, a količina transportovane toplote od tečnosti na gornji zid kanala veća za slučaj "a".



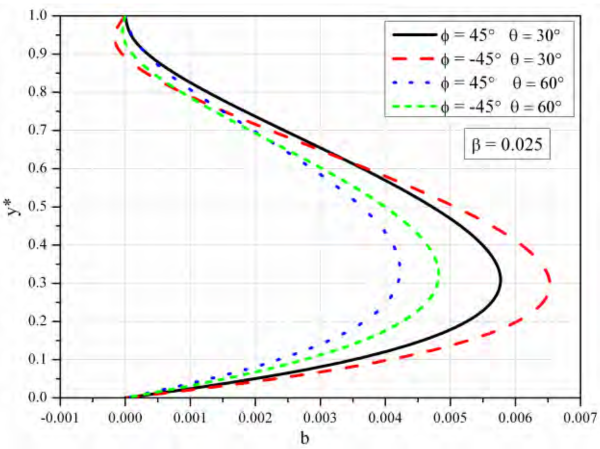
Slika 5.77 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti ϕ



Slika 5.78 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti ϕ

Na slici 5.77 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine u kanalu kada je kanal pod uglom od 45° iznad horizontalne ravni i kada je pod istim uglom, ali ispod horizontalne ravni i to za slučaj "a" i za slučaj "b". Prostije rečeno, kada je strujanje uz kanal slučaj a i niz kanal slučaj b. Sa ove slike se zaključuje da su uzduţna brzina u kanalu i tangencijalni napon na gornjem zidu veći kada je kanal "ispod" horizontalne ravni i u slučaju "a" i u slučaju "b". Za istu vrednost ugla ϕ uzduţna brzina u kanalu i tangencijalni napon na gornjem pokretnom zidu kanala su veći u slučaju “a”. Maksimalne uzduţne brzine su u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala za obe vrednosti ugla ϕ i za oba slučaja.

Sa slike 5.78 se zaključuje da su temperature u kanalu više, a količine transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala veće kada je strujanje niz kanal tj. kada se gornji zid kanala kreće naniţe i to i u slučaju “a” i u slučaju “b”. Za iste vrednosti ugla ϕ temperatura u kanalu je viša, a količina transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala veća za slučaj “a”. Maksimalne temperature su gornjoj polovini kanala za obe vrednosti ugla ϕ i oba slučaja.



Slika 5.79 Bezdimenziono indukciono polje
za različite vrednosti ϕ

Sa slike 5.79 se zaključuje da je za istu vrednost ϕ indukovano magnetno polje intenzivnije za manju vrednost ugla θ, osim u okolini gornjeg zida gde moţe biti i suprotnog smera od smera brzine kretanja gornjeg zida. Za sve vrednosti uglova ϕ i θ indukovana magnetna polja imaju maksimalne jačine u donjoj polovini poprečnog preseka kanala.

5.5 Zaključak poglavlja

Na osnovu analiza rezultata sprovedenih u poglavljima 5.1.3, 5.2.3, 5.3.4 i 5.4.3 ovde će se uktratko dati osnovni dobijeni zaključci.

Zaključuje se da većim vrednostima Hartmann-ovog broja odgovaraju manje uzduţne brzine tečnosti u kanalu, ravniji profili brzine u poprečnom preseku kanala ili delu poprečnog preseka kanala. Temperatura u kanalu je niţa. Ovi zaključci se odnose na sve slučajeve tj. kada je gornji zid kanala pokretan ili nepokretan i kada se uzima u obzir uticaj indukovanog magnetnog polja i kada se on zanemaruje. Kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja uzduţna brzina u kanalu je veća, a temperatura viša nego u slučajevima kada se ovaj uticaj zanemaruje.

Većim vrednostima faktora poroznosti odgovaraju manje uzduţne brzine tečnosti u kanalu, ravniji profili, manji tangencijalni naponi na zidovima kanala i niţa temperatura tečnosti u kanalu. Ovi zaključci se odnose na sva četiri razmatrana modela, vodeći pri tome računa da su analizirani slučajevi kada je pad pritiska konstantan, a protok promenljiv. Većim vrednostima Λ odgovaraju slabija indukovana magnetna polja u većem delu poprečnog preseka kanala. Za istu vrednost Λ uzduţna brzina u kanalu je veća, a temperatura viša kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja. Rast apsolutne vrednosti odnosa $\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$ dovodi do smanjenja uzduţne brzine tečnosti u kanalu i do sniţenja temperature tečnosti u kanalu za sva četiri posmatrana modela strujanja i prenosa toplote. Rast ovog odnosa dovodi do smanjenja intenziteta indukovanog magnetnog polja. Za istu vrednost ovog odnosa uzduţna brzina tečnosti u kanalu je veća, a temperatura viša u slučajevima kada se uzima u obzir uticaj indukovanog magnetnog polja.

Sa porastom vrednosti β, u slučajevima kada se zanemaruje uticaj indukovanog magnetnog polja, uzduţna brzina tečnosti u kanalu i temperatura u kanalu opadaju. U slučajevima kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja, većim vrednostima veličine β odgovaraju veće brzine tečnosti u celom ili većem delu kanala i više temperature u kanalu. Za pozitivne vrednosti β indukovano magnetno polje je smera brzine u kanalu, a za negativne vrednosti β ono moţe, u delu poprečnog preseka, biti i suprotnog smera. Za iste vrednosti β, uzduţna brzina je veća, a temperatura viša, u celom ili većem delu poprečnog preseka kanala, kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja.

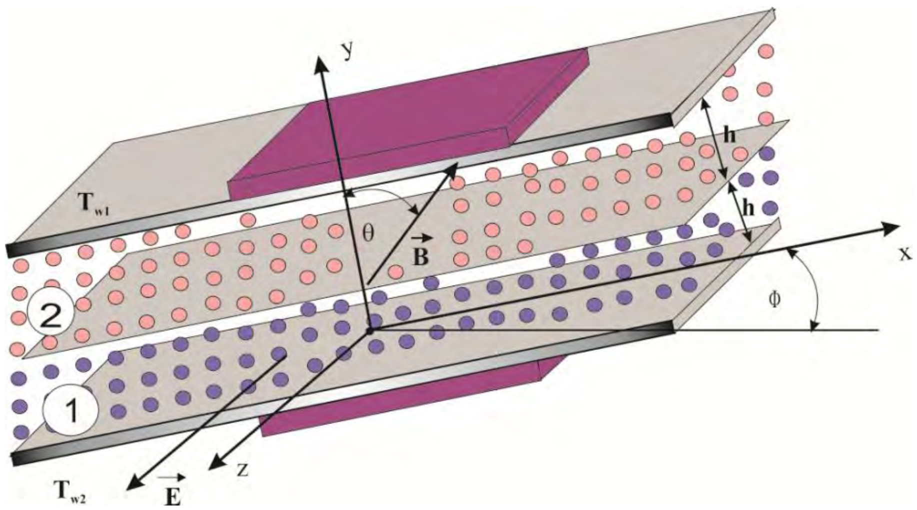
Kod kanala koji grade iste uglove sa horizontalnom ravni, većim uglovima koje gradi spoljašnje primenjeno magnetno polje sa normalom na zidove kanala, odgovaraju veće brzine u kanalu i više temperature, i to u slučajevima kada je uticaj indukovanog magnetnog polja zanemaren i u slučajevima kada se uticaj indukovanog magnetnog polja uzima u obzir. Za iste vrednosti ϕ i iste vrednosti ugla θ uzduţne brzine u kanalu su veće, a temperature u kanalu više u celom poprečnom preseku ili većem delu poprečnog preseka kanala, kada se uzima u obzir i uticaj indukovanog magnetnog polja.

Poglavlje 6

6. Slobodno konvektivno MHD strujanje dva fluida u poroznoj sredini

6.1 Slobodno konvektivno MHD strujanje dva fluida u poroznoj sredini između nagnutih paralelnih ploča

U ovom delu rada se izučava strujanje dva fluida koji se ne mešaju i prenos toplote u kanalu koji je nagnut, pod uglom ϕ, u odnosu na horizontalnu ravan. Zidovi kanala su ravni i meĐusobno paralelni, a nalaze se na stalnim temperaturama, T_{w1} gornji i T_{w2} donji. Zidovi kanala su elektroneprovodni tj. izolovani. Kanal se nalazi u homogenom magnetnom polju koje se nalazi u xOy ravni i gradi ugao θ sa y osom koja je normalna na zidove kanala. Primenjeno spoljašnje električno polje je homogeno i pravca je z ose odabranog koordinatnog sistema (vidi sliku). Sredina je, u opštem slučaju, porozna i to tako da polovine kanala imaju različite poroznosti, moţe jedna polovina da bude porozna, a jedna "slobodna", a moţe i ceo kanal da bude iste poroznosti ili "slobodan". Dakle razmatra se jedan opšti problem koji dozvoljava više mogućnosti i što se tiče samog kanala, a i fluida koji struje u njemu. Problem se razmatra sa zanemarivanjem uticaja indukovanog magnetnog polja i kada na zidovima kanala nema izvora (ponora) fluida.



Slika 6a Fizički model strujanja

6.1.1 Matematički model

Imajući u vidu prethodno rečeno o primenjenom spoljašnjem magnetnom i električnom polju ista, za izabrani koordinatni sistem, imaju sledeće reprezentacije:

$$\vec{B} = B\sin\theta\vec{i} + B\cos\theta\vec{j}, \quad \vec{E} = E\vec{k}. \tag{6.1.1}$$

Postupajući, na dalje, kako je to učinjeno u poglavlju 5.1.1 dolazi se do matematičkog modela, koga reprezentuju jednačine:

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x} + \mu_i \frac{d^2 u_i}{dy^2} - \varepsilon_i \frac{\mu_i}{K_i^*} u_i - \lambda\sigma_i B\left(E + \lambda B u_i\right) - g\rho_i\beta_{T_i}\left(T_{w2} - T_i\right)\sin\phi = 0, \tag{6.1.2}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} - \sigma_i B\sqrt{1-\lambda^2}\left(E + \lambda B u_i\right) + g\rho_i\beta_{T_i}\left(T_{w2} - T_i\right)\cos\phi = 0, \tag{6.1.3}$$

$$k_i \frac{d^2 T_i}{dy^2} + \mu_i \left(\frac{du_i}{dy}\right)^2 + \varepsilon_i \frac{\mu_i}{K_i^*} u^2 + \sigma_i \left(E + \lambda u_i B\right)^2 = 0, \tag{6.1.4}$$

u kojima su uvedene oznake:

$$\lambda = \cos\theta,$$

$$\varepsilon_i = 1 \text{ za poroznu sredinu,}$$

$$\varepsilon_i = 0 \text{ za slobodnu sredinu,} \tag{6.1.4-a}$$

i granični uslovi:

$$u(-h) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0), \quad u_2(h) = 0,$$

$$\mu_1 \frac{du_1}{dy} = \mu_2 \frac{du_2}{dy} \text{ za } y = 0,$$

$$T_1(-h) = T_{w2}, \quad T_1(0) = T_2(0), \quad T_2(h) = T_{w1},$$

$$k_1 \frac{dT_1}{dy} = k_2 \frac{dT_2}{dy} \text{ za } y = 0. \tag{6.1.5}$$

Pretpostavlja se dalje da su padovi pritiska po jedinici duţine konstantni i jednaki

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x} = P = \text{const}, \tag{6.1.6}$$

gde je P poznata konstanta.

Za dalje izučavanje ovog modela MHD strujanja i prenosa toplote, kako je to i do sada činjeno, ovaj matematički model se transformiše na bezdimenzioni oblik. U tom cilju se uvode se bezdimenzione veličine date izrazima (4.1.6), gde je veličina U data izrazom (4.1.7). Korišćenjem uvedenih bezdimenzionih veličina jednačina (6.1.2) se transformiše na bezdimenzioni oblik:

$$\frac{d^2u_i^*}{dy^{*2}}-\omega_i^2u_i^*+\gamma_i-\lambda KHa_i^2+\frac{Gr_i}{Re_i}\sin\phi=0, \tag{6.1.7}$$

u kome su uvedene oznake:

$$\Lambda_i=\frac{h^2}{K_i^*},\ Ha_i=Bh\sqrt{\frac{\sigma_i}{\mu_i}},$$

$$K=\frac{E}{BU},\ \gamma_i=\frac{\mu_1}{\mu_i},\ Re_i=\frac{Uh}{\nu_i},\ Gr_i=g\beta_{Ti}h^3\frac{T_i-T_{w2}}{\nu_i^2}. \tag{6.1.8}$$

Isto tako se jednačina (6.1.4) transformiše na jednačinu:

$$\frac{d^2\Theta_i}{dy^{*2}}+Pr_i\,Ec_i\left[\left(\frac{du_i^*}{dy^*}\right)^2+\varepsilon_i\Lambda_iu_i^{*2}+Ha_i^2\left(K+\lambda u_i^*\right)^2\right]=0, \tag{6.1.9}$$

gde su Pr_i i Ec_i dati izrazima (4.1.10). Jednačina (6.1.3) se transformiše na jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{p_i}{hP}\right)-\frac{Ha_i^2}{\gamma_i}\sqrt{1-\lambda^2}\left(K+\lambda u_i^2\right)-\frac{Gr_i}{\gamma_i\,Re_i}\cos\phi=0. \tag{6.1.10}$$

Granični uslovi (6.1.5) transformišu se na oblik (4.1.12).

Jednačine (6.1.7), (6.1.9), (6.1.10) i granični uslovi (4.1.12) predstavljaju matematički model u bezdimenzionom obliku za ovde opisani fizički model MHD strujanja i prenosa toplote.

6.1.2 Rasporedi brzine, temperature i pritiska u kanalu

Za odreĐivanjerasporeda bezdimenzione uzduţne brzine, bezdimenzione temperature i bezdimenzionog pritiska u kanalu treba rešiti jednačine (6.1.7), (6.1.9) i (6.1.10) sa graničnim uslovima (4.1.12).

U tom cilju, prvo jednačinu (6.1.7) zapišemo u obliku:

$$\frac{d^2u_i^*}{dy^{*2}}-\omega_i^2u_i^*=\lambda KHa_i^2-\gamma_i-\frac{Gr_i}{Re_i}\sin\phi. \tag{6.1.11}$$

Opšte rešenje jednačine (6.1.11) je dato izrazom:

$$u_i^*\left(y^*\right)=A_i\exp\left(\omega_iy^*\right)+B_i\exp\left(-\omega_iy^*\right)+\Omega_i, \tag{6.1.12}$$

gde su partikularna rešenja oblika:

$$\Omega_i=\frac{1}{\omega_i^2}\left(\gamma_i-\lambda KHa_i^2+\frac{Gr_i}{Re_i}\sin\phi\right), \tag{6.1.13}$$

a A_i i B_i su integracione konstante. Treba imati u vidu da je za brzinu u donjoj polovini kanala tj. za $i=1,\ -1 \le y^* \le 0,$ a za gornju polovinu kanala tj. $i=2,\ 0 \le y^* \le 1.$

Korišćenjem graničnih uslova (4.1.12), za bezdimenzionu uzdužnu brzinu, određuju se integracione konstante $A_1,\ A_2,\ B_1$ i B_2 i one imaju reprezentacije (4.1.18). Naravno, treba imati u vidu da se sada veličine Ω_1 i Ω_2 dobijaju iz izraza (6.1.13) stavljajući $i=1$ i $i=2$ respektivno i da se razlikuju od odgovarajućih veličina kod modela analiziranog u poglavlju 4.1.

Iz jednačina (6.1.9) dobija se da njihova rešenja imaju reprezentacije (4.1.20) u kojima su ovde, za razliku od 4.1, veličine $L_i,\ M_i$ i N_i date izrazima:

$$L_i = \frac{2}{\omega_i^2}\left(\Omega_i\omega_i^2 + \lambda K Ha_i^2\right)A_i,$$

$$M_i = \frac{2}{\omega_i^2}\left(\Omega_i\omega_i^2 + \lambda K Ha_i^2\right)B_i,$$

$$N_i = \frac{1}{2}\left[\Omega_i\left(\Omega_i\omega_i^2 + 2\lambda K Ha_i^2\right) + K^2 Ha_i^2\right]. \tag{6.1.14}$$

Integracione konstante C_i i D_i imaju iste reprezentacije kao i u 4.1 i date su izrazima (4.1.22), s tim što treba obratiti pažnju da su $L_i,\ M_i$ i N_i različite veličine ovde i kod modela u poglavlju 4.1.

Integracijom jednačine (6.1.10) dobija se da su rasporedi pritiska u donjoj i gornjoj polovini kanala dati izrazima:

$$\frac{p_i}{hP} = \frac{\lambda\beta_i}{\omega_i}\left[A_i \exp\left(\omega_i y^*\right) - B_i \exp\left(-\omega_i y^*\right)\right] + P_i y^* - \frac{x}{h} + E_i, \tag{6.1.15}$$

u kojima su, radi kraćeg zapisa, uvedene oznake:

$$P_i = \lambda\beta_i\Omega_i + \beta_i K - \frac{Gr_i}{\gamma_i \, Re_i}\cos\phi, \quad \beta_i = \frac{Ha_i^2}{\gamma_i}\sqrt{1-\lambda^2}, \tag{6.1.16}$$

a E_i su integracione konstante.

Ako je na primer u tački $\left(x=0, y=-h\right)$ pritisak poznat i iznosi p_A onda su integracione konstante E_1 i E_2 date izrazima:

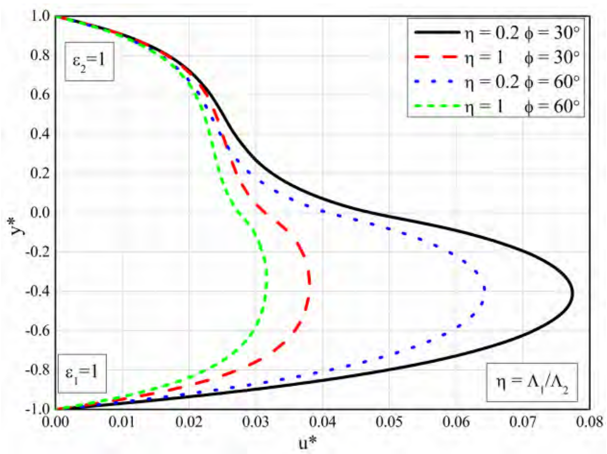
$$E_1 = \frac{p_A}{hP} + P_1 - \frac{\lambda\beta_1}{\omega_1}\left[A_1 \exp\left(-\omega_1\right) - B_1 \exp\left(\omega_1\right)\right],$$

$$E_2 = E_1 + \frac{\lambda\beta_1}{\omega_1}\left(A_1 - B_1\right) - \frac{\lambda\beta_2}{\omega_2}\left(A_2 - B_2\right). \tag{6.1.17}$$

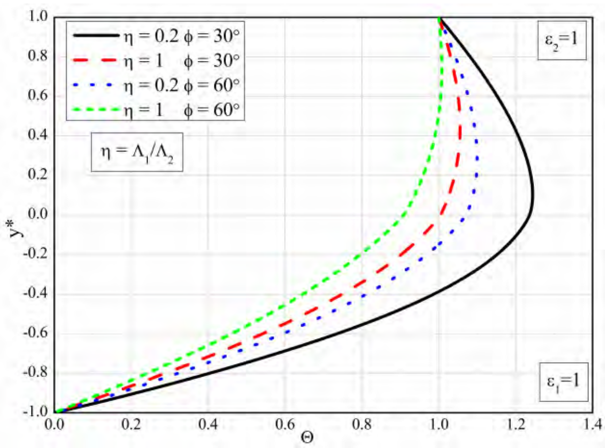
Ovim su odreĎeni rasporedi bezdimenzionih uzduţnih brzina, bezdimenzionih temperatura i pritisaka u kanalu.

6.1.3 Analiza rezultata

Deo dobijenih rezultata, radi preglednosti i jednostavnije analize, prikazan je na slikama koje slede. Tako su na slici 6.1 i slici 6.2 prikazani rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu za različite vrednosti odnosa faktora poroznosti $\eta = \Lambda_1/\Lambda_2$ i ugla nagiba kanala, respektivno. U ovom slučaju je fluid u gornjoj polovini kanala viskozniji od fluida u donjoj polovini kanala, a $Ha_2 > Ha_1$. Prilikom analize menjana je propustljivost donje polovine kanala.



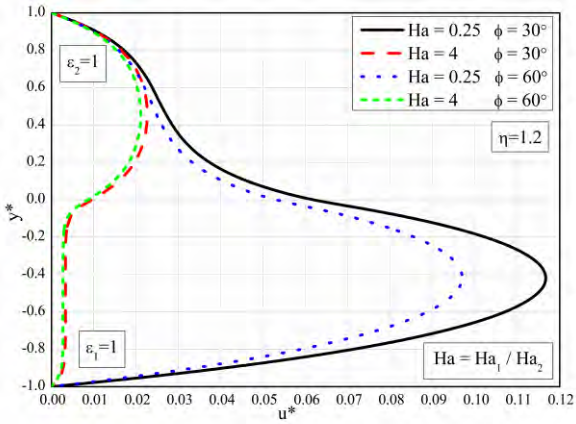
Slika 6.1 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti η i ϕ



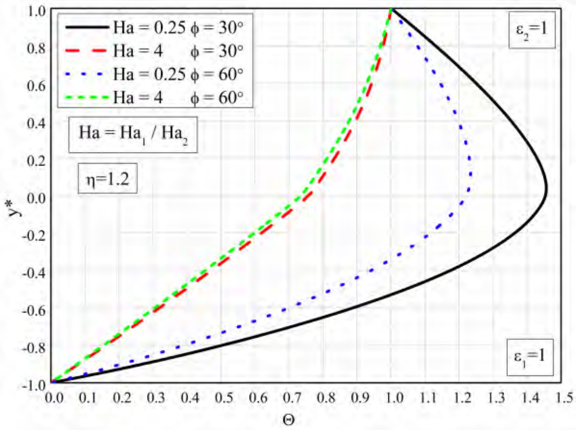
Slika 6.2 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti η i ϕ

Sa slike 6.1 se zaključuje da se za isti ugao nagiba kanala uzduţna brzina tečnosti u donjoj polovini kanala smanjuje za veće vrednosti veličine η tj. za manju propustljivost donje polovine kanala. Ova promena brzine u donjem delu kanala izaziva manju promenu u gornjoj polovini kanala. Maksimalni intenziteti uzduţne brzine su u donjoj polovini kanala. Za iste vrednosti odnosa faktora poroznosti, većim vrednostima ugla nagiba kanala odgovaraju manji intenziteti uzduţne brzine u celom poprečnom preseku kanala. U svim prikazanim slučajevima uzduţne brzine su veće u donjoj polovini kanala.

Sa slike 6.2 se vidi da je za isti ugao nagiba kanala temperatura u kanalu niţa za veće vrednosti odnosa faktora poroznosti η. Za iste vrednosti odnosa faktora poroznosti temperature tečnosti u kanalu su niţe za veće vrednosti ugla nagiba kanala. Za slučajeve prikazane na slici postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala. Temperature su više u gornjoj polovini kanala za sve slučajeve.



Slika 6.3 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha i ϕ

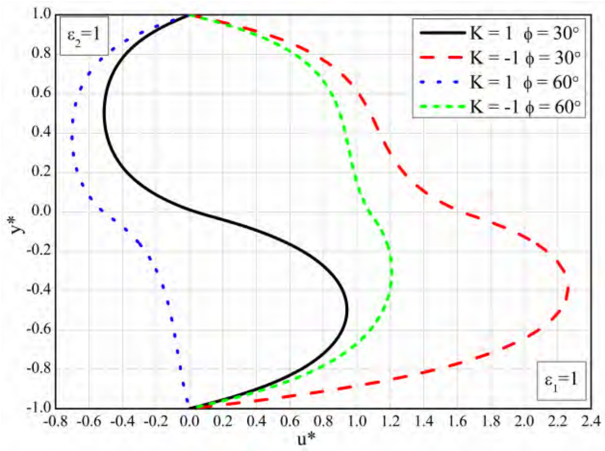


Slika 6.4 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha i ϕ

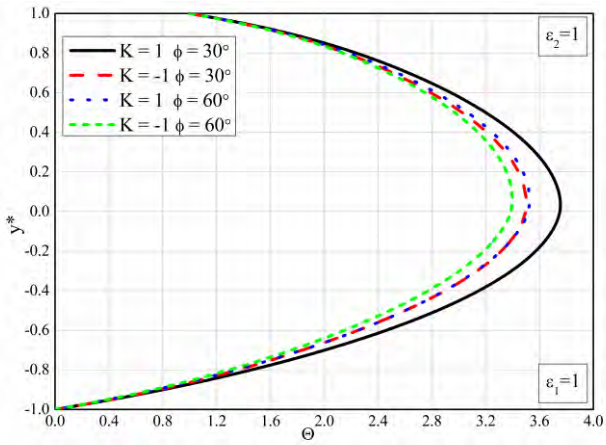
Na slici 6.3 i slici 6.4 prikazani su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti odnosa $\mathrm{Ha} = \mathrm{Ha}_1/\mathrm{Ha}_2$ i različite vrednosti ugla ϕ nagiba kanala. Na slikama su dati rezultati za slučaj kada je ugao $\theta = 0$, gornja polovina kanala propustljivija od donje, a tečnost u gornjoj polovini viskoznija.

Sa slike 6.3 se zaključuje da, za slučaj kada je donja polovina kanala manje propustljivosti od njegove gornje polovine, pri istim vrednostima ugla nagiba kanala većim vrednostima odnosa Ha odgovaraju manje uzduţne brzine u kanalu. Ovo smanjenje je mnogo izraţenije u donjoj polovini kanala jer je ona manje propustljivosti što dodatno utiče na smanjenje uzduţne brzine. Povećanje odnosa Ha dovodi i do značajnog "poravnanja" profila uzduţne brzine u donjoj polovini kanala. Povećanje odnosa Ha moglo bi da dovede do zaustavljanja (prekida) strujanja fluida u velikom delu donje polovine poprečnog preseka kanala. Povećanje odnosa Ha dovodi i do smanjenja tangencijalnih napona na zidovima kanala. Za iste vrednosti odnosa Ha većim vrednostima ugla nagiba kanala odgovaraju manje uzduţne brzine u kanalu i manji tangencijalni naponi na zidovima kanala. Za male vrednosti odnosa Ha maksimalne brzine su u donjoj polovini kanala.

Na slici 6.4 su prikazani rasporedi bezdimenzione temperature za kanal i veličine kao na slici 6.3. Sa ove slike se zaključuje da je za iste vrednosti ugla nagiba kanala temperatura tečnosti u kanalu niţa za veće vrednosti odnosa Ha. Isto tako se zaključuje da za male vrednosti Ha postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala, dok za velike vrednosti Ha tog transporta nema. U donjoj polovini je prenos toplote uglavnom kondukcijom čemu doprinosi njena mala propustljivost. Za male vrednosti Ha maksimalne temperature su u okolini sredine kanala. Za iste vrednosti odnosa Ha većim vrednostima ugla nagiba kanala odgovaraju niţe temperature u kanalu.



Slika 6.5 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti K i ϕ

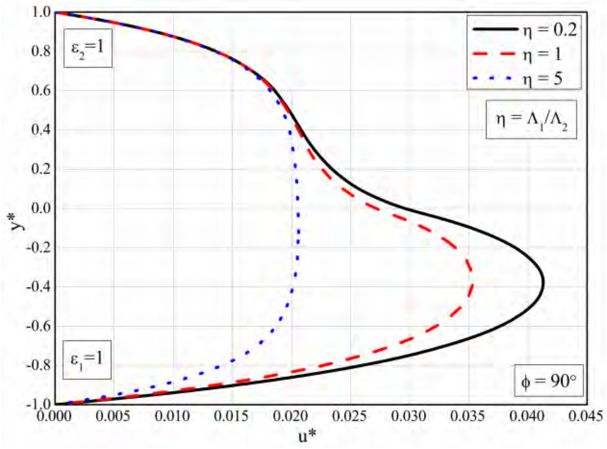


Slika 6.6 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K i ϕ

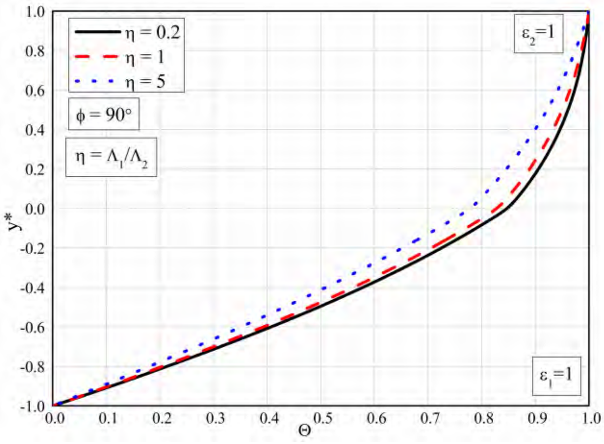
Na slikama 6.5 i 6.6 predstavljeni su, za različite vrednosti faktora spoljašnjeg električnog opterećenja i različite vrednosti ugla nagiba kanala, rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature u kanalu, respektivno. Gornja polovina kanala je poroznija od donje, a u njoj je tečnost koja je veće viskoznosti, veće elektroprovodnosti i veće toplotne provodnosti od tečnosti u donjoj polovini kanala.

Sa slike 6.5 se zaključuje da je za $K=1$ i za $\phi=30^\circ$ brzina u donjoj polovini kanala "smera" pada pritiska, dok je u gornjoj polovini suprotnog smera. U ovom slučaju intenziteti brzine su veći u donjoj polovini kanala. Za $K=1$ i $\phi=60^\circ$ uzduţna brzina u kanalu je u celom poprečnom preseku suprotnog smera od "smera" pada pritiska. Za $K=-1$ brzine su i za $\phi=30^\circ$ i za $\phi=60^\circ$ istog smera sa "smerom" pada pritiska u kanalu. Brzina je veća za manje vrednosti ugla nagiba kanala a maksimalne brzine su u donjoj polovini kanala. Za slučaj $K=-1$ tangencijalni naponi na zidovima kanala su manji za veći ugao nagiba kanala. Iako je gornja polovina kanala veće propustljivosti brzine su manje jer su uticaji viskoznosti i elektroprovodnosti dominantniji.

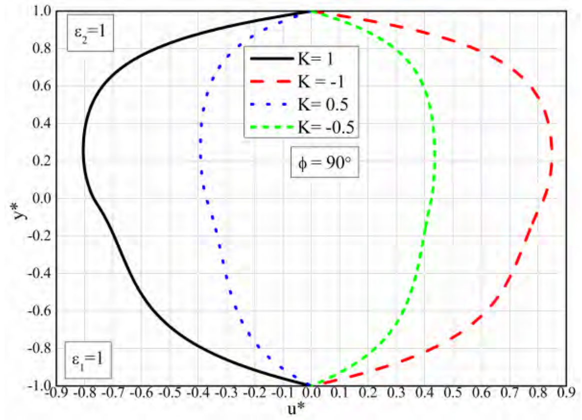
Sa slike 6.6 se zaključuje da je za iste vrednosti K temperatura tečnosti u kanalu niţa za veće vrednosti ugla nagiba kanala. Za iste vrednosti ugla nagiba kanala temperatura tečnosti u kanalu je niţa za $K=-1$ od temperature za slučaj kada je $K=1$. Temperature su maksimalne u okolini sredine poprečnog preseka kanala. U donjoj polovini kanala je dominantan prenos toplote kondukcijom.



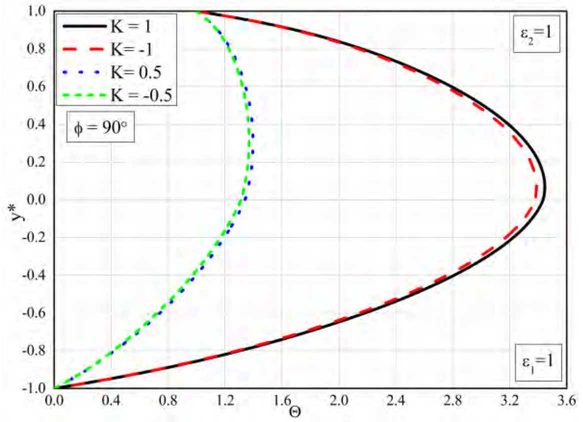
Slika 6.7 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti η i $\phi = 90^{\circ}$



Slika 6.8 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti η i $\phi = 90^{\circ}$



Slika 6.9 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti K i $\phi = 90^{\circ}$



Slika 6.10 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti K i $\phi = 90^{\circ}$

Na slikama 6.7 i 6.8 pretstavljeni su rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu, respektivno za slučaj kada je kanal vertikalan, a pad pritiska suprotnog “smera” od smera gravitacionog polja, dok su na slikama 6.9 i 6.10 dati rasporedi za različite vrednosti veličine K.

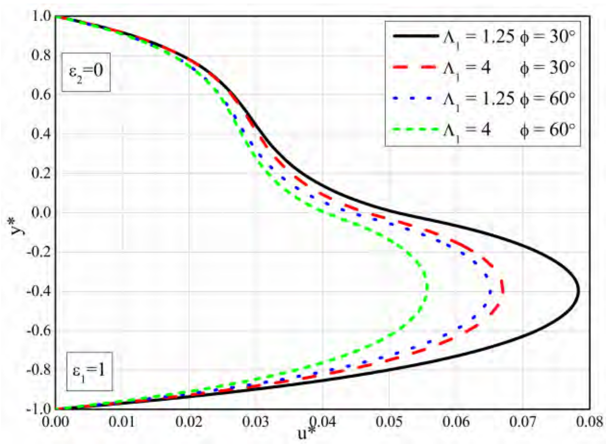
Sa slike 6.7 se zaključuje da promena propustljivosti donje polovine kanala uz zadrţavanje nepromenjene propustljivosti gornje polovine kanala dovodi do značajnih promena brzine u donjoj polovini kanala i manjih promena iste u gornjoj polovini kanala. Sa smanjenjem propustljivosti donje polovine kanala smanjuje se brzina u kanalu s tim što je to smanjenje u donjoj polovini kanala značajno, dok je u okolini gornjeg zida kanala zanemarljivo. Ovo smanjenje propustljivosti dovodi i do smanjenja tangentnog napona na donjem zidu kanala. Za $\eta = 0.2$ propustljivost donje polovine kanala je pet puta veća od od propustljivosti gornje polovine kanala dok su za $\eta = 1$ ove propustljivosti jednake, a brzine u donjoj polovini kanala su veće čemu doprinose i manje viskoznosti i elektroprovodnosti tečnosti u donjoj polovini kanala.

Sa slike 6.8 se zaključuje da je za vertikalni kanal, za koji su rezultati za brzinu dati na prethodnoj slici, temperatura u kanalu niţa za manje propustljivosti donje polovine kanala i da je prenos toplote u donjoj polovini kanala uglavnom kondukcijom. U sva tri prikazana slučaja postoji transport toplote sa tečnosti na gornji zid kanala. Ova transportovana količina toplote je manja za manju propustljivost donje polovine kanala.

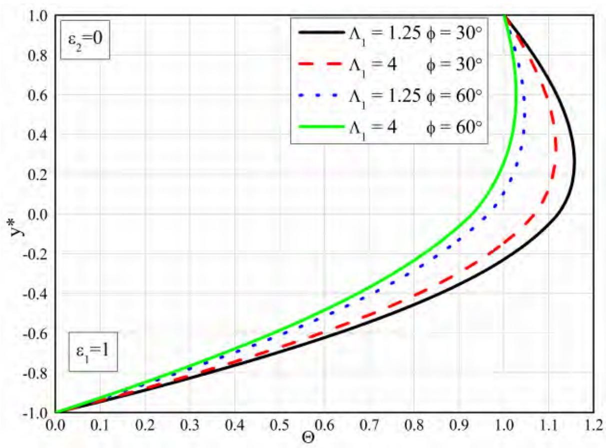
Sa slike 6.9 se zaključuje da su za K=-0,5 i K=-1uzduţne brzine u kanalu suprotnog smera od smera gravitacionog polja u celom poprečnom preseku kanala dok su za K=0,5 i K=1 istog smera sa smerom gravitacionog polja. Većim apsolutnim vrednostima veličine K odgovaraju veće uzduţne brzine tečnosti u kanalu i veći tangencijalni naponi na zidovima kanala.

Sa slike 6.10 se zaključuje da se temperature za K=-0.5 i K=-1 malo razlikuju što je i trebalo očekivati s obzirom da je razlika samo u smeru spoljašnjeg primenjenog električnog polja.

Na slikama koje slede prikazani su rezultati za kanale čija je donja polovina porozna, a gornja "slobodna".



Slika 6.11 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ_1 i ϕ

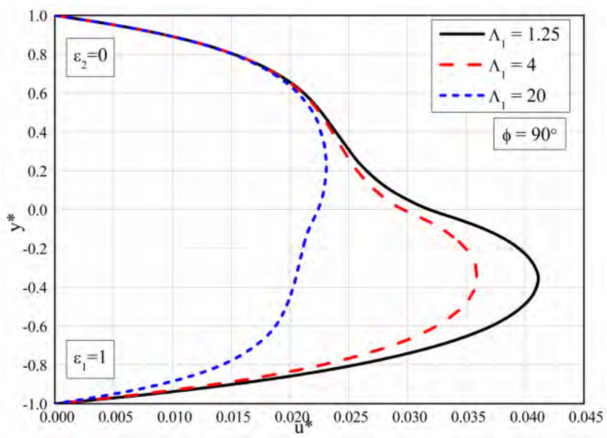


Slika 6.12 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ_1 i ϕ

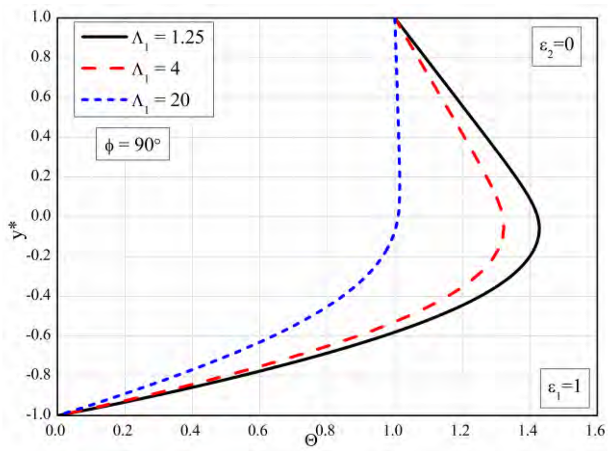
Tako su na slici 6.11 i slici 6.12 prikazani rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti Λ_1 i različite vrednosti ugla nagiba kanala ϕ. Rezultati su dati za slučajeve kada je odnos Hartmann-ovih brojeva $\mathrm{Ha}=0,707$.

Sa slike 6.11 se zaključuje da je za iste vrednosti ugla nagiba kanala brzina u kanalu manja za veće vrednosti faktora poroznosti donje polovine kanala. Manji su i tangencijalni naponi na zidovima kanala. Maksimalne brzine tečnosti su u donjoj polovini kanala jer je uticaj Hartmann-ovog broja na smanjnje brzine u gornjoj polovini kanala veći od uticaja Ha_1 broja i poroznosti na smanjenje brzine u donjoj polovini kanala. Za iste vrednosti faktora poroznosti donje polovine kanala brzina tečnosti u kanalu je manja za veće vrednosti ugla nagiba kanala kao i tangencijalni naponi na zidovima kanala.

Sa slike 6.12 se zaključuje da su za iste vrednosti ugla nagiba kanala temperature u kanalu niţe za veće vrednosti faktora poroznosti, a manje su i količine toplote koje se transportuju sa tečnosti na gornji zid kanala. Za iste vrednosti faktora poroznosti, većim vrednostima ugla nagiba kanala odgovaraju niţe temperature u kanalu i manje količine toplote koje se transportuju sa tečnosti na gornji zid kanala. Prenos toplote u donjoj polovini kanala je uglavnom kondukcijom. Maksimalne temperature tečnosti su u gornjoj polovini kanala, a bliţe gornjem zidu kanala za veći nagib kanala i za veće vrednosti faktora poroznosti.



Slika 6.13 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Λ_1 i $\phi = 90^\circ$

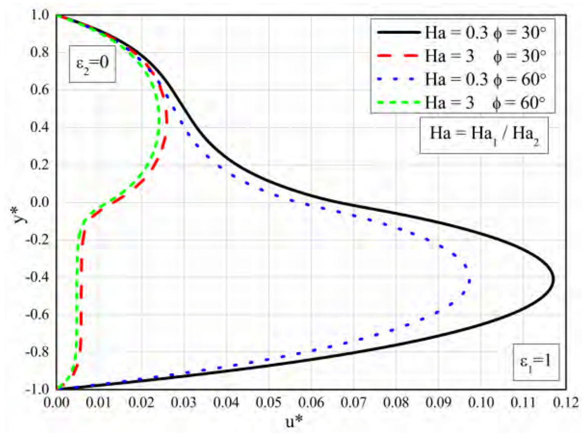


Slika 6.14 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Λ_1 i $\phi = 90^\circ$

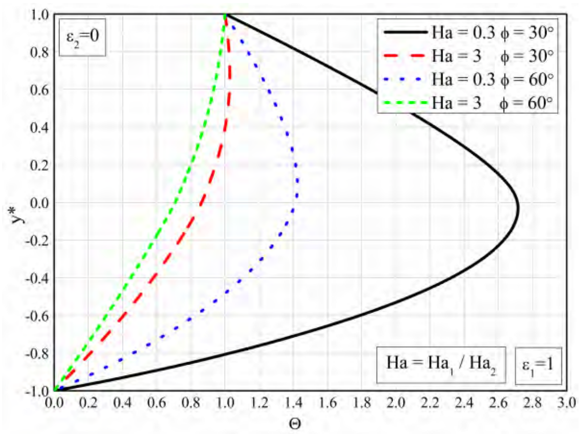
Rasporedi bezdimenzione uzduţne brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite vrednosti faktora poroznosti Λ_1 i za $\phi = 90^\circ$ tj. za vertikalni kanal prikazani su na slici 6.13 i 6.14 respektivno. Pad pritiska u kanalu je suprotnog smera od smera gravitacionog polja tj. on izaziva kretanje tečnosti uz kanal. Desna polovina kanala je porozna a leva je "slobodna". Na ovim slikama, u njihovom donjem delu, prikazani su rezultati za desnu polovinu kanala, a u gornjem delu za levu polovinu kanala. Zaključci o uticaju faktora poroznosti Λ_1 na raspored brzine i temperature za nagnuti kanal u vaţnosti su i ovde tj. za vertikalni kanal. Ono što se ovde još moţe zaključiti to je da je prenos toplote u levom "slobodnom" delu kanala uglavnom kondukcijom i da je za veliku vrednost $\Lambda_1 = 20$

temperatura tečnosti u levoj polovini kanala skoro konstantna i jednaka temperaturi levog zida kanala. U tom slučaju nema transporta toplote sa tečnosti na levi zid kanala, a smanjenje brzine u desnoj polovini kanala je značajno kao i tangencijalnih napona na desnom zidu kanala. Srednja brzina u desnom delu kanala je manja od srednje brzine u levom "slobodnom" delu kanala. Ovo je izazvala mala propustljivost desne polovine kanala. Naravno, brzine u vertikalnom kanalu, kod ostalih istih veličina, manje su od brzina u nagnutom kanalu.

Na slici 6.15 i slici 6.16 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za različite vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva i različite uglove nagiba kanala. Donja polovina kanala je porozna a gornja "slobodna". Za promenu odnosa Ha menjana je elektroprovodnost fluida u donjoj polovini kanala a time i Ha_1.



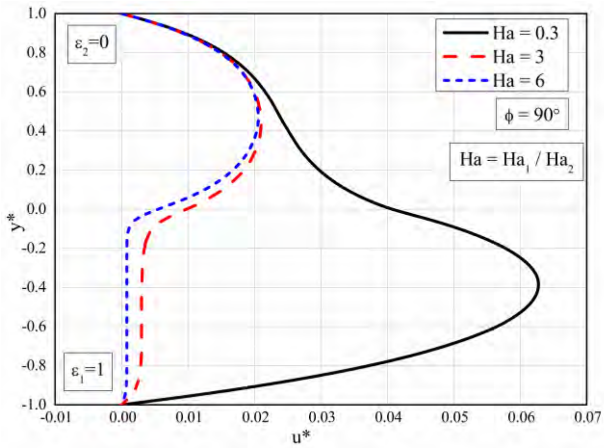
Slika 6.15 Bezdimenziona uzduţn a brzina za različite vrednosti Ha i ϕ



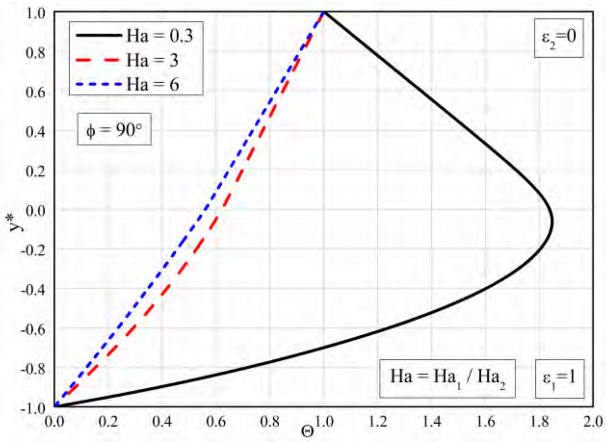
Slika 6.16 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha i ϕ

Posmatranjem rasporeda brzina prikazanih na slici 6.15 zaključuje se da se za iste uglove nagiba kanala brzna u donjoj polovini kanala smanjuje sa povećanjem odnosa Ha tj. sa povećanjem Ha_1. Ova promena brzine dovodi i do manje promene brzine u gornjoj polovini kanala. Većim vrednostima odnosa Ha odgovaraju manji tangencijalni naponi na zidovima kanala, a posebno na donjem zidu kanala. Za odnose $Ha < 1$ maksimalne brzine u kanalu su u njegovoj donjoj polovini a za $Ha > 1$ u njegovoj gornjoj polovini. Za iste vrednosti odnosa Ha brzine u kanalu su manje za veće uglove nagiba kanala a to je slučaj i sa tangencijalnim naponima na zidovima kanala.

Sa slike 6.16 se zaključuje da je za iste uglove nagiba kanala temperatura tečnosti niţa, u celom poprečnom preseku kanala, za veće vrednosti odnosa Ha. Količina transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala je manja za veće vrednosti odnosa Ha, a za $Ha = 3$ i $\phi = 60^\circ$ i ne postoji. Za vrednost $Ha = 0.3$ temperature su maksimalne u okolini sredine poprečnog preseka. Za iste vrednosti odnosa Ha temperature u kanalu su niţe za veće uglove nagiba kanala, a količina transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala je manja.



Slika 6.17 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Ha i $\phi = 90^\circ$

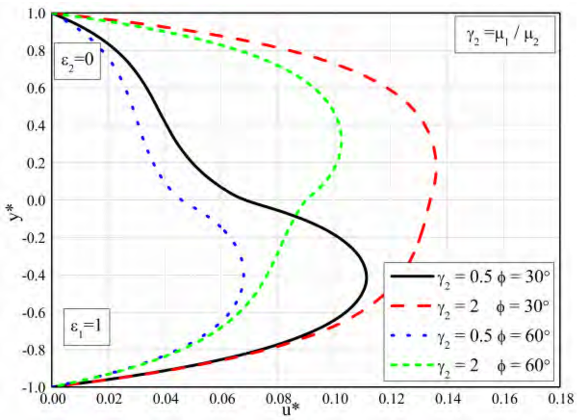


Slika 6.18 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Ha i $\phi = 90^\circ$

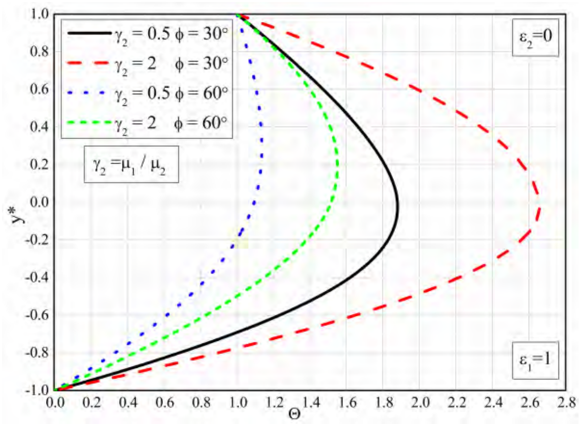
Rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature tečnosti u kanalu za različite odnose Ha, a za vertikalni kanal predstavljeni su na slikama 6.17 i 6.18. Sa slike 6.17 se zaključuje da sa povećanjem vrednosti odnosa Ha brzina u kanalu opada u celom poprečnom preseku kanala. Posebno je izraţeno opadanje brzine u desnoj polovini kanala jer je u njoj izraţen i uticaj Hartmann-ovog broja i smanjenje propustljivosti ovog dela kanala. Tangencijalni naponi na zidovima kanala se takoĎe smanjuju. Za odnos $Ha = 6$ brzina u desnoj polovini poprečnog preseka kanala je gotovo jednaka nuli. Za vrednosti odnosa $Ha < 1$ maksimalne brzine su u desnoj polovini kanala, a za $Ha > 1$ one su maksimalne u levoj polovini kanala.

Sa slike 6.18 se zaključuje da sa porastom odnosa Ha temperatura u celom poprečnom preseku kanala opada. Srednja temperatura je najviša za vrednost odnosa $Ha = 0.3$.

Na slikama 6.19 i 6.20 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za različite vrednosti odnosa viskoznosti tečnosti u donjoj i gornjoj polovini kanala i za različite uglove nagiba kanala, respektivno. Rezultati su dati za slučaj kada se menjala tečnost u gornjoj polovini kanala, dok je u donjoj polovini bila ista tečnost.



Slika 6.19 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti γ_2 i ϕ

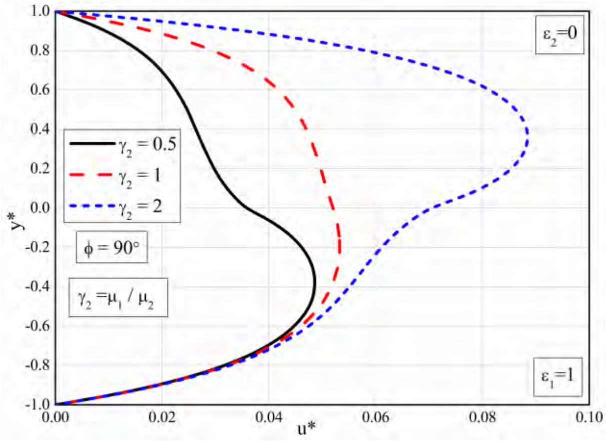


Slika 6.20 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti γ_2 i ϕ

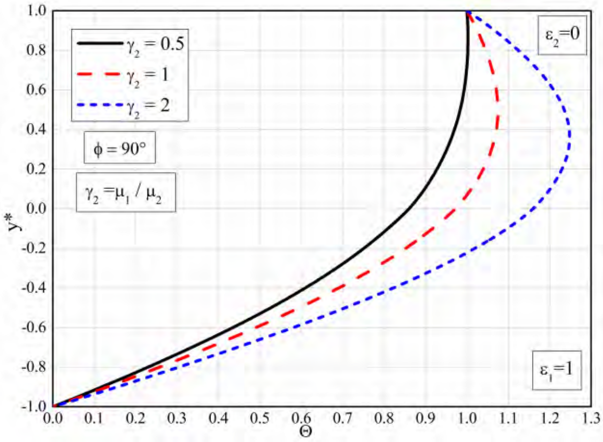
Sa slike 6.19 se zaključuje da su za iste uglove nagiba kanala brzine tečnosti u celom poprečnom preseku kanala veće za veće vrednosti odnosa γ_2 tj. za manje dinamičke viskoznosti u gornjoj polovini kanala. Veći su i tangencijalni naponi na gornjem zidu kanala, dok su na donjem skoro nepromenjeni. U okolini donjeg zida brzina se vrlo malo menja, dok je u ostalom delu poprečnog preseka kanala ova promena značajna. Brzine su maksimalne u gornjoj polovini kanala za $\gamma_2 = 2$, a u donjoj polovini kanala za $\gamma_2 = 0,5$ jer je u tom slučaju u gornjoj polovini kanala tečnost dva puta veće dinamičke viskoznosti od dinamičke viskoznosti u donjoj polovini kanala. U slučaju da je u gornjoj polovini kanala tečnost velikog koeficijenta dinamičke viskoznosti moglo bi njeno kretanje značajno da se uspori. Za iste vrednosti veličine γ_2 većim nagibnim uglovima kanala odgovaraju manje brzine tečnosti u kanalu i manji tangencijalni naponi na zidovima kanala.

Sa slike 6.20 se zaključuje da su za iste nagibne uglove kanala temperature tečnosti u kanalu niţe za manje vrednosti veličine γ_2, a količine transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid kanala manje. Za iste vrednosti veličine γ_2 temperature tečnosti u kanalu su niţe za veće uglove nagiba kanala, a količine transportovane toplote sa tečnosti na gornji zid manje.

Na slikama 6.21 i 6.22 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine i bezdimenzione temperature za vertikalni kanal, a za različite vrednosti veličine γ_2 respektivno. Desna polovina kanala je porozna, a leva "slobodna". U desnoj polovini kanala je tečnost stalne viskoznosti, a u levoj polovini se menja tečnost a samim tim i viskoznost. Rezultati su dati za slučaj kada je Hartmann-ov broj za tečnost u levoj polovini kanala veći od Hartmann-ovog broja u desnoj polovini kanala.



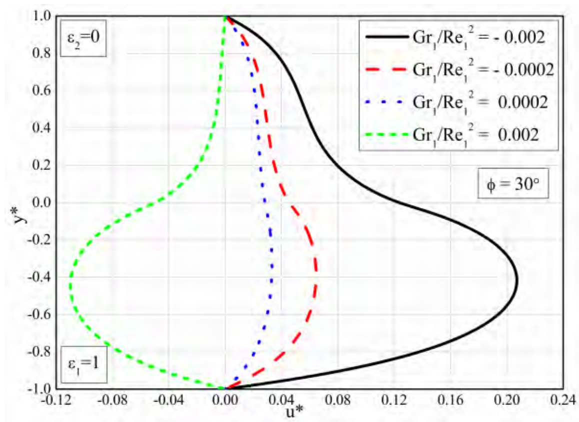
Slika 6.21 Bezdimenziona uzdužna brzina za različite vrednosti γ_2 i $\phi = 90^\circ$



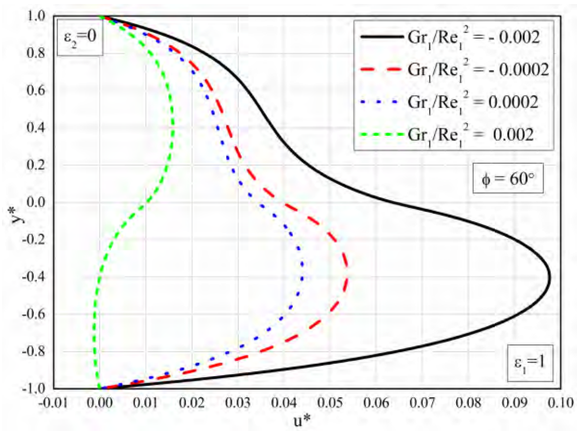
Slika 6.22 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti γ_2 i $\phi = 90^\circ$

Sa slike 6.21 se zaključuje da većim vrednostima veličine γ_2 tj. manjim viskoznostima tečnosti u levom delu kanala odgovaraju veće brzine u celom poprečnom preseku kanala, veći tangencijalni naponi na levom zidu kanala dok su tangencijalni naponi na desnom zidu kanala gotovo nepromenjeni. Za $\gamma_2 = 2$ maksimalna brzina je u levoj polovini kanala, dok su za $\gamma_2 = 1$ i $\gamma_2 = 0,5$ maksimalne brzine su u desnoj polovini kanala. U okolini desnog zida kanala brzine se za različite γ_2 malo razlikuju dok su u ostalom delu poprečnog preseka razlike značajne. Kako je i očekivano brzine tečnosti u vertikalnom kanalu su manje od brzina tečnosti u nagnutom kanalu, ako su ostali uslovi (veličine) isti.

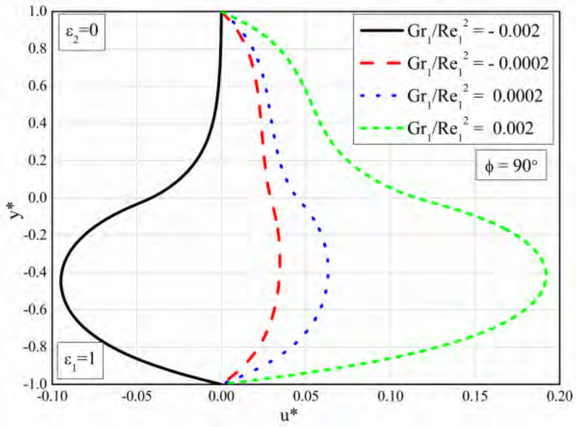
Sa slike 6.22 se zaključuje da većim vrednostima γ_2 odgovaraju više temperature u kanalu i veće količine toplote transportovane sa tečnosti na levi zid kanala. Maksimalne temperature su u levoj polovini kanala.



Slika 6.23 Bezdimenziona uzdužna brzina za različite vrednosti Gr_1/Re_1^2 i $\phi = 30^\circ$



Slika 6.24 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti Gr_1/Re_1^2 i $\phi = 60^\circ$

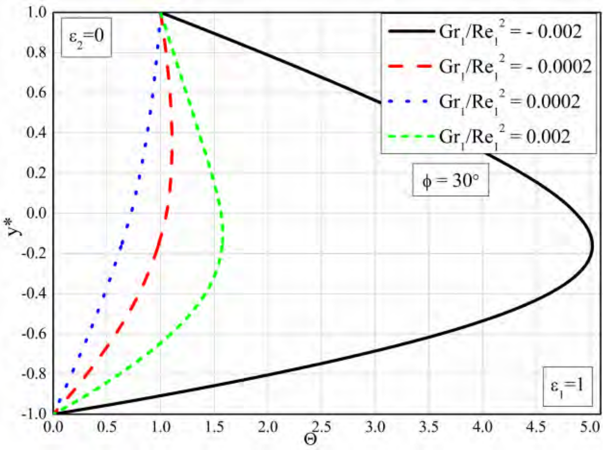


Slika 6.25 Bezdimenziona uzduţn a brzina
za različite vrednosti Gr_1/Re_1^2 i $\phi = 90^{\circ}$

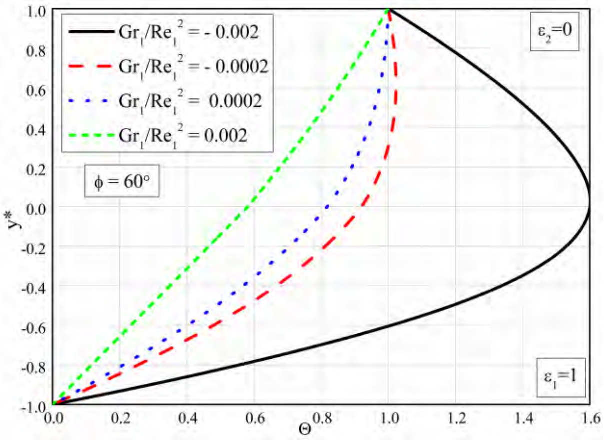
Na slikama 6.23, 6.24 i 6.25 prikazani su rasporedi bezdimenzione brzine za različite vrednosti odnosa Gr_1/Re_1^2 i uglove nagiba kanala u odnosu na horizontalnu ravan od $30°, 60°$ i $90°$, respektivno. Donja polovina kanala, odnosno desna polovina kanala kod vertikanog kanala, je porozna, a gornja polovina odnosno leva polovina kod vertikalnog kanala je "slobodna". U donjoj polovini kanala je fluid manje viskoznosti i manje elektroprovodnosti u odnosu na fluid u gornjoj polovini kanala.

Sa ovih slika se zaključuje da je za slučajeve nagnutih kanala brzina najveća za najveću pozitivnu vrednost navedenog odnosa i opada kako ovaj odnos opada. Za negativnu vrednost odnosa -0,0002 ova brzina je, još uvek, smera Ox ose, dok je za vrednost -0,002 ona suprotnog smera od Ox ose za $\phi = 30°$, a suprotnog smera u delu donje polovine kanala i istog smera kao Ox osa u većem delu kanala za $\phi = 60°$. Razlog ovome je veći intenzitet i promenjen smer uzgonske sile. Za pozitivne vrednosti i malu apsolutnu vrednost negativnog odnosa brzine su maksimalne u donjoj polovini kanala što je posledica manje viskoznosti fluida i manje vrednosti Hartmann-ovog broja u odnosu na fluid u gornjoj polovini kanala.

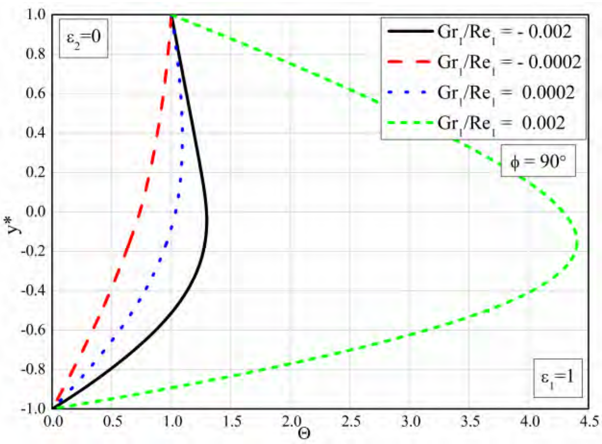
Za slučaj vertikalnog kanala, slika 6.25, za negativne vrednosti odnosa Gr_1/Re_1^2 i malu pozitivnu vrednost brzine su smera suprotnog smeru gravitacionog polja, a za velike pozitivne vrednosti one su smera kao i gravitaciono polje. Maksimalne brzine su u poroznom delu kanala tj. u njegovoj desnoj polovini. Razlog ovome je manja gustina fluida i manji Hartmann-ov broj u ovoj polovini kanala.



Slika 6.26 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Gr_1/Re_1^2 i $\phi = 30^\circ$



Slika 6.27 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Gr_1/Re_1^2 i $\phi = 60^\circ$



Slika 6.28 Bezdimenziona temperatura za različite vrednosti Gr_1/Re_1^2 i $\phi = 90^\circ$

Na slikama 6.26, 6.27 i 6.28 prikazani su rasporedi bezdimenzione temperature za različite vrednosti odnosa Gr_1/Re_1^2 i različite uglove nagiba kanala.

Sa slike 6.26 i 6.27 se zaključuje da je temperatura u kanalu maksimalna za vrednost odnosa 0,002 i to za $\phi = 30^\circ$ u donjoj polovini kanala, a za $\phi = 60^\circ$ u okolini sredine kanala. Ovo se objašnjava činjenicom da su u ovom delu kanala i za ovu vrednost odnosa i brzine maksimalne pa je i količina toplote koja se oslobaĐazbog poroznosti sredine dominantna. Za slučaj vertikalnog kanala na slici 6.28 maksimalna temperatura je u donjoj polovini kanala za vrednost odnosa -0,002 a minimalna za vrednost odnosa 0,0002 što se objašnjava količinama toplote zbog poroznosti sredine koje su proporcionalne kvadratima brzina. Maksimalna količina toplote koja se transportuje sa tečnosti na levi zid kanala je maksimalna za vrednost odnosa -0,002, dok za vrednost 0,0002 i ne postoji.

6.2 Zaključak poglavlja

Ovde se daju osnovni dobijeni zaključci za bezindukciono MHD strujanje dve tečnosti, koje se ne mešaju, u nagnutom kanalu. Zaključuje se da, za isti nagibni ugao kanala, brzina u kanalu opada a temperatura se sniţava za veće vrednosti odnosa faktora poroznosti kanala. Za iste odnose faktora poroznosti brzina u kanalu je manja, a temperatura niţa za veće uglove nagiba kanala. Ovi zaključci vaţe i za slučaj vertikalnog kanala.

Za iste uglove nagiba kanala, brzina tečnosti u kanalu je manja a temperatura niţa za veću vrednost odnosa Hartmann-ovih brojeva. Za iste vrednosti odnosa Hartmann-ovih brojeva brzina je manja, a temperatura niţa za veće uglove nagiba kanala. Ovi zaključci vaţe i za vertikalni kanal.

Promena znaka faktora spoljašnjeg električnog opterećenja dovodi do promene smera brzine tečnosti u kanalu. Većim apsolutnim vrednostima ovog faktora odgovaraju veće brzine i više temperature tečnosti u kanalu. Ovi zaključci se odnose na vertikalni kanal. Kod nagnutog kanala, za ugao nagiba 30° brzina ima smer x-ose za $K=-1$ u celom poprečnom preseku kanala, a za K=1 samo u delu poprečnog preseka kanala. Za ugao nagiba kanala 60° za $K=-1$ brzina, u celom poprečnom preseku kanala, ima smer kao i x-osa, dok za K=1 ima suprotan smer.

Većim odnosima dinamičkih viskoznosti odgovaraju veće brzine i više temperature tečnosti u kanalu. Deo ovih zaključaka odnosi se i na vertikalni kanal.

Zaključci koji slede odnose se nanagnuti kanal čija je jedna polovina porozna, a druga “slobodna”.

Većim vrednostima faktora poroznosti Λ_1 odgovaraju manje brzine i niţe temperature tečnosti u kanalu, dok je za istu vrednost Λ_1 brzina manja, a temperatura tečnosti u kanalu niţa za veći ugao nagiba kanala. Ovi zaključci se odnose na prvi slučaj, a i na vertikalni kanal u tom slučaju.

U drugom slučaju, većim vrednostima Λ_1 odgovaraju manje brzine u celom poprečnom preseku kanala i više temperature u većem delu poprečnog preseka kanala. U vertikalnom kanalu su brzine manje, a temperature niţe za veće vrednosti Λ_1 u celom poprečnom preseku kanala.

Za pozitivne vrednosti odnosa Gr_1/Re_1^2 brzina u kanalu ima “smer” pada pritiska u kanalu. Za veće negativne vrednosti ovog odnosa brzina moţe imati suprotan smer od “smera” pada pritiska, u celom poprečnom preseku kanala ili jednom njegovom delu. Temperatura tečnosti u kanalu je najviša za najveću pozitivnu vrednost ovog odnosa. Ovi zaključci se odnose na oba razmatrana slučaja.

Zaključci o uticaju odnosa Hartmann-ovih brojeva, odnosa dinamičkih viskoznosti i spoljašnjeg električnog opterećenja isti su sa zaključcima kada su obe polovine kanala porozne.

Poglavlje 7

7. Numeričke simulacije

7.1 Izbor softvera za simulacije

Savremeni razvoj tehničkih nauka tesno je povezan sa širokom primenom računara. Računari daju mogućnost brzog i tačnog računanja, praćenja i čuvanja velike količine informacija, realizaciju dugih i komplikovanih izračunavanja bez učešća čoveka. To je omogućilo istraţivačima da se posvete detaljnom matematičkom modeliranju, čime se skraćuje, a u nekim slučajevima čak i isključuje potrebu laboratorijskih ispitivanja. Moţe se govoriti o prelasku od fizičkog ka numeričkom eksperimentu.

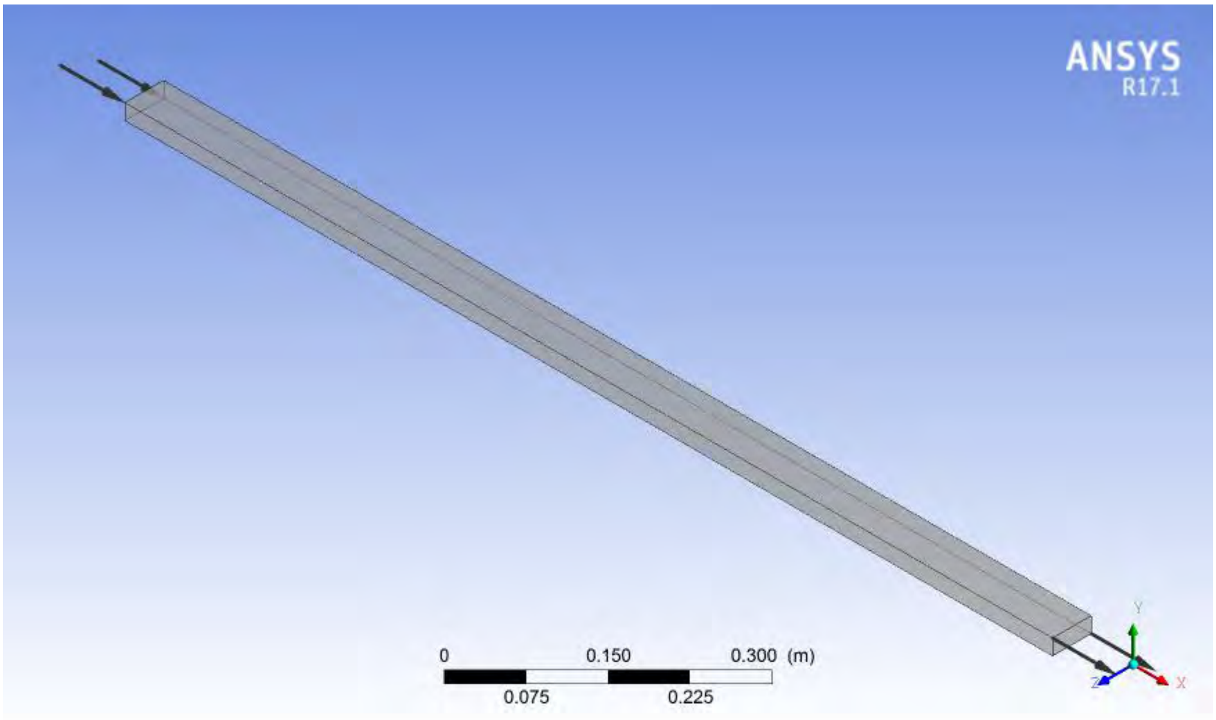
Numeričke simulacije koriste se za rešavanje različitih kompleksnih zadataka. Njihova primena oslanja se na korišćenje sloţenih algoritama na osnovu kojih se sastavljaju različiti programi za računare. Danas postoji veliki broj već napravljenih programa koji su dostupni istraţivačima. Najčešće korišćen program od strane inţenjera koji sadrţi alate za simuliranje strujanja fluida i analizu dobijenih rezulata je Ansys CFX.

Za ovaj deo rada izabran je Ansys CFX softver za izvoĎenje numeričkih simulacija strujanja (ICEM-CFD, CFX-Pre, CFX-Solver i CFX-Post). Ansys CFX softver bazira se na metodi konačnih zapremina [198]. To znači da se domen u kome je strujanje deli na male podregione i za svaki od njih se jednačine diskretizuju i rešavaju iterativno. Numerička procedura kod CFX softvera je takva da se najpre rešavaju impulsne jednačine. Posebnu paţnju treba obratiti pri modeliranju porozne sredine jer model porozne sredine dodaje pad impulsa u glavne impulsne jednačine. TakoĎe model porozne sredine u Ansys CFX softveru pretpostavlja da je poroznost izotropna i da moţe da varira sa mestom i vremenom. Hidrodinamičke jednačine (za brzinu i pritisak) se rešavaju kao samostalni sistem. Proces izvoĎenja simulacija se sastoji od formiranja geometrije i mreţe, definisanja početnih i graničnih uslova i osobina fluida, numeričkog rešavanja formiranih jednačina u definisaom domenu i post-procesiranja rezultata simulacije.

Sloţenost modeliranja poroznih sredina u bilo kom programu je veoma velika jer je modeliranje i povezivaje hiljada mikro pora teško i dugotrajno. U softveru Ansys CFX je pomoću zapreminskog osrednjavanja svojstva mikro skale porozne sredine (veličine i geometrije pora) rešavanje polja protoka zamenjeno ekvivalentnim kontinuumom u većoj skali i opisan novim svojstvima kao što su poroznost, permeabilnost, relativna propustljivost. Ovaj koncept reprezentativne elementarne zapremine (REV) je fundamentalan za matematički opis protoka fluida i transporta u poroznim sredinama. S jedne strane REV mora biti dovoljno veliki da izbegne neţeljene fluktuacije prosečnih svojstava, a sa druge strane mora biti dovoljno mali da bi pruţio prostornu zavisnost ovih veličina. Prema tome polje protoka se izračunava za porozni domen u REV skali sa novim prosečnim veličinama.

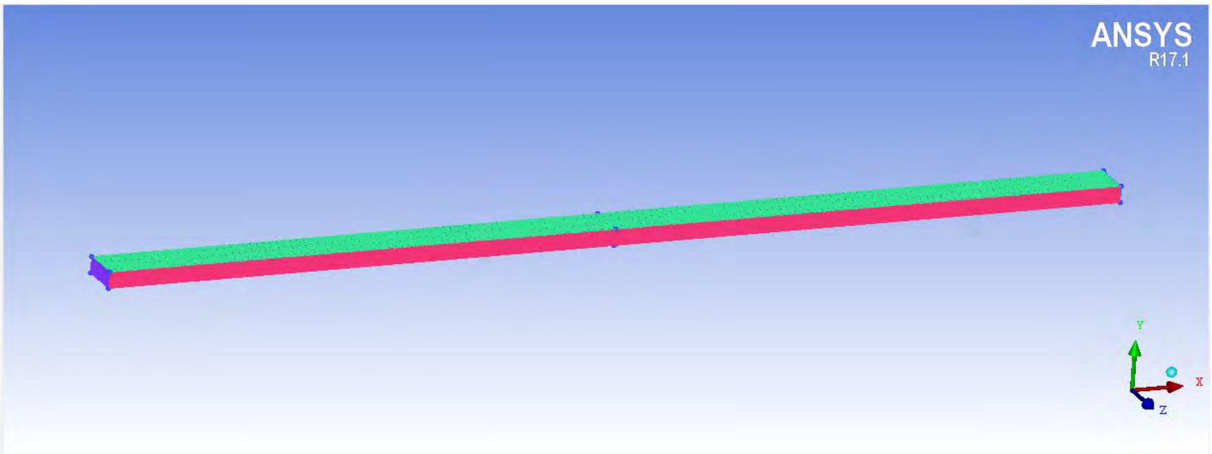
7. 2 Formiranje modela i mreže za simulacije

Model kanala u kome će se razmatrati strujanje je dimenzija 1200 mm x 50 mm x 20 mm i definisani su granični uslovi na ulazu, zidovima i izlazu. Na ulazu je konstantna brzina strujanja fluida, na izlazu iz strujnog domena konstantan atmosferski pritisak, dok na zidovima vaţi uslov da nema klizanja. Najpre se vrši analiza uticaja gustine mreţe kod laminarnog strujanja bez uticaja magnetnog polja, a zatim i za veće vrednosti Hartmann-ovog broja. Na ovaj način se sprovodi test "nezavisnosti" mreţe i utvrĐuje minimalna duţina domena strujanja tako da se postigne potpuno razvijeno strujanje. Ovo se radi kako bi se definisala dovoljna ali ne i prevelika gustina mreţe koja obezbeĐuje slaganje sa laminarnim profilom brzine pri strujanju fluida izmeĐu paralelnih ploča, jer za ovaj slučaj strujanja postoji analitičko rešenje. Drugi razlog je tačno utvrĐivanje duţine domena u pravcu strujanja kako je već ranije rečeno, koji je neophodan da se od uniformne brzine na ulazu postigne profil potpuno razvijenog strujanja [199].



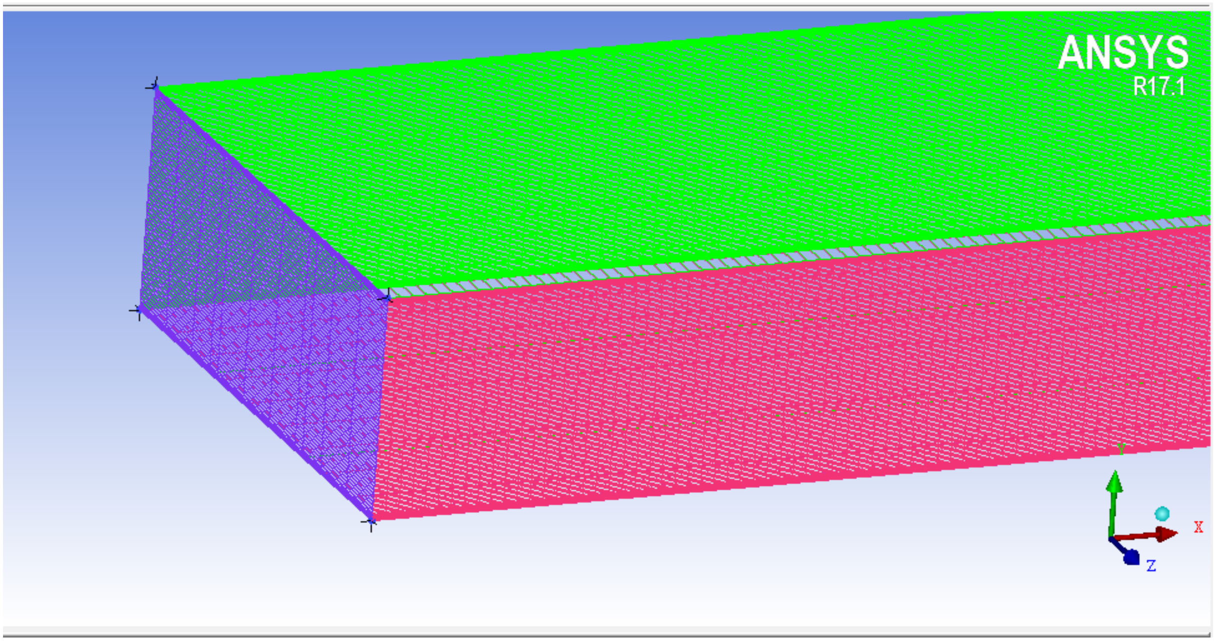
Slika 7.1 Model kanala u CFX-u

Za ovako definisan model sprovedene su simulacije strujanja i nakon dosta analiza utvrĎena je mreţa koja je dala dobro slaganje sa laminarnim profilom brzine.



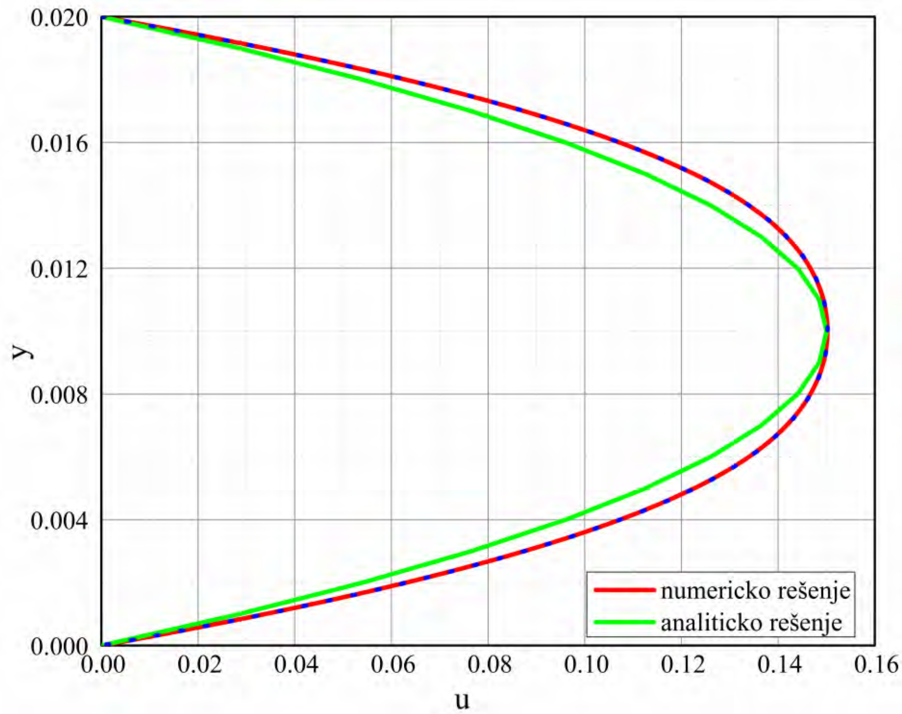
Slika 7.2 Mreţa korišćena za simulacije

Mreţa u pravcu upravnom na ploče ima 150 čvorova. Prvi element ima visinu 0.015 mm, a geometrijski red je progresije 1.2. Maksimalna visina kontrolne zapremine iznosi 0.15 mm. U pravcu strujanja mreţa ima 1000 čvorova, uniformnog je tipa i svaka kontrolna zapremina je duţine 1.2 mm. U y pravcu ima 150 čelija. Prva ćelija je 0.015 mm sa geometrijskom progresijom 1.2 a maksimalno rastojanje 0.15 mm. U z pravcu ima 10 ćelija, i sve su uniformne po 5.55mm. Prikaz ove mreţe dat je na slici 7.3



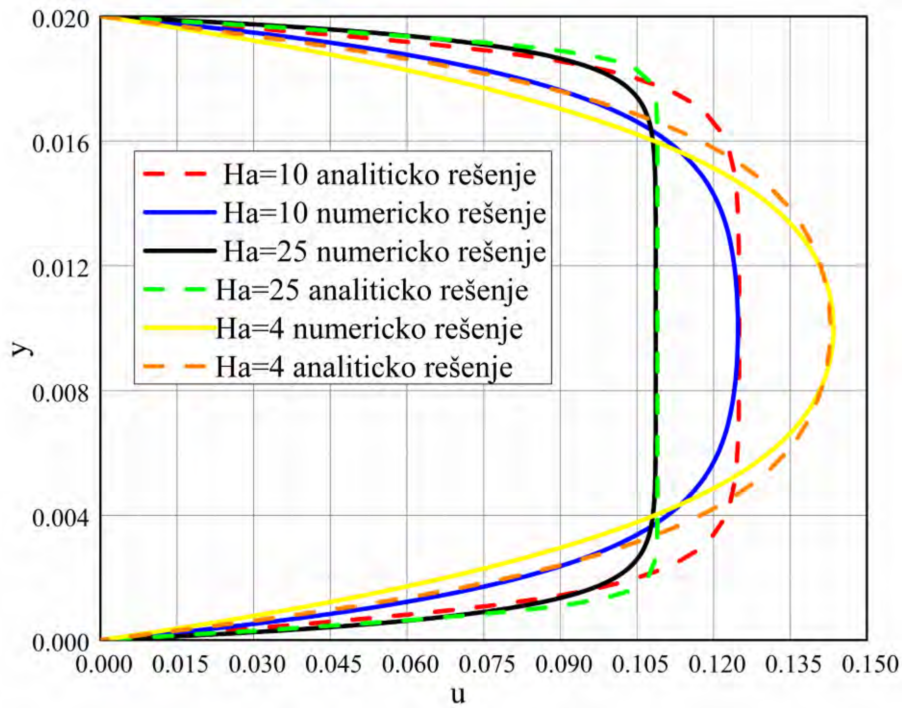
Slika 7.3 Detalj domena strujanja

Provera mreţe izvršena je poreĎenjem numeričkih i analitičkih rešenja i prikazana je na slici 7.4



Slika 7.4 PoreĎenje analitičkog i numeričkog rešenja za laminarno strujanje

Za ovako definisan model uraĎene su i simulacije strujanja za različite intenzitete magnetnog polja i rezultati su prikazani na slici 7.5. PoreĎenjem i ovih rešenja dobijeni su zadovoljavajući rezultati sa veoma malim, gotovo zanemarljivim greškama.



Slika 7.5 Poređenje analitičkog i numeričkog rešenja
za različite vrednosti Hartmann-ovog broja

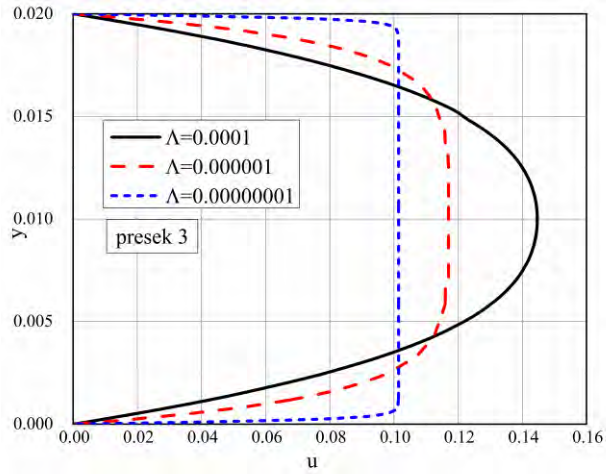
Razvijen model koji je dao odgovarajuće rezultate se ne menja i koristi se za dalje analize.

Poređenjem analitičkih i numeričkih rezultata i testom "nezavisnosti" mreže utvrđeno je da dalje povećavanje broja elemenata ne poboljšava kvalitet rezultata tj. ne smanjuje značajno ionako već malu numeričku grešku. Ovde je potrebno napomenuti da se simulacije vrše u realnom 3D domenu dok su analitička rešenja ravanskih problema.

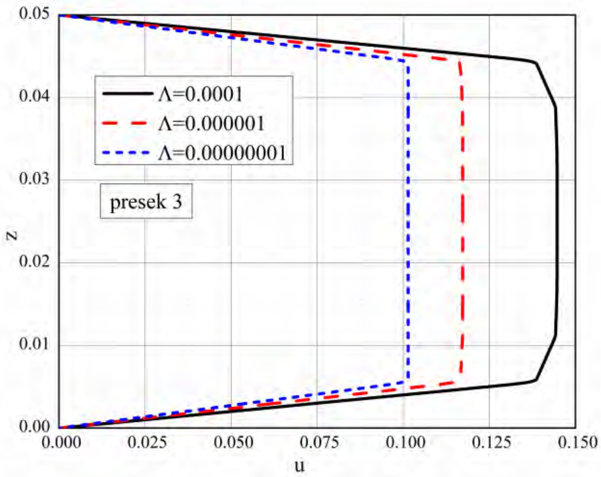
Kako su modeli laminarnog strujanja i Hartmann-ovog strujanja pokazali dobra poklapanja sa analitičkim rezultatima ovakav model sa definisanom numeričkom mrežom i početnim i graničnim uslovima se dalje u radu razvija i koristi za probleme analize MHD strujanja u poroznoj sredini.

7.3 Rezultati numeričkih simulacija za horizontalni porozni kanal

Deo rezultata dobijenih simulacijama za horizonatalni porozni kanal dat je na slikama u vidu grafika koje slede u nastavku.



Slika 7.6 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti poroznosti

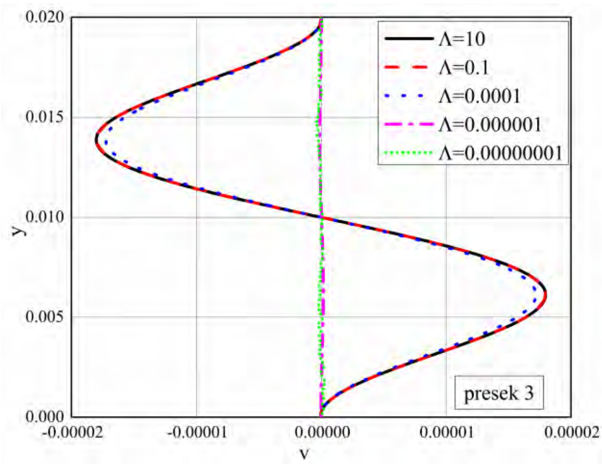


Slika 7.7 Bezdimenziona brzina za različite vrednosti poroznosti

Na slikama 7.6 i 7.7 data je uzduţna brzina tj. brzina u pravcu x ose kanala za različite vrednosti poroznosti u jednom poprečnom preseku kanala (za fiksnu vrednost koordinate x). Na slici 7.6 fiksirana je i vrednost koordinate z, a na slici 7.7 fiksirana je i vrednost koordinate y. Tako na slici 7.6 imamo promenu uzduţne brzine u odabranom fiksnom preseku u funkciji koordinate y, a na slici 7.7 u funkciji koordinate z.Ovde se simulacije rade z stalno polje brzine tj. zakonstantan protok, a kod analitičkih rešenja za $\partial p/\partial x = \text{const}$.

Treba se podsetiti da je kod odreĎivanja analitičkog rešenja zbog uvedenih aproksimacija ova brzina zavisila samo od koordinate y.

Na slici 7.6 se zapaţa da se sa smanjenjem poroznosti smanjuje i uzduţna brzina što pokazuje i analitičko rešenje ovog problema. Sa slike 7.7 se zapaţa da se uzduţna brzina po širini kanala gotovo ne menja tj. skoro da ne zavisi od koordinate z što opravdava uvoĎenje aproksimacija prilikom odreĎivanjaanalitičkog rešenja.

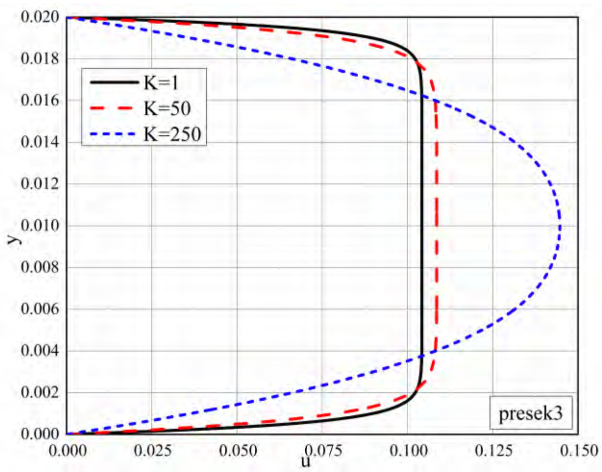


Slika 7.8 Bezdimenziona poprečna brzina za različite vrednosti poroznosti

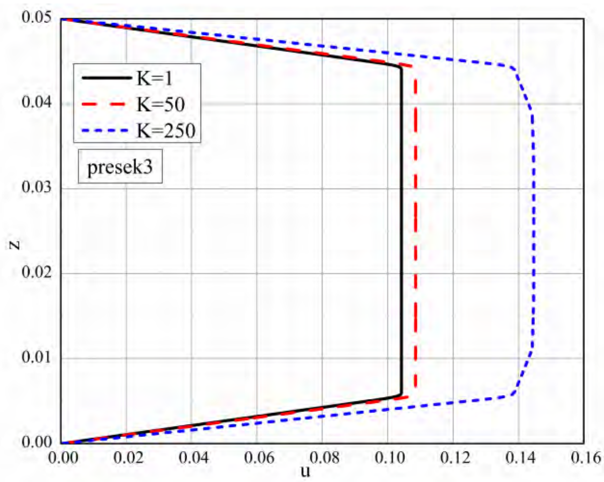
Na slici 7.8 predstavljena je bezdimenziona poprečna brzina u jednom poprečnom preseku kanala u funkciji koordinate y za različite vrednosti poroznosti. Zidovi kanala su nepropustljivi i na njima ne postoje izvori/ponori. Sa slike se zapaţa da za male vrednosti poroznosti nema promene ove brzine dok su za veće vrednosti poroznosti ove promene vrlo male, manje od 1%, tako da se moţe smatrati da je ova brzina konstantna u poprečnom preseku kanala što je dobijeno i analitičkim rešenjem. Dakle ova slika opravdava naše analitičke modele. Brzina v se zanemaruje jer je 10000 puta manja od brzine u pracu ose x.

Na slikama 7.9 i 7.10 prikazana je bezdimenziona uzduţna brzina u poprečnom preseku kanala za različite vredosti faktora otpora sredine. Na slici 7.9 je fiksirana i vrednost koordinate z a na slici 7.10 je fiksirana i vrednost koordinate y.

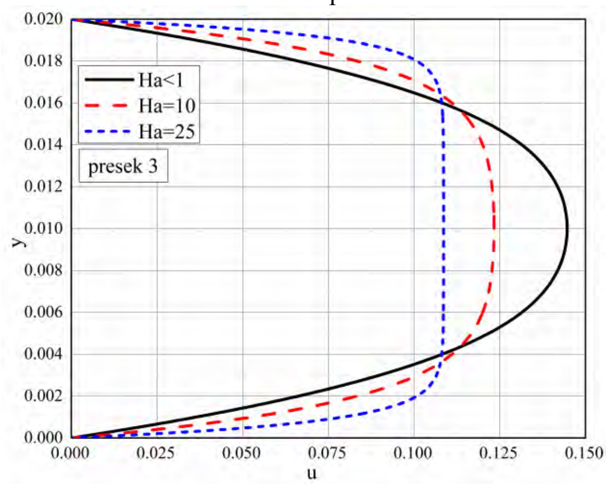
Sa slike 7.9 se zapaţa da sa povećanjem ovog faktora brzina u poprečnom preseku kanala raste, a sa slike 7.10 se vidi da ova brzina skoro da ne zavisi od koordinate z.



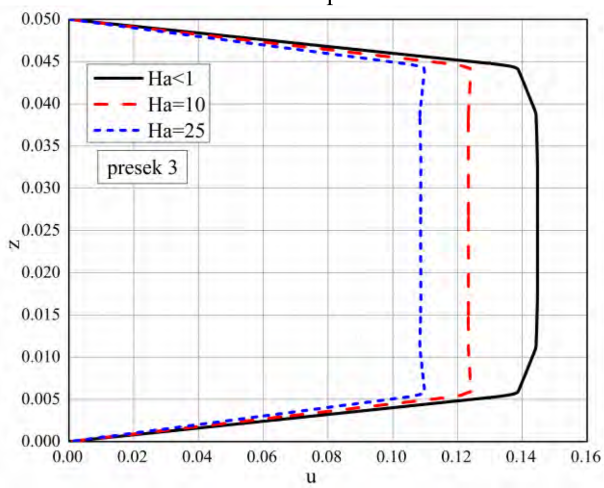
Slika 7.9 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti faktora otpora sredine



Slika 7.10 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti faktora otpora sredine



Slika 7.11 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Hartmann-ovog broja

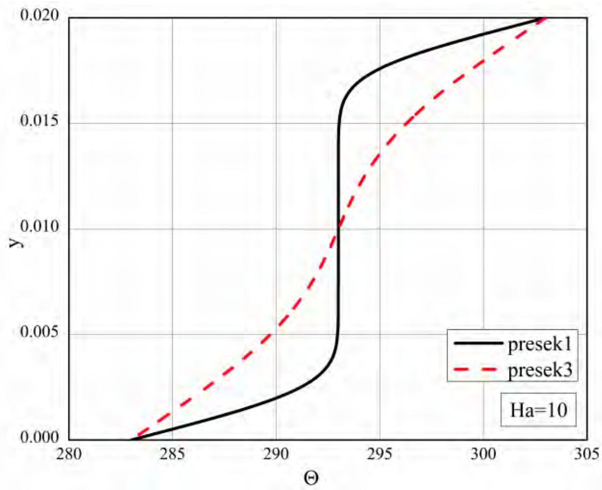


Slika 7.12 Bezdimenziona uzduţna brzina za različite vrednosti Hartmann-ovog broja

Na slikama 7.11 i 7.12 data je bezdimenziona uzduţna brzina u jednom poprečnom preseku kanala za različite vrednosti Hartmann-ovog broja. Na slici 7.11 fiksirana je i vrednost koordinate z a na slici 7.12 fiksirana je i vrednost koordinate y.

Sa slike 7.11 se zapaţa da povećanjem vrednosti Hartmann-ovog broja se poravnava profil uzduţne brzine što je dobijeno i analitičkim rešenjem. Sa slike 7.12 se zapaţa da za sve vrednosti Hartmann-ovog broja ova brzina skoro da ne zavisi od koordinate z što opravdava uvedene pretpostavke pri odreĎivanju analitičkog rešenja.

I ovde je neophodno naglasiti da su simulacije vršene za konstantan protok što je uobičajeno. U slučaju zadavanja pritiska na ulazu i izlazu iz domena rešenja su manje tačnosti zbog problema osrednjavanja pritiska u svim kontrolnim zapreminama na ulazu i izlazu iz domena uz promenu brzine u ovim presecima.

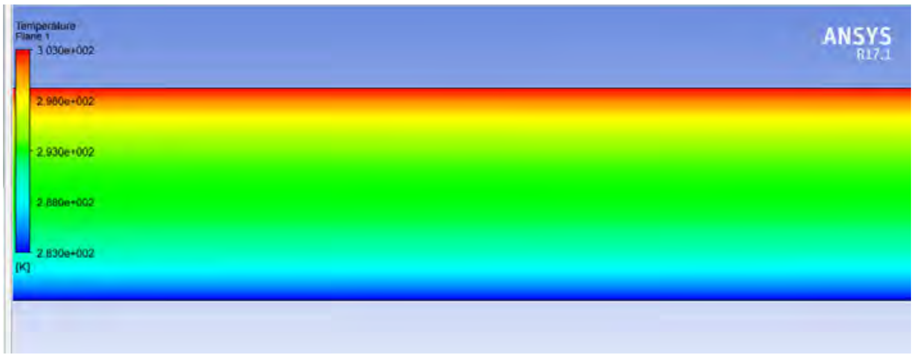


Slika 7.13 Temperatura u različitim presecima kanala

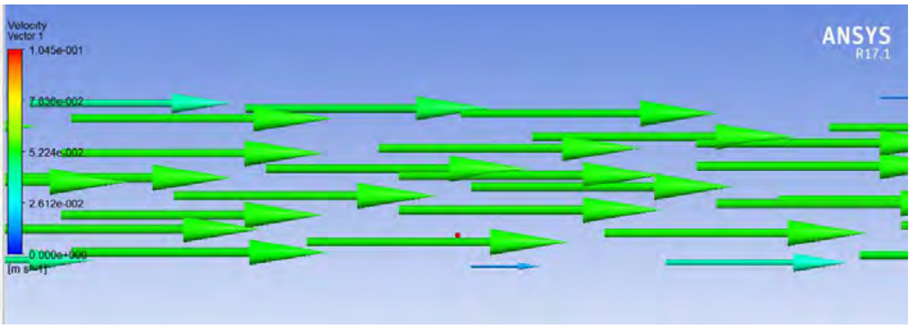
Na slici 7.13 data je bezdimenziona temperatura za dva različita preseka od kojih je presek 1 blizu ulaza u kanal, a presek 3 blizu izlaza kanala. U donjoj polovini poprečnog preseka kanala ova temperatura je viša na ulazu u kanal u preseku 1 od temperature u preseku 3, dok je u gornjoj polovini poprečnog preseka kanala obrnuto.

Neki od dobijenih rezultata biće prikazani i slikama u boji.

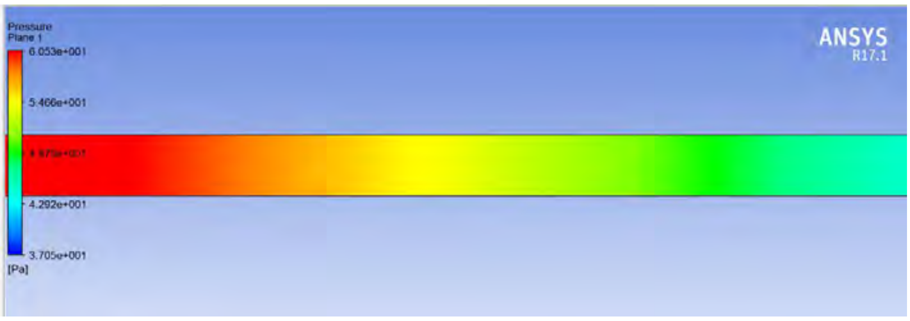
Slika 7.14 Polje brzine na ulazu u kanal



Slika 7.15 Polje temperature u kanalu



Slika 7.16 Vektorski prikaz brzine

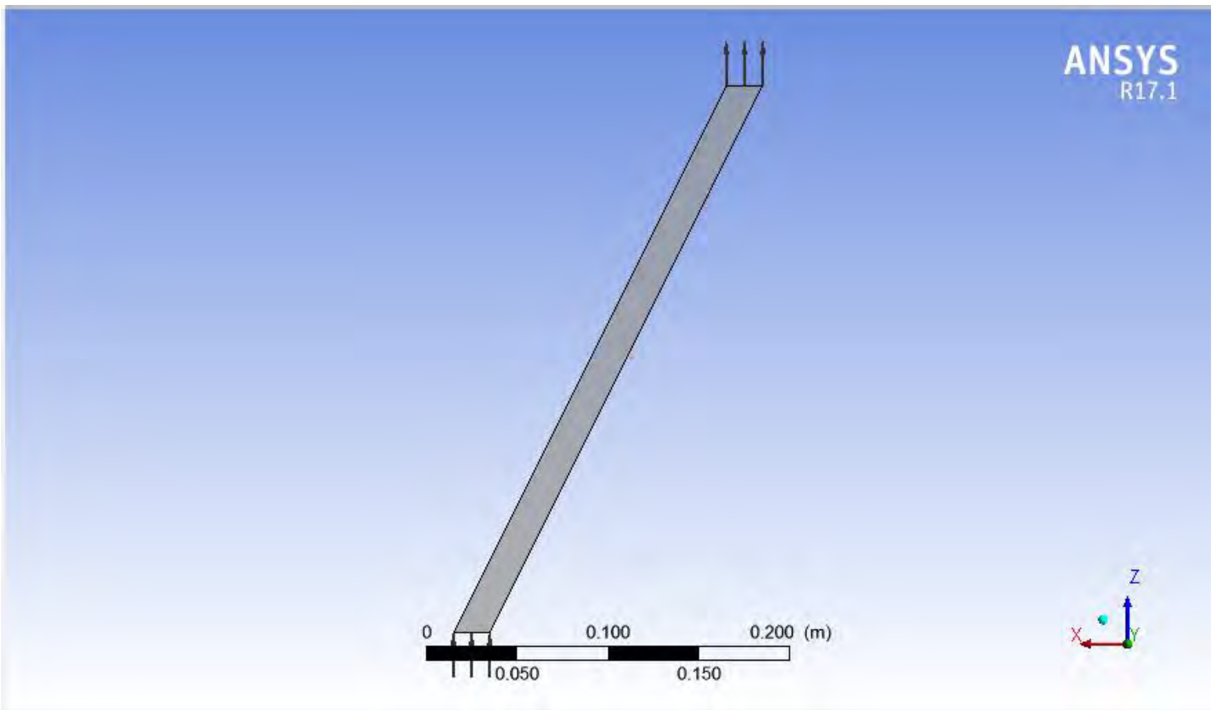


Slika 7. 17 Polje pritiska u kanalu

7.4 Rezultati numeričkih simulacija za kosi porozni kanal

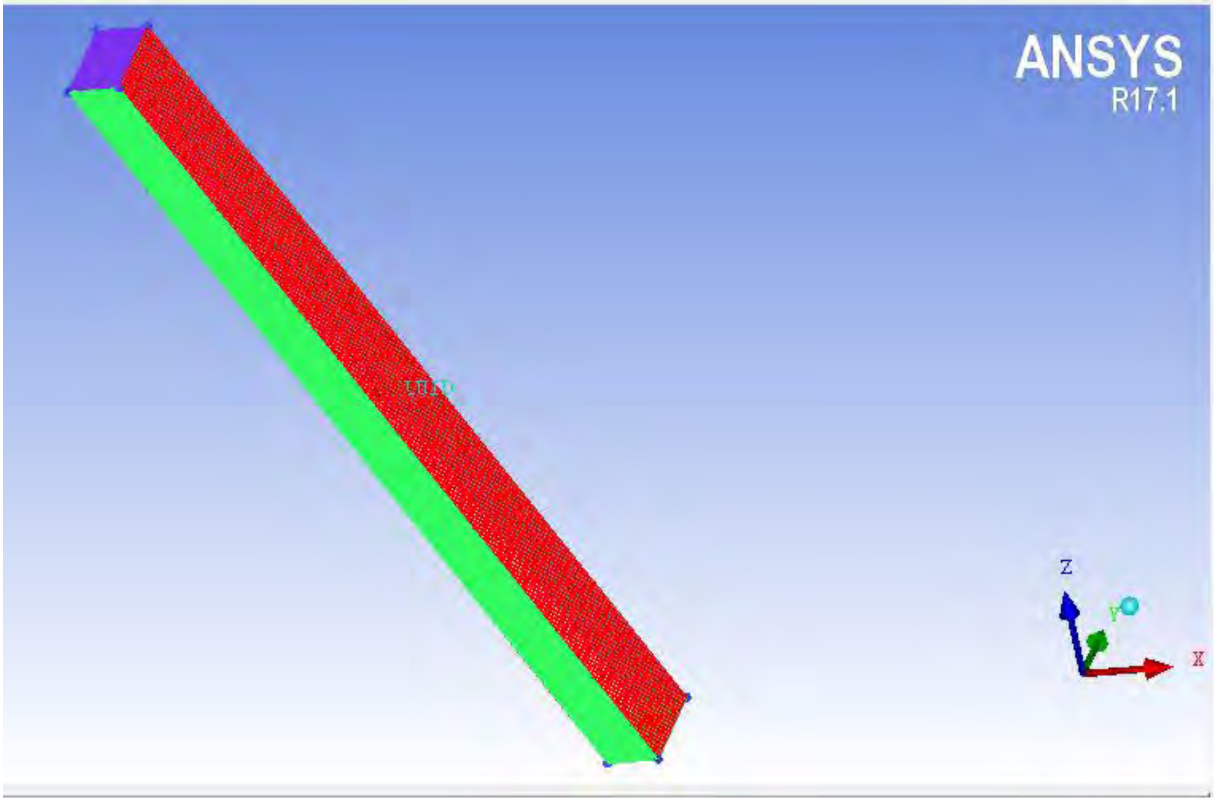
U ovom delu rada izvršena je numerička simulacija strujanja fluida u kosom kanalu izmeĎu ploča koje su na konstantnim, a različitim temperaturama. Prisutno spoljašnje magnetno polje je homogeno i upravno na ploče. Sredina izmeĎu ploča je porozna.

Postavljeni granični uslovi na ulazu su konstantne komponente u i w, dok je komponenta u y pravcu jednaka nuli. Posledica ovog graničnog uslova je konstantni protok u kanalu. Kao granični uslov na izlazu iz kanala zadat je konstantan atmosferski pritisak. Strujanje u kanalu odvija se uz prisustvo sile potiska. Sila gravitacije je suprotna smeru z ose. Na svim zidovima definisani su uslovi da nema klizanja. Levi zid je na višoj temperaturi, dok je desni zid na niţoj. Druga dva zida paralelna ravni zx su na konstantnim temperaturama koja je jednaka temperaturi fluida na ulazu.

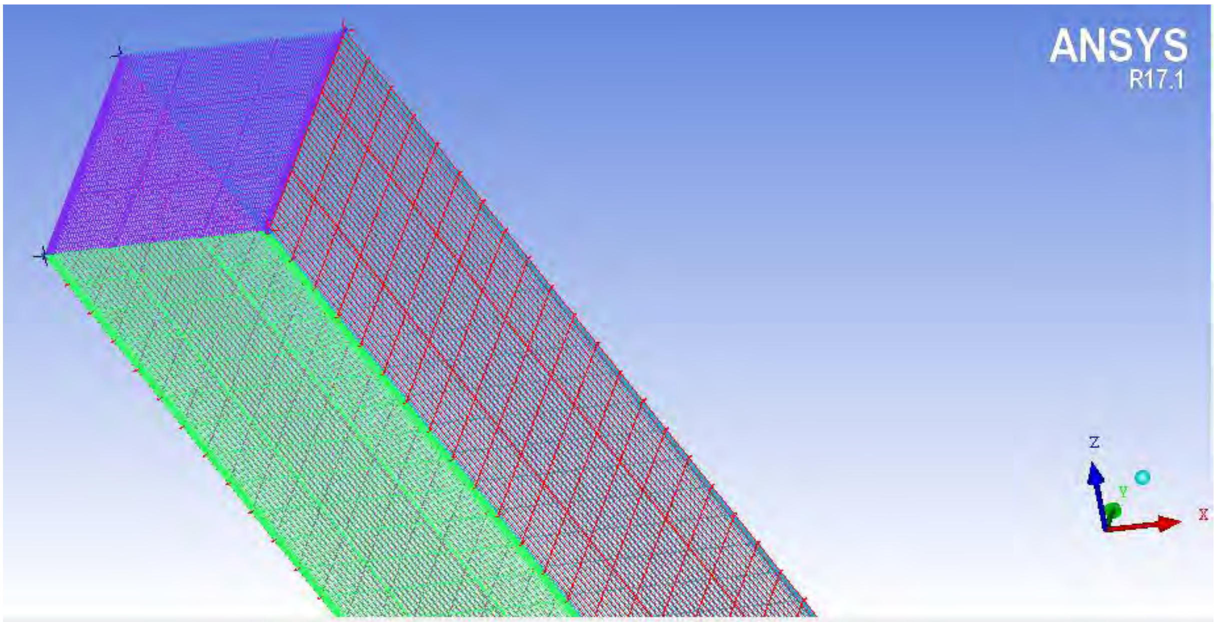


Slika7.18. Model kosog kanala u ICEM-CFD-u

Mreţa za kosi kanal formirana je na sledeći način: u x pravcu ima 100 čvorova, prva čelija je veličine 0.02 mm sa faktorom progresije 0.02 mm na oba zida i maksimalna veličina ćelije je 0.248 mm. U y pravcu ima 40 čvorova i sve čelije su uniformne po 1.28 mm. U z pravcu ima 100 čvorova i takoĎesu uniformne po 3.38 mm. Formirana mreţa prikazanaje na slikama 7. i 7.

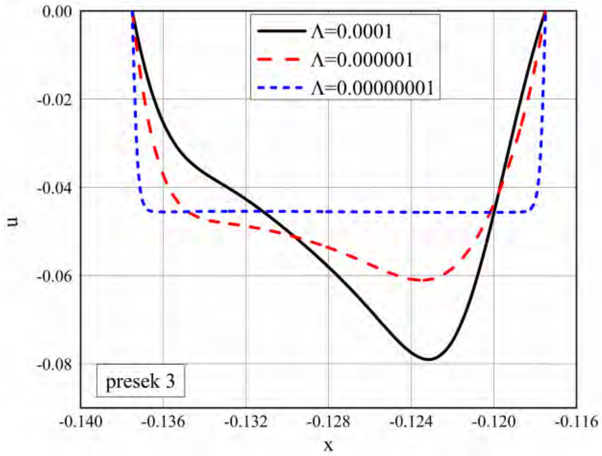


Slika7.19. Domen strujanja u kosom kanalu

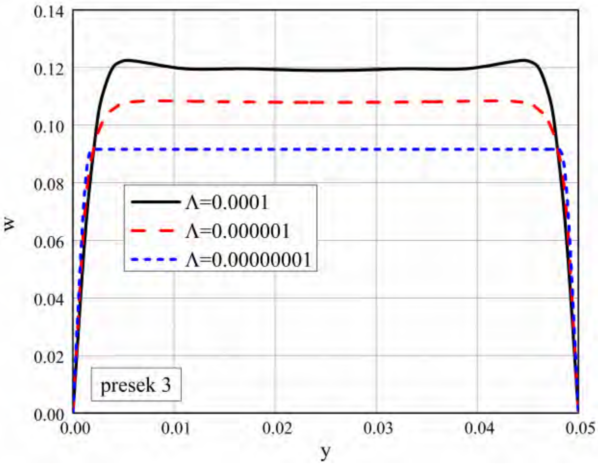


Slika 7.20 Detalj domena strujanja u kosom kanalu

Rezultati dobijeni u Ansys CFX-u mogu se prikazati na više načina. Deo rezultata dobijenih numeričkim simulacijama prikazan je na sledećim slikama u formi grafika.



Slika 7.21Uticaj faktora poroznosti na komponentu brzine u x pravcu

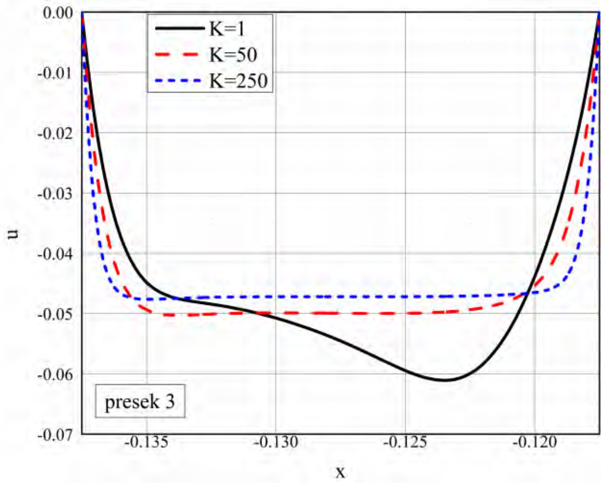


Slika 7.22 Uticaj faktora poroznosti na komponentu brzine u z pravcu

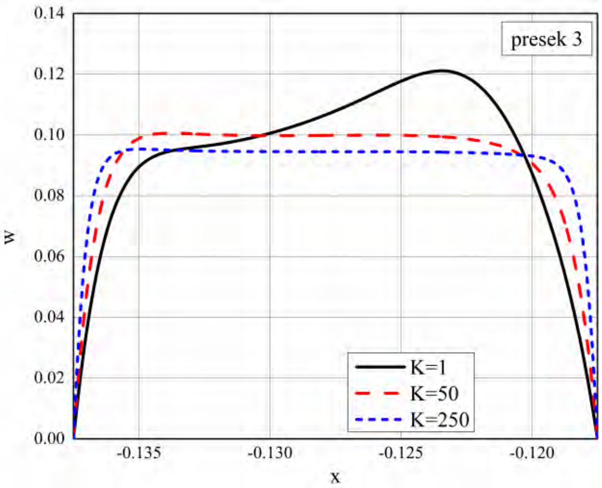
Tako je na slici 7.21 predstavljena projekcija brzine na osu x u preseku koji se nalazi blizu izlaza kanala (presek 3), a na slici 7.22 je predstavljena projekcija ove brzine na osu z.

Sa ovih slika se zapaţa da je brzina manja za manje vrednosti poroznosti. Profil projekcije brzine na osu x, za najmanju datu vrednost poroznosti, je poravnat u preseku kanala, dok je profil projekcije brzine na osu z poravnat za sve vrednosti poroznosti u celom poprečnom preseku kanala.

U Ansys CFX softveru moguće je pored poroznosti definisati i dopunski faktor otpora sredine koji karakteriše materijal ispune. Ove analize predstavljene su na slikama 7.23 i 7.24.

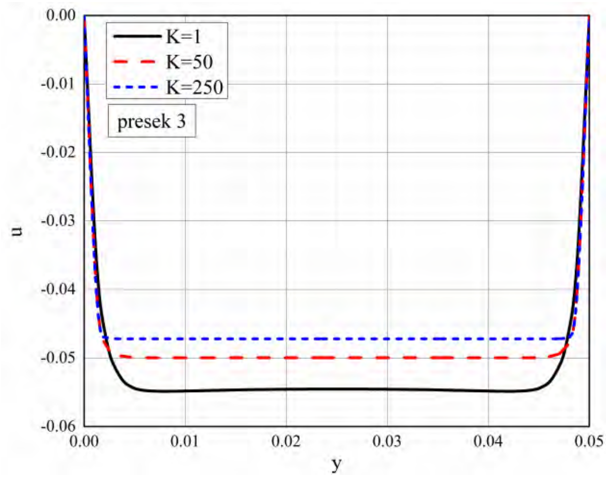


Slika 7.23 Uticaj faktora otpora sredine na komponentu brzine u x pravcu

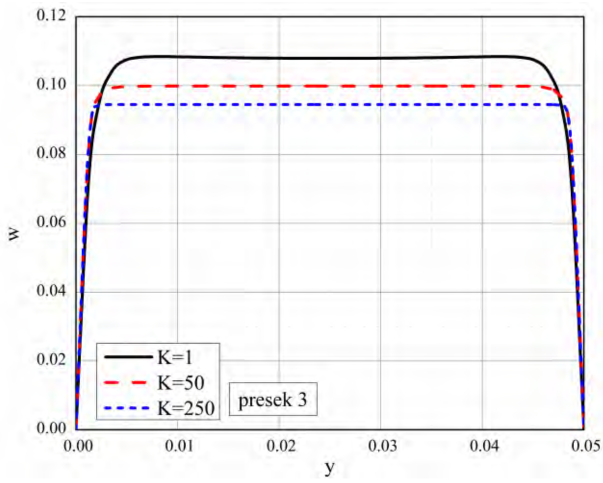


Slika 7.24 Uticaj faktora otpora sredine na komponentu brzine u z pravcu

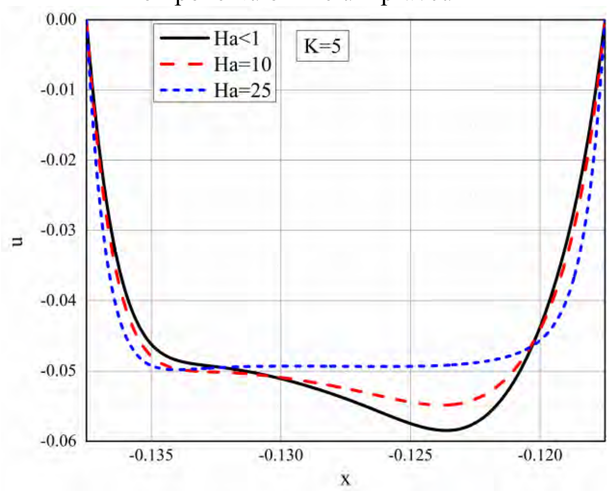
Na slici 7.23 prikazana je projekcija brzine u istom preseku, blizu izlaza kanala, na osu x za različite vrednosti faktora otpora sredine K. Na slici 7.24 je profil projekcije ove brzine na osu z. Zapaţa se poravnanje profila i jedne i druge projekcije brzine sa porastom vrednosti faktora otpora sredine.



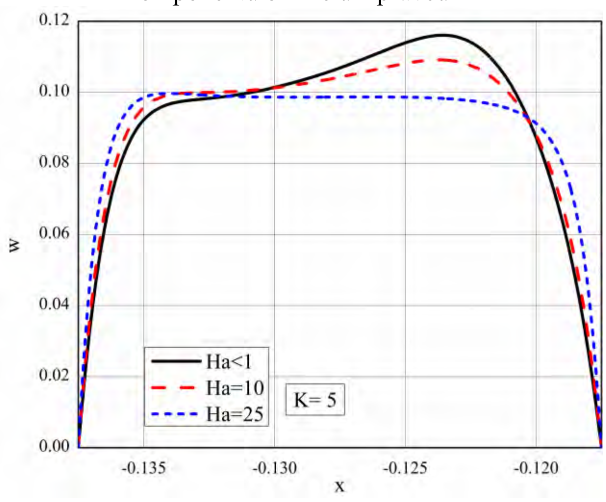
Slika 7.25 Uticaj faktora otpora sredine na komponentu brzine u x pravcu



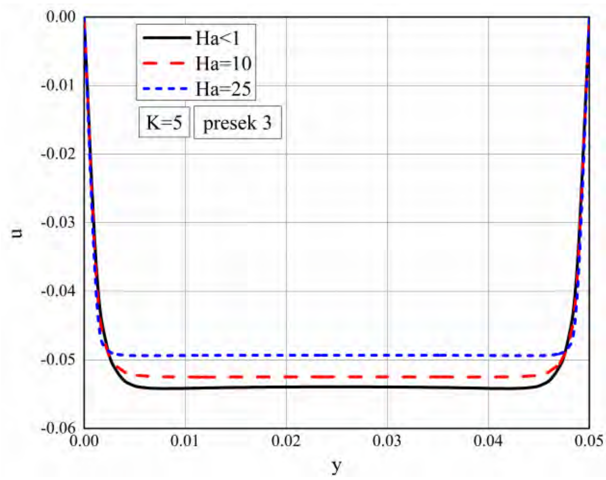
Slika 7.26 Uticaj faktora otpora sredine na komponentu brzine u z pravcu



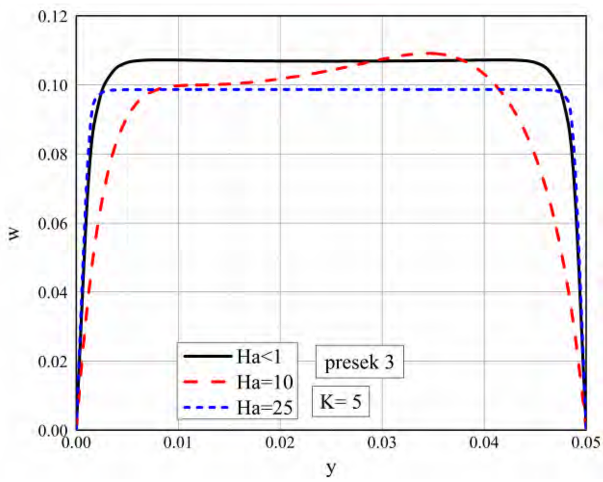
Slika 7.27 Uticaj Hartmannovog broja na komponentu brzine u x pravcu



Slika 7.28 Uticaj Hartmannovog broja na komponentu brzine u z pravcu



Slika 7.29 Uticaj Hartmann-ovog broja na komponentu brzine u x pravcu

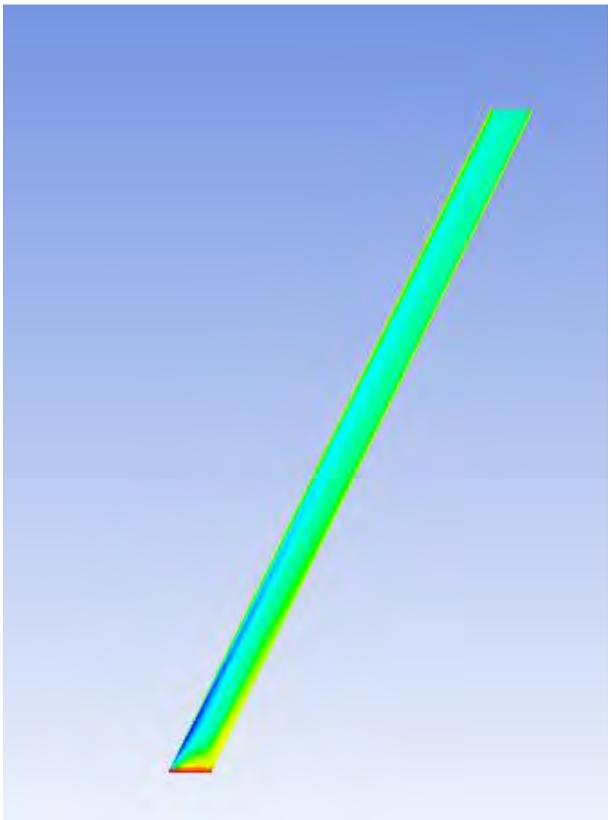


Slika 7.30 Uticaj Hartmann-ovog broja na komponentu brzine u z pravcu

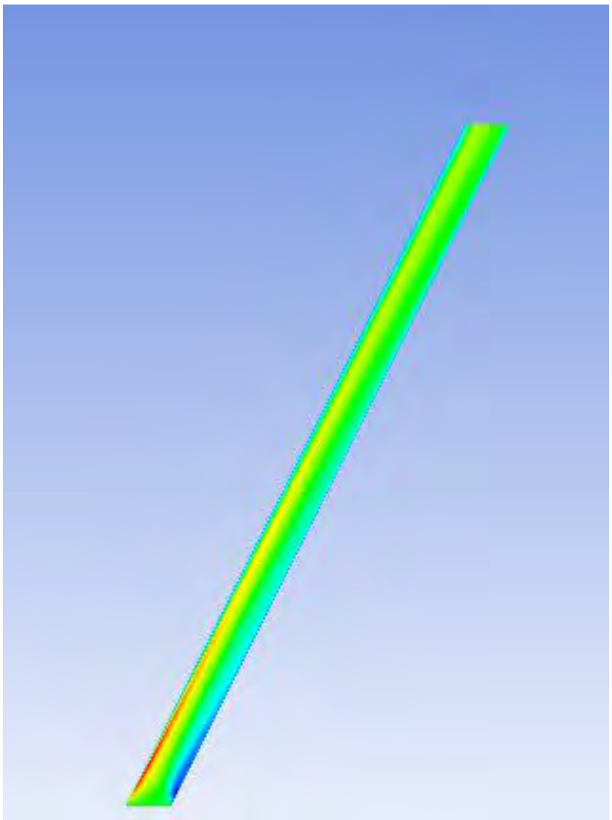
Na slikama 7.25 i 7.26 predstavljene su projekcije brzine na osu x i z u funkciji koordinate y. I sa ovih slika se dolazi do istog zaključka tj. da povećanje faktor otpora sredine poravnava profile ovih projekcija.

Na slikama 7.27 i 7.28 predstavljene su projekcije brzine u istom preseku na ose x i z u funkciji koordinate x za različite vrednosti Hartmann-ovog broja, a na slikama 7.29 i 7.30 u funkciji koordinate y. Sa ovih slika se zapaţa da porast Hartmann-ovog broja dovodi do poravnanja profila ovih projekcija brzine u celom poprečnom preseku kanala.

Ansys CFX pruţa mogućnost prikaza dobijenih rezultata i na druge načine. Na slikama koje slede prethodno dobijeni rezultati prikazani su na slikama u boji.

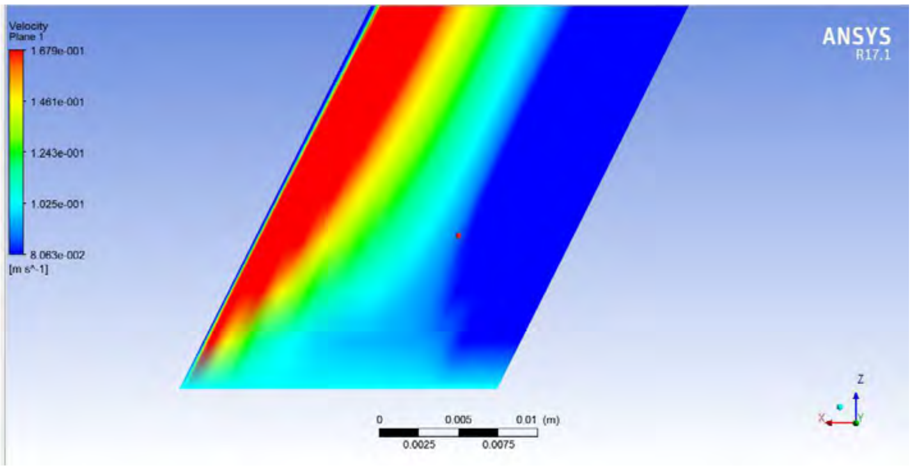


Slika 7.31 Komponenta brzine u u kosom kanalu

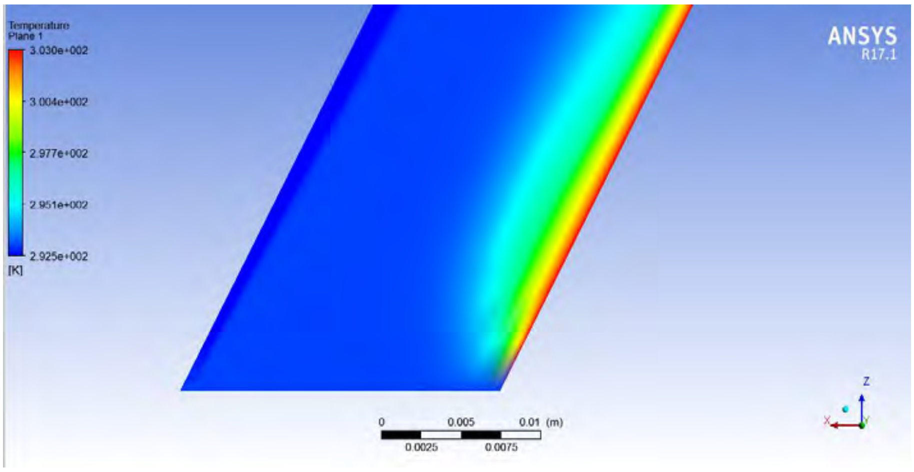


Slika 7.32 Komponenta brzine w u kosom kanalu

Na slikama 7.33 i 7.34 prikazana u polja ukupne brzine odnosno temperature u kanalu.



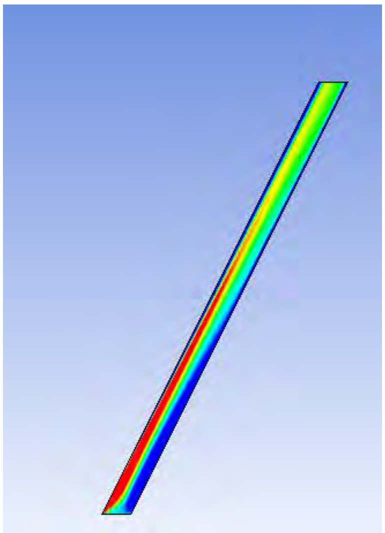
Slika 7.33 Polje ukupne brzine u kosom kanalu



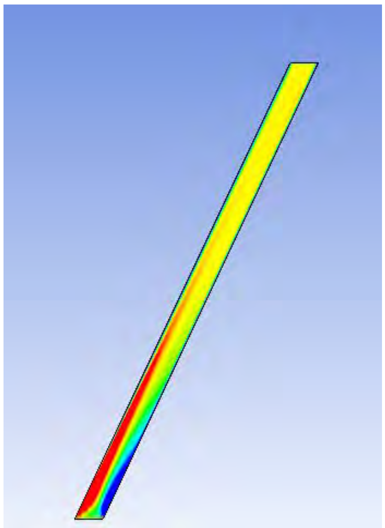
Slika 7.34 Polje temperature u kosom kanalu

Na slikama 7.35, 7.36 i 7.37 prikazan je uticaj Hartmann-ovih brojeva na polje brzine. Rezultati su prikazani za slučaj kada je $K = 5$ i $\Lambda = 0.000001$.

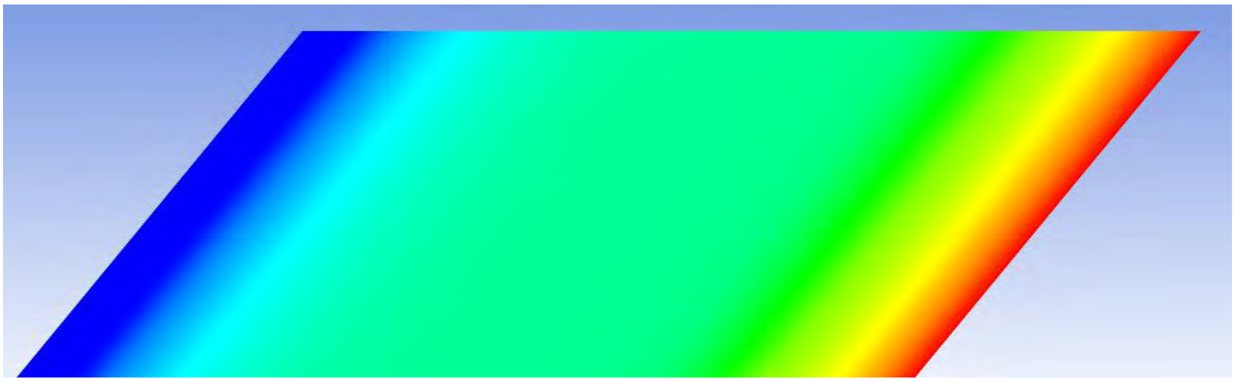
Slika 7.35 Polje brzine Ha<1



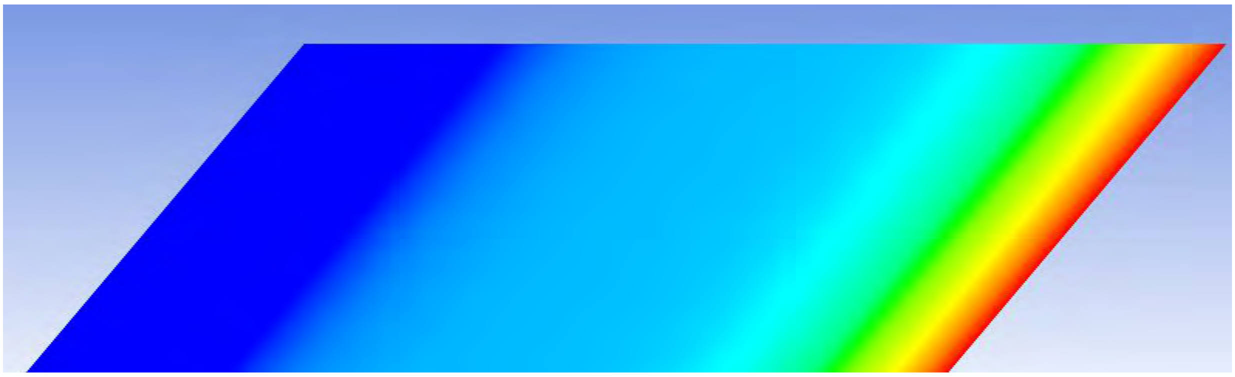
Slika 7.36 Polje brzine Ha=10



Slika 7.37Polje brzine Ha=25



Slika 7.38Polje temperature Ha<1



Slika 7.39 Polje temperature Ha=10

Slika 7.40 Polje temperature Ha=25

Literatura

[1] Henry Darcy, Fontainespubkiques de la ville de Dijan, Librairie des Corps Imperianx des Pontset Chausses et des Mines, 1856.

[2] Zhengwen Zeng and Reid Grigg, A Criterion for Non-Darcy Flow in Porous Media, Transport in Porous Media (2006) 63:57-69 DOI 10.1007/S 11242-005-2720-3

[3] Massond Kaviany, Principles of Heat Transfer in Porous Media, Second Edition, Springer, 1995

[4] Emmanuel Defay and IlyaRomanovich Prigogine, Surface Tension and Adsorption, J.Wiley, 1996.

[5] Hermann Schlichting, Boundary-layer Theory, McGraw-Hill, 1968.

[6] Robert Stephen Cunningham and John Williams, Diffusion in Gases and Porous Media, Plenum, 1980.

[7] AntoliyMyshkis, N.D.Kopachevskii and V.G.Babskii, Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary, Springer-Verlang, 1987

[8] George Keith Batchelor, G.K. and O'Brien, R.W, 1977, Thermal or Electrical Conduction Through a Granual Material, Proceeding of the Royal Society of London, A355, 313-333

[9] Reynolds, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be director sinuous and the law of resistance in paralelchannes, Proceedings of the Royal Society of London 35, 84-89 (1883.)

[10] Prandtl L., UberFlussigkeitsbewenungbeisehrkleinerReibung, Verhandl. d. III Intern. Mathem. Kongress, Heidelberg, 1904.

[11] Martin Knudsen, Die Molekularstromung der GasedurchOffnungen under die Effusion, Annalen der Physik, Volume 333, Issue 5, 1909.

[12] Taylor, G. I., Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube, Proceedings of the Royal Society of London, A219, 186-203, 1953.

[13] S. J. Gregg, K. S.W. Sing, Adsorption, Surface Area and Porosity, Berichte der Bunsengesellschaft fur physikalischeChemie, Volume 86, Issue 10, 1982. https://doi.org./10.1002/bbpc.19820861019

[14] P. C. Carman, Flow of Gases Through Porous Media, Academic, 1956

[15] Morris Muskat, The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, International Human Resourses Development, 1937.

[16] Leverett, M. C., 1941, Capillary Behavior in Porous Solids, Trans. AIME, 142, 152-169

[17] Buckley, S. E. and Leverret, M. C., 1942, Mechanism of Fluid Displacement in Sands, Trans. AIME, 146, 107-116

[18] Brinkman, H. C. , 1947., A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles, Appl. Sci. Res., A1, 27-34

[19] Brinkman, H. C., 1948., On the Permeability of Media Consisting of Closely Packed Porous Particles, Appl. Sci. Res., A1, 81-86

[20] Ergun S., 1952, Fluid Flow Through Packed Column, Chemical engineering progress, 48, 89-94

[21] Grootenhuis P., Powel R. W and Tye R. P., 1952, Thermal and Electrical Conductivity of Porous Metals Made by Powder Metallurgy Method, Proceeding of the Physical Society, 502-511

[22] Baron T., 1952, Generalized Graphic Method for the Design of Fixed Bed Catalytic Reactors, Chemical Engineering Progress, 48, 118-124

[23] Scheidegger, A. E., 1954, Statistical Hydrodynamics in Porous Media, J. Appl. Phys., 25, 994-1001

[24] Taylor, G. I., 1953, Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube, Proc. Roy. Soc. London, A219, 186-203

[25] Aris, R., 1956, On the Dispersion of a Solute in a Fluid Flowing Through a Tube, Proc. Roy. Soc. London, A235, 67-77

[26] De Josselin De Jong, G., 1958, Longitudinal and Transverse Diffusion in Granular Deposits, Trans. Amer. Geophys. Union, 39, 67-74

[27] Saffman, P. G., 1959, A Theory of Dispersion in a Porous Medium, J. Fluid Mech., 6, 321-349

[28] Luikov A. V., Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies, Pergamon, 1966.

[29] Chen J. C. and Churchill S. W., 1963, Radiant Heat Transfer in Paced Beds, AICHE J., 9, 35-41

[30] Weekman V.W. and Meyers J.E., 1965, Heat Transfer Characteristics of Cocurrent Gas-Liquid Flow in Packed Beds, AICHE J., 11, 13-17

[31] Beavers G. S. and Joseph D. D., 1967, Boundary Condition at a Naturaly Permeable Wall, J. Fluid Mech., 30, 197-207

[32] Mason E. A., 1967, Flow and Diffusion of Gases in Porous Media, J. Chemical Physies 46, 3139

[33] Slattery J. C., 1970. Two-Phase Flow through Porous Media, J. ChemicalPhysics 46, 3199

[34] Horn F. J. M., 1971, Calculation of Dispersion Coefficient by Means of Moments, AICHE J.,17, 613-620

[35] Whitaker S., 1973, The Transport Equations for Multi-Phase Systems, Chem. Engng. Sci., 28, 139-147

[36] Sondergeld C. H. and Turcotte D. L., 1977, AnExperimantal Study of Two-Phase Convection in a Porous Media with Applications to Geological Problems, J.Geophys. Res., 82, 2045-2052

[37] Brenner H., 1980, Dispersion Resulting from Flow Through Spatially Periodic Porous Media, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 297, 81-133

[38] Brewster M.Q. and Tien C. L., 1982, Examination of the Two-Flux Model for Radiative Transfer in Particulate Systems, Int. J. Heat Mass Transfer, 12, 1905-1907

[39] Carbonell R. G. and Whitaker S., 1984, Heat and Mass Transfer in Porous Media, in Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Bear and Corapcioglu, eds., MartinusNijhoff Publishers, 121-198

[40] Koch D. L. and Brady J., 1985, Dispersion in Fixed Beds, J. Fluid Mech., 154, 399-427

[41] Koch D. L., Cox R. G., Brenner H. and Brady J., 1989, The Efect of Order on Disperzion in Porous Media, J. Fluid Mech. 200, 173-188

[42] Singh B. P. and Kaviany M., 1991, Independent Theory versus Direct Simulation of Radiation Heat Transfer in Packed Beds, Int. J. Heat Mass Transfer, 34, 2869-2881

[43] Kambiz Vafai, Handbook of Porous Media, Second Edition, Taylor and Francis Group, Boca Raton London New York Singapore, 2005.

[44] Nield D. A., 1991, The Limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface, International Journal of Heat and Fluid Flow, Volume 12, Issue 3, pp. 269-272

[45] Fogler H. S., 1992, Elements of Chemical Reaction , Engineering Englewood Clifs, NJ: Prentice Hall

[46] J. alberto Ochoa-Tapia, J. Antonio Del Rio P. and Stephen Whitaker, 1993, Bulk and surface diffusion in porous media: An aplocation of the surface- a veraging theorem, Chemical Engineering Science, Vol 48, No. 11, pp. 2061-2082, Printed in Great Britain

[47] Michel Quintard and Stephen Whitaker, 1994, Convection, dispersion and interfacial transport of contaminants: Homogeneous porous media, Advances in Water Resources 17, 221-239

[48] KambizVafai, S. J. Kim, 1995, On the Limitations of the Brinkman-Forchheimer-Extended Darcy Equations, International of Heat and Fluid Flow, 16(1):11-15

[49] H. Khallouf, G. Z. Gershuni and A. Mojtabi, 1996, Some properties of convective oscilations in porous medium, J.Numerical Heat Computation and Methodology, Volume 30, Issue 6, 605-618

[50] M. S. Malashetty and V. Padmavathi, 1997, Effect of gravity modulation on the onset of convection in a fluid and porous layer, International Journal of Engineering Science, Volume 35, Issue 9, pp. 829-840

[51] Drian D. Wood, Stephen Whitaker, 1998, Diffusion and reaction in biofilms, Chemical Engineering Science, Volume 53, Issue 3, pp. 397-425

[52] O. A. Nield, D. C. Porneala and J. L. Lage, 1999, A Theoretical Stydy, with Experimental Verification, of the Temperature – Dependent Viscosity Effect on the Forced Convection Through a Porous Medium Channel, J. Heat Transfer 121(2), 500-503

[53] Bourhan Tashtoush, 2000, Analitical Solution for the Effect of Viscous Dissipation on Mixed Convection in Saturated Porous Media, 41, pp. 197-209

[54] A. V. Kuznetsov, D. A. Nield, 2001, Effects of heterogeneity in forced convection in a porous medium: Triple layer or conjugate problem, Numerical Heat Transfer, Part A, An International Journal of Computation and Methodology, Volume 40, Issue 4, pp. 363-385

[55] M. Celli, D. A. S. Rees, A. Barletta, 202, The effect of Local Thermal Non-Equilibrium on forced convection boundary layer flow from a heated surface in porous media, Int. J. Heat Mass Transfer 45, pp. 4949-4955

[56] D. A. Nield, A. V. Kuznetsov, Ming Xiong, 2003, Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel with walls at uniform

temperature, with axial conduction and viscous dissipation, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 46, Issue 4, pp. 643-651

[57] F. Duval, F. Fichot, M. Quintard, 2004, A local thermal non-equilibrium model for two-phase flows with phase change in porous media, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 47, Issue 3, pp. 613-639

[58] A. Nouri-Borujerdi and M. Nazari, 2005, Heat Transfer and Fluid Flow in Porous Media with Two Equations Non-Darcian Model, ASME, Fluids Engineering Division Summer Meeting, Volume 2, pp. 637-640

[59] A. W. Aregba, P. Sebastian, J. P. Nadean, 2006, Stationary deep-bed drying: A comparasion study between logaritmic model and a non-equilibrium model, Journal of Food Engineering, Volume 77, pp.27-40

[60] G. Brihercz, J. Beke, 2006, Semi-Empirical model of convective drying with wide range layer depth validity, Drying Tehnology, Vol. 24, pp. 1165-1172

[61] A. W. Aregba, J. P. Nadeau, 2007, Comparison of two non-equlibrium models for static grain deep-bed drying by numerical simulations, Journal of Food Engineering, Vol. 78, pp. 1174-1187

[62] L. Bennaman and A. Belhamri, 2008, Study of Heat and Mass Transfer in Porous Media: Application to Packed-Bed Drying, FDMP, Vol. 4, pp. 221-230

[63] J. C. Umavati, A. J. Chamkha, A. Mateen, A. Al-Mudhaf, 2009, Unsteady Oscillatory Flow and Heat Transfer in Horizontal Composite Porous Medium Channel, Nonlinear Analysis: Modeling and Control, Vol. 14, No. 3, 397-415

[64] M. S. Astanina, Mikhail AlexandrovichSheremet, J. C. Umavahi, 2015, Unsteady natural convection with temperature-dependent viscosity in a square cavity filled with a porous medium, Transport in Porous Media, Volume 110, Issue 1, pp. 113-126

[65] R. Suresh Babu, B. Rushi Kumar and P. A. Dinesh, 2018, Effects of variable fluid properties on a double diffusive mixed convection viscous fluid over a semi infinite vertical surface in a sparsely packed medium, Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT), 10,3 , DOI:10.5098/hmt.10.3 www.ThermalFluidsCentral.org

[66] M. H. Hamdan and M. T. Kamel, 2011, Flow through Variable Permeability Porous Layers, Adv. Theor. Mech., Vol. 4, No. 3, 135-145

[67] D. A. S. Rees and I. Pop, 2000, Vertical free convection in a porous medium with variable permeability effects, International Journal of Heat and Mass Transfer, 43, 2565-2571

[68] Z. Alloni, R. Bennacer and P. Vasseur, 2009, Variable permeability effect on convection in binary mixtures saturating a porous layer, Heat and Mass Transfer, 45, 1175-1127

[69] I. A. Hassanien, A. A. Salama and A. M. Elaiw, 2003, Variable permeability effect on vortex instability of mixed convection flow in a semi-infinite porous medium bounded by a horizontal surface, Applied Math. Comput., 146, 829-847

[70] D. A. Nield and A. V. Kuznetsov, 2009, The effect of a transition layer between a fluid and a porous medium: shear flow in a channel, Transport Porous Media, 78, 477-487

[71] M. S. Abu Zaytoon, T. L. Alderson, M. H. Hamdan, 2016, Flow over a Darcy Porous Layer of Variable Permeability, Journal of Applied Mathematics and Physics, 4, 86-99

[72] T. W. Lathem, 1996, Fluid motion in a peristaltic pump, Master's thesis, Massachusetts, MIT, Cambridge

[73] M. H. Haroun, 2007, Non-linear peristaltic flow of a fourth grade fluid in a inclined asymmetric channel, Computational Material Science, Volume 39, Issue 2, pp. 324-333

[74] T. Hayat, Q. Hussain and N. Ali, 2008, Influence of partial slip on the peristaltic flow in a porous medium, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 387, Issue 14, 3399-3409

[75] Kh. S. Mekheimer and Y. AbdElmabond, 2008, Peristaltic Flow through a Porous Medium in an Annulus: Application of an Endoscope, Applied Mathematics and Information Sciences, 2(1), 103-121

[76] K. Vajraveln, S. Sreenadh, P. Lakshminarayana, G.Sucharitha and M.M. Rashidi, 2016, Peristaltic Flow of Phan-Thein-Tanner Fluid in an Asymmetric Channel with Porous Medium, Journal of Applied Fluid Mehanics, Vol. 9, No. 4, pp. 1615- 1625

[77] C. K. Selvi, C. Haseena, A. N. S. Srinivas and S. Sreenadh, 2017, The effect of heat transfer on peristaltic flow of Jeffrey fluid in an inclined porous stratum, 14th ICSET-2017, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering263, 062027 doi: 10.1088/1757-899X/263/6/062027

[78] A. R. A. Khaled, K. Vafai, 2003, The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues, International Journal of Heat and Mass Transfer, 46, 4989-5003

[79] Song Fu-quan, Xu You-sheng, Li Hua-mei, 2007, Blood flow in capillaries by using porous media model, Journal of Central University of Tehnology, Volume 14, Supplement 1, pp. 46-49

[80] Obaid Ullah Mehmod, Norzeiha Mustapha, Sharidan Snafie, 2012, Unsteady Two – Dimensional Blood Flow in Porous Artery with Multi-irregular Stenoses, Transp. Porous Med., 92, pp. 259-275

[81] D. S. Sankar and Atulya K. Nagar, 2013, Mathematical Analysis of Blood Flow in Porous Tubes: A Comparative Study, Hindawi Publishing Corporation Advances in Mechanical Engineering, Volume 2013, Article ID 287954, 12 pages

[82] Myriam Peyrounette, Yohan Davit, Michel Quintard, SylveiLorthois, 2018, Multiscale modeling of blood flow in cerebral microcirculation: Details at capillary scale control accuracy at the level of the cortex, Published: January 11, 2018; https://doi.org/10.1371/journal.pone.0189474

[83] A. Raptis and N. Kafoisias, 1982, Magnetohydrodynamic free convective flow and mass transfer through a porous medium bounded by an infinite vertical porous plate with constant heat flux, Canadian Journal of Physics, 60(12), pp. 1725-1729

[84] A. Raptis and C. Perdikis, 1983, MHD unsteady free convective flow through a porous medium, Energy Research, Volume 7, Issue 4, pp. 391-395

[85] A. A. Raptis, 1986, Flow through a porous medium in a presence of a magnetic field, Int. J. Energy Res., Volume 10, pp. 97-100

[86] Basant Kumar Iha and Ravindra Prasad, 1989, Effect of magnetic field on the free-convection and mass transfer flow through a porous medium, Astrophysics and Space Science 161(2), pp. 195-200

[87] R. C. Ram and R. K. Jain, 1990, MHD free convective flow through a porous medium in a rotating fluid, International Journal of Energy Research, Volume 14, Issue 9, pp. 933-939

[88] B. K. Iha, 1991, MHD free convection and mass transfer flow through a porous medium, Astrophys. Space Sci. 175, pp. 283-289

[89] T. K. Aldoss, M. A. Al-Nimr, M. A. Jarrah and B. J. Al-Sha'er, 1995, Magnetohydrodynamic mixed convection from a vertical plate embedded in a porous medium, Numerical Heat Transfer Part A: Aplications An International of Computation and Methodology, Volume 28, Issue 5, pp. 635-645

[90] Ali J. Chamkha, 1996, Non-Darcy hidromagnetic free convection from a cone and a wedge in porous media, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 23, No. 6, 875-887

[91] W. Bian, P. Vasseur, E. Bilgen, F. Meng, 1996, Effect of an electromagnetic field on natural convection in a inclined porous layer, International Journal of Heat and Fluid Flow, Volume 17, Issue 1, pp. 36-44

[92] Ali J. Chamkha, 1997, MHD-free convection from a vertical plate embedded in a thermally stratified porous medium with Hall effects, Appl. Math. Modelling, Volume 21, pp. 603-609

[93] K. D. Alagoa, G. Tay, T. M. Abbey, 1998, Radiative and Free Convective Effects of a MHD Flow Through a Porous Medium Between Infinite Parallel Plates with Time-depended Suction, Astrophysics and Space Science, Volume 26, Issue 4, pp. 455-488

[94] A. J. Chamkha and A. R. A. Khaled, 2000, Hydro-magnetic combined heat and mass transfer by natural convection from permeable surface embedded in a fluidsaturated porous medium, Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow, 10, pp. 455-477

[95] C. Geindrean and J. L. Auriault, 2002, Magnetohydrodynamic flows in porous media, J. Fluid Mech., Vol. 466, pp. 343-363

[96] R. N. Jat and Anuj K. Jhankal, 2003, MHD viscous flow through a porous medium past an oscillating plate in a rotating system, Indian Journal of Engineering and Materials Sciences, Vol. 10, pp. 37-40

[97] M. F. El-Amin, 2003, Combined effect of viscous dissipation and Joule heating on MHD forced convection over a nonisotermal horizontal cylinder embedded in a fluid saturated porous medium, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Volume 263, Issue 3, pp. 337-343

[98] Ali J. Chamkha, 2004, Unsteady MHD convective heat and mass transfer past a semi-infinite vertical permeable moving plate with heat absorption, International Journal of Engineering Science, 42, pp. 217-230

[99] Youn J. Kim, 2004, Heat and Mass Transfer in MHD Micropolar Flow Over a Vertical Moving Porous Plate in a Porous Medium, Transport in Porous Media, Volume 56, Issue 1, pp. 17-37

[100] Adrian Postelnicu, 2004, Influence of a Magnetic Field on Heat and Mass Transfer by Natural Convection From Vertical Surfaces in Porous Media Considering Soret and

Dufour Effects, International Journal of Heat and Mass Transfer, 47(6-7), pp. 1467-1472

[101] A. F. Khadrawi, M. O. Odat, Mohammed Qassaim Al-Odat, 2005, Transient MHD free convection flow over a permeable vertical moving plate embedded in porous medium with uniform suction, International Journal of Heat and Tehnology, 23(1), pp. 81-87

[102] M. S. Alam, M. M. Rahman, M.A. Samad, 2006, Dufour and Soret Effects on Unsteady MHD Free Convection and Mass Transfer Flow past a Vertical Porous Plate in a Porous Medium, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 11, No. 3, pp. 217-226

[103] Bhupendra Kumar Sharma, Abhay Kumar Jha, R. C. Chaudhary, 2007, Hall effect on MHD mixed convective flow of a viscous incompressible fluid past a vertical porous plate immersed in porous medium with heat source/sink, Rom. Journ. Ohys., Vol. 52, Nos. 5-7, pp. 487-503

[104] R. C. Chaudhary, Arpita Jain, 2007, Combined heat and mass transfer effects on MHD free convection flow past an oscillating plate embedded in porous medium, Rom. Journ. Phys. Vol. 52, Nos. 5-7, pp. 505-524

[105] M. A. Mansaur, N. F. El-Anssary, A. M. Aly,, 2008, Effects of chemical reaction and thermal stratification on MHD free convective heat and mass transfer over a vertical stretching surface embedded in a porous media considering Sorent and Dufour numbers, Chemical Engineering Journal, Volume 145, Issue 2, pp. 340-345

[106] S. P. Anjali Devi, B. Ganga, 2009, Effects of Viscous and Joules Dissipation on MHD Flow, Heat and Mass Transfer past a Stretching Porous Surface Embedded in a Porous Medium, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 14, No. 3, pp. 303-314

[107] K. Das and G. S. Saha, 2009, Arterial MHD pulsatile flow of blood under periodic body acceleration, Bull. Soc. Math. Banja Luka, Vol. 16, pp. 21-42

[108] F. G.Shehadeh and H. M. Duwari, 2009, MHD natural convection in porous media filled enclosures, Applied Mathematics and Mechanics, 30(9), pp. 1113-1120

[109] S. Srinivas, M. Kothandapani, 2009, The influence of heat and mass transfer on MHD peristaltic flow through a porous space with compliant walls, Applied Mathematics and Computation, Volume 213, Issue 1, pp. 197-208

[110] M. A. Mansour, A. J. Chamkha, R. A. Mohamed, M. M. Abd-El-Aziz, S. E. Ahmed, 2010, MHD natural convection in an inclined cavity filled with a fluid saturated porous medium with heat source in the solid phase, Nonlinear Analysis: Modeling and Control, Vol. 15, No. 1, pp. 55-70

[111] N. Ahmed, H. Kalita and D. P. Barna, 2010, Unsteady MHD free convective flow past a vertical porous plate immersed in a porous medium with Hall current, thermal diffusion and heat source, International Journal of Engineering Science and Technology, Vol. 2, No. 6, pp. 59-74

[112] HemantPoonia, R. C. Chaudhary, 2010, MHD free convection and mass transfer flow over an infinite vertical porous plate with viscous disipation, Theoret. Appl. Mech., Vol. 2, No. 6, pp. 59-74

[113] T. Hayat, Z. Abbas, I. Pop, S. Asghar, 2010, Effects of radiation and magnetic field on the mixed convection stagnation-point flow over a vertical stretching sheet in a porous medium, International Journal of Thermal Sciences, Volume 49, Issue 9, pp. 1813-1820

[114] O. D. Makinde, A. Aziz, 2010, MHD mixed convection from a vertical plate embedded in a porous medium with a convective boundary condition, International Journal of Thermal Sciences, Volume 49, Issue 9, pp. 1813-1820

[115] PareshVyas, AstutoshRanjan, 2010, Dissipative MHD Boundary-Layer Flow in a Porous Medium over a Sheet Stretching Nonlineary in the Presence of Radiation, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, No. 63, pp. 3133-3142

[116] S. Srinivis and R. Muthuraj, 2010, Effects of thermal radiation and space porosity on MHD mixed convection flow in a vertical channel using homotopy analysis method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 15, Issue 8, pp. 2098-2108

[117] D. Ch. Kesavaiah, P. V. Satyanarayana, S. Venkataramana, 2011, Effects of the chemical reaction and radiation absorption on an unsteady MHD convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical permeable moving plate embedded in a porous medium with heat source and suction, Int. J. of Appl. Math. and Mech., Vol. 7(1), pp. 52-69

[118] P. V. SatyaNarayana, G. Ramireddy and S. Venkataramana, 2011, Hall Current Effects on free convection MHD flow past a porous plate, International Journal of Automotive and Mechanical Engineering (IJAME), Volume 3, pp. 350-363

[119] Ariful Islam, Md. Haider Ali Biswas, Md. Rizaul Islam, S. M. Mohiuddin, 2011, MHD micropolar fluid flow through vertical porous medium, Academic Research International, Volume 1, Issue 3, pp. 381-393

[120] T. Hayat, R. Sajjad, Z. Abbas, M. Sajid and Awatif A Hendi, 2011, Radiation effects on MHD flow of Maxwell fluid in a channel with porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 54, Issue 4, pp. 854-862

[121] M. M. Rashidi, M. Keimanesh, O. Anwar Beg and T. H. Hung, 2011, Magnetohydrodynamicbiorheological transport phenomena in a porous medium: A simulation of magnetic blood flow control and filtration, International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, Volume 27, Issue 6, pp. 805-821

[122] Mohammed Mehdi Rashidi and EsmaeelErfani, 2011, A new analytical study of MHD stagnation-point flow in porous media with heat transfer, Computers and Fluids, Volume 40, Issue 1, pp. 172-178

[123] R. N. Barik, G. C. Dash and P. K. Rath, 2012, Heat and mass transfer on MHD flow through a porous medium over a stretching surface with heat source, Mathematical Theory and Modeling, ISSN 2224-5804 (Paper), ISSN 2225-0522 (online), Volume 2, No. 7

[124] TavvaSudhakar Reddy, O. Siva Prasad Reddy, M. C. Rajn and S. V. K. Varma, 2012, MHD free convection heat and mass transfer flow through a porous medium bounded by a vertical surface in presence off hall current, Pelagia Research Library Advances in Applied Science Research, 3(6), pp. 3482-3490

[125] K. Chand, R. Kumar and S. Sharma, 2012, Hydromagnetic oscillatory flow through a porous medium bounded by two vertical porous plates with heat source and soret effect, Pelagia Research Library Advances in Applied Science Research, 3(4), pp. 2169-2178

[126] Md. ZiaulHaque, Md. Mahmud Alam, M. Ferdows and A. Postelnicu, 2012, Micropolar fluid behaviors on steady MHD free convection and mass transfer flow with constant heat and mass flues, joule heating and viscous disipation, Journal of King Sand University-Engineering Sciences, 24, pp. 71-84

[127] Noura S. Al-sudais, 2012, Thermal Radiation Effects on MHD Fluid Flow Near Stagnation Point of Linear Stretching Sheet with Variable Thermal Conductivity, International Mathematical Forum, Vol. 7, No. 51, pp. 2525-2544

[128] Dileep Singh Chauhan and PriyankaRastogi, 2012, Heat Transfer Effects on Rotating MHD Couette Flow in a Channel Partially Filled by a Porous Medium with Hall Current, Journal of Applied Science and Engineering, Vol. 15, No. 3, pp. 281-290

[129] M. Ferdows, Md. Shakhaoath Khan, Md. Mahmud Alam and Shuyn Sun, 2012, MHD Mixed Convective Boundary Layer Flow through a Porous Medium due to an Exponentially Stretching Sheet, Hyndawi, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2012, Article ID 408528, 21 pages

[130] M. M. Rashidi, S. A. Mohimanian Pour, T. Hayat and S. Obaidat, 2012, Analitic approximate solutions for steady flow over a rotating disk in porous medium with heat transfer by homotopy analysis method, Elsevier, Computers and Fluids, Volume54, pp 1-9

[131] T. Hayat, S. A. Shehzad, M. Qasim and S. Obaidat, 2012, Radiative flow of Jeffery fluid in a porous medium with power law heat flux and heat source, Elsevier, Nuclear Engineering and Design, Volume 243, pp 15-19

[132] B. MadhusundanaRao, G. Viswanatha Reddy, M. C. Raju and S. V. K. Varma, 2013, Unsteady MHD Free Convective Heat and Mass Transffer Flow Past a Semi-Infinite Vertical Permeable Moving Plate with Heat Absorption, Radiation, Chemical Reaction and Soret Effects, International Journal of Engineering Sciences and Emerging Technologies, Volume 6, Issue 2, pp 241-257

[133] Nalinakshi N., Dinesh P. A. and Chandrashekar D. V., 2013, Effects of Variable Fluid Properties and MHD on Mixed Convection Heat Transfer from a Vertical Heated Plate Embedded in a Sparsely Packed Porous Medium, IOSR Journal of Mathematich, Volume 7, Issue 1, pp 20-31

[134] Aarti Manglesh and M. G. Gorla, 2013, MHD free convective flow through porous medium in the presence of hall curent, radiation and thermal diffusion, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 44, Issue 6, pp 743-756

[135] Rita Choudhury and HillolKantiBhattacharjee, 2013, MHD Unsteady Free Convective Visco-Elastic Fluid Flow over a Radiative Vertical Porous Plate with Dufour Effects in Presence of Chemical Reaction, International Journal of Computer Applications, Volume 81, No. 2, pp 19-25

[136] R. Choudhury and S. Kumar Das, 2013, Visco-Elastic MHD Free Convective Flow through Porous Media in Presence of Radiation and Chemical Reaction with Heat and Mass Transfer, Journal od Applied Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 4, pp 603-609

[137] B. Devika, P. V. SatayaNarayana and S. Venkataramana, 2013, MHD Ocsillatory Flow of a Visco Elastic Fluid in a Porous Channel with Chemical Reaction, International Journal of Engineering Science Invention, Volume 2, Issue 2, pp 26-35
[138] S. Nadeem, RizwanUlHaq, Noreen Sher Akbar and Z. H. Khan, 2013, MHD three-dimensional Casson fluid flow past a porous linearly stretching sheet, Alexandria Engineering Journal, Volume 52, pp 577-582
[139] M. Turkyilmazoglu, 2013, The analitical solution of mixed convection heat transfer and fluid flow of a MHD viscoelastic fluid over a permeable stretching surface, Elsevier, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 77, pp 263-268
[140] M. Sheikholeslami, M. Hatami and D. D. Ganji, 2013, Analitical Investigation of MHD nanofluid flow in a semi-porous channel, Elsevier, Powder Technology, Volume 246, pp 327-336
[141] K. V. S. Raju, T. Sudhakar Reddy, M.C.Raju, P. V. SatyaNarayana and S. Venkataramana, 2014, MHD convective flow through porous medium in a horizontal channel with insulated and impermeable bottom wall in the presence of viscous dissipation and Joule heating, Ain Shams Engineering Journal, Volume 5, Issue 2, pp 543-551
[142] HunegnawDessie and NaikatiKishan, 2014, MHD effects on heat transfer over stretching sheet embedded in porous medium with variable viscosity, viscous dissipation and heat source/sink, Ain Shams Engineering Journal, Volume 5, pp 967-977
[143] Nidhish Kumar Mishra, Vineet Kumar Sharma and Debangana Rajput, 2014, Unsteady Viscous Fluid Flow with Porous Medium in the Presence of Radiation and Chemical Reaction, Chinese Journal of Physics, Volume 52, No. 1-I, pp 185-191
[144] Neetu Srivastava, 2014, Analysis of Flow Characteristics of the Blood Flowing through an Inclined Tapered Porous Artery with Mild Stenosis under the Infuence of an Inclined Magnetic Field, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Biophysics, Volume 2014, Article ID 797142, 9 pages
[145] B. Lavanya and A. LeelaRatnam, 2014, Dufour and soret effects on steady MHD free convective flow past a vertical porous plate embedded in a porous medium with chemical reaction, radiation, heat generation and viscous dissipation, Pelagia Research Library, Advances in Applied Science Research, Volume 5(1), pp 127-142
[146] L. Sreekala, E. Keasava Reddy, 2014, Steady MHD Couette Flow of an Incompressible Viscous Fluid Through a Porous Medium Between Two Infinite Parallel Plates Under Effect Of Inclined Magnetic Field, The International Journal of Engineering and Science, Volume 3, Issue 9, pp 18-37
[147] B. VidyaSagar, M. C. Raju, S. V. K. Varma and S. Venkataramana, 2014, Unsteady MHD free convection boundary layer flow of radiation absorbing Kuvshinski fluid through porous medium, Review of Advances in Physics and Applications, Volume 1, Isssue 3, pp 48-62
[148] Rabi Narayan Barik, GourangaCharam Dash and MaheswarKar, 2014, Unsteady free convective MHD flow and mass transfer through porous medium in a rotating system with fluctuating heat source/sink and chemical reaction, Journal of Applied Analysis and Computation, Volume 4, Number 3, pp 231-244

[149] BhimSen Kala, Madan Singh and Ashok Kumar, 2014, Steady MHD free convective flow and heat transfer over nonlinearly stretching sheet embedded in an extend-Darcy-Forcheimmer porous medium with viscous dissipation, Journal of Global Research in Mathematical Archives, Volume 2, No. 4, pp 1-15
[150] Hitesh Kumar, 2014, Mixed-convective-magneto-hydrodynamic flow of a micropolar fluid with ohmic heating, radiation and viscous dissipation over a chemically reacting porous plate subjected to a constantheat flux and concentration gradient, Journal of the Serbian Chemical Society, 79(4), pp 469-480
[151] Md. Sharif Uddin, 2015, Viscous and Joules Dissipation on Mhd Flow past a Stretching Porous Surface Embedded in a Porous Medium, Journal of Applied Mathematics and Physics, Volume 3, pp 1710-1725
[152] T. S. Chauhan, I. S. Chauhan and Shikha, 2015, Flow of a viscous fluid through a porous circular pipe in presence of magnetic field, MathematicaAeterna, Vol. 5, No. 2, pp 395-402
[153] K. Javaherdeh, MehrzadMirzaeiNejad and M. Moslemi, 2015, Natural convection heat and mass transfer in MHD fluid flow past a moving vertical plate with variable surface temperature and concentration in a porous medium,Engineering Science and Technology, an International Journal, Volume 18, pp 423-431
[154] K. Jhansi Rani, G. V. Ramana Reddy, Ch. V. Ramana Murthy and M. V. Ramana Murthy, 2015, Heat and mass transffer effects on MHD free convection flow over an inclined plate embedded in a porous medium, Int.J.Chem.Sci., 13(4), pp 1998-2016
[155] Muondwe Samuel, Mathew Kinyanjui, David Theuri and KangetheGiterere, 2015, Investigation of MHD flow Stokes problem past a porous contracting surface with heat transfer, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 99, No. 4, pp 385-398
[156] Om Prakash, O. D. Makinde, Devendra Kumar and Y. K. Dwivedi, 2015, Heat transfer to MHD oscillatory dusty fluid flow in a channel filled with a porous medium, Sadhana, Indian Academy of Sciences, Vol. 40, Part 4, pp 1273-1282
[157] Bagh Ali, Farooq Ahmad, SajjadHussain and UzmaRasheed, 2015, MHD flow and heat transfer through porous medium over an exponentially shrinking permeable surface, Sci.Int.(Lahort), 27(5), pp 3961-3964
[158] Shalini Jain, RakeshChoudhary, 2015, Effects of MHD on Boundary Layer Flow in Porous Medium due to Exponentially Shrinking Sheet with Slip, Procedia Engineering, Volume 127, pp 1203- 1210
[159] Y. Yirga and B. Shankar, 2015, MHD Flow and Heat Transfer of Nanofluids through a Porous Media Due to a Stretching Sheet with Viscous Dissipation and Chemical Reaction Effects, International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, Volume 16, Issue 5, pp 275-284
[160] Asma Khalid, Ilyas Khan, Arshad Khan, SharidanShafie, 2015, Unsteady MHD free convection flow of Casson fluid past over an oscillating vertical plate embedded in a porous medium, Engineering Science and Technology, an International Journal, Volume 18, Issue 3, pp 309-317

[161] Santosh Chaudhary and Mohan Kumar Choudhary, 2016, Heat and mass transfer by MHD flow near the stagnation point over a stretching or shrinking sheet in a porous medium, Indian Journal of Pure and Applied Physics, Vol. 54, pp 209-217

[162] S. Ravi Kumar, 2016, MHD Peristaltic Transportation of a Conducting Blood Flow with Porous Medium through Inclined Coaxial Vertical Channel, Interational Journal of Bio-Science and Bio-Technology, Vol. 8, No. 1, pp 11-26

[163] Kjay Kumar, R. S. Chandel, Rajesh Shrivastava, KeertyShrivastava and Sanjeet Kumar, 2016, Mathematical modeling of blood flow in an inclined tapered artery under MHD effect through porous medium, International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences, Volume 9, Number 1, pp 75-88

[164] G. S. Seth, R. Sharma and B. Kumbhakar, 2016, Heat and Mass Transfer Effects on Unsteady MHD Natural Convection Flow of a Chemically Reactive and Radiating Fluid through a Porous Medium Past a Moving Vertical Plate with Arbitrary Ramped Temperature, Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 9, No. 1, pp 103-117

[165] j. C. Misra and S. D. Adhikary, 2016, MHD oscillatory channel flow, heat and mass transfer in a physiological fluid in presence of chemical reaction, Elsevier, Alexandria Engineering Journal, Vol. 55, pp 287-297

[166] Iftikhar Ahmad, Manzoor Ahmad and Muhammad Sajid, 2016, Heat transfer analysis of MHD flow due to unsteady bi-directional stretching sheet through porous space, Thermal Science, Vol. 20, No. 6, pp 1913-1925

[167] Shehzad, S.A., Hayat, T., Alsaedi, A., 2016, Three-Dimenzional MHD Flow of Casson Fluid in Porous Medium with Heat Generation, Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 9, Issue 1, pp 215-223

[168] B. J. Gireesha, B. Mahanthesh, Rama Subba Reddy Gorla and P. T. Manjunatha, 2016, Thermal radiation and Hall effects on boundary layer flow past a non-isothermal stretching surface embedded in porous medium with non-uniform heat source/sink and fluid-particle suspension, Heat and Mass Transfer, Volume 52, Issue 4, pp 897-911

[169] Kiran Kumari and Mamta Gonala, 2017, Viscous Dissipation and Mass Transfer Effects on MHD Oscillatory Flow in a Vertical Channel with Porous Medium, Advances in Dynamical Systems and Applications, Volume 12, Number 2, pp 205-216

[170] Noura Slsedais, 2017, Heat Generation and Radiation Effects on MHD Casson Fluid Flow Over a Stretching Surface Through Porous Medium, Europen Journal of Advances in Enginnering and Technology, 4(11), pp 850-857

[171] Jeeshan Khan, Muhammad Altaf Khan, Saeed Islam, Bilal Jan, FawadHussain, Haroon Ur Rasheed and Waris Khan, 2017, Analysis of Magnetohydrodynamics Flow and Heat Transfer of a Viscoelastic Fluid through Porous Medium in Wire Coating Analysis, MDPI Matheatics, 5(2), 27, pp 1-12

[172] D. Dastagiri Babu, S. Venkateswarly and E. Keshava, 2017, Heat and Mass Transfer on MHD Free convective flow of Second grade fluid through Porous medium over an infinite vertical plate, ICMAEM-2017, IOP Publishing, IOP Conf.Series: Materials Science and Engineering, 225, 012267, doi: 10.1088/1757-899X/225/1/012267.

[173] A. Sinha, N. Ahmed and S. Agarwalla, 2017, MHD Free Convective Flow through a Porous Medium Past a Vertical Plate with Ramped Wall Temperature, Applied Mathematical Sciences, Vol. 11, No. 20, pp 963-974

[174] Y. Hari Krishna, G. Kamala, M.V. Ramana Murthy and D. Bhagyya, 2017, MHD Free Convective Flow Past a Vertical Porous Plate in a Porous Medium in the Presence of Soret and Dufour Effects, International Journal of Emerging Research in Management and Technology, Volume 6, Issue 8, pp 1-18

[175] BhavyaTripathi and Bhupendra Kumar Sharma, 2017, MHD Blood flow and Heat transfer through an inclined porous stenosed artery with variable viscosity, arXiv: 1610.03470V2 (physics.flu-dyn) 28, pp 1-15

[176] R. Latha and B. Rushi Kumar, 2017, Unsteady MHD blood flow through porous medium in a parallel plate channel, 14th ICSET-2017, IOP Publishing, IOP Conf. Series:Materials Science and Engineering 263, 062020, doi: 10.1088/1757-899X/263/6/062020

[177] Prashant G. Metri, 2017, Mathematical analysis of convective flow due to stretching sheet and instabilities of natural convective flow, Malardalen University Press Dissertations, No. 226

[178] Marina S. Astanina, Mikhail A. Sheremet, Hakan F. Oztop and Nidal Abu-Hamdel, 2018, MHD natural convection and entropy generation of ferrofluid in an open trapezoidal cavity partially filled with a porous medium, Elsevier, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 136, pp 493-502

[179] M. Sheikholeslami and S. A. Shehzad, 2018, CVFEM simulation for nanofluid migration in a porous medium using Darcy model, Elsevier, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 122, pp 1264-1271

[180] M. Sheikholeslami and Houman B. Rokni, 2018, Numerical simulation for impact of Coulomb force on nanofluid heat transfer in a porous enclosure in presence of thermal radiation, Elsevier, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 118, pp 823-831

[181] Asma Khalid, Ilyas Khan, Arshad Khan and SharidanShafie, 2018, Case study of MHD Blood Flow in a Porous Medium with CNTS and Thermal Analysis, Elsevier, Case Studies in Thermal Engineering, In Press, Accepted Manuscript

[182] Agoor B.M., 2018, Slip Flow in Porous Medium of Micropolar Fluid in a Rectangular Microchannel under the Effect of a Magnetic Field, J. Appl. Mech. Eng. 7 (1):298, doi: 10.4172/2168-9873.1000298

[183] Ţivojin M. Stamenković, 2013, Magnetno-hidrodinamička (MHD) strujanja jednog i dva fluida u kanalima, doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet u Nišu

[184] Ţ. M. Stamenković, J. D. Petrović, M. M. Kocić and M.D. Nikodijević, 2016, Control of Fluid Flow and Heat Transfer in Porous Medium, XIII International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements Niš, Serbia, Proceedings, pp 199-203

[185] Jelena D. Petrović, Ţivojin M. Stamenković, Miloš M. Kocić and Milica D. Nikodijević, 2016, Porous Medium Magnetohydrodynamic Flow and Heat Transfer of Two Immiscible Fluids, Thermal Science, Vol. 20, Suppl 5, pp S1405-S1417, ISSN 0354-9836

[186] Jelena D. Petrović, Ţivojin M. Stamenković, Miloš M. Kocić, JasminaBogdanović-Jovanović and Milica D. Nikodijević, 2017, MHD flow and heat transfer in the porous medium under the infuence of an externally applied magnetic field and inducted magnetic field, 6th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Mountain Tara, Serbia, ISBN 978-86-909973-6-7 radS3f

[187] Jelena Petrović, Ţivojin Stamenković, Miloš Kocić, Milica Nikodijević, Jasmina Bogdanović-Jovanović, 2017, MHD flow and heat transfer in porous medium with induced magnetic field effects, 13th International Conference on Accomplishments in Mechanical and Industrial Engineering, Banja Luka, University of Banja Luka, Faculty of Mechanical Engineering, ISBN 978-99938-39-73-6 (COBIS.RS-ID 6522904) Proccedings, pp 291-297

[188] Jelena Petrović,, Ţivojin Stamenković, Miloš Kocić, Jasmina Bogdanović-Jovanović and Milica Nikodijević, 2018, MHD Flow and Heat Transfer in the Porous Medum Between Stationary and Moving Plate, 4th International Conference Mechanical Engineering in XXI Centry, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering in Niš, ISBN 978-86-6055-103-2 COBISS.SR-ID 261069580, Proceedings 99-104

[189] Slattery, J. C., 1969, Single phase Flow Through Porous Media, AICHE J., 15, pp 866-872

[190] Whitaker, S., 1999, The Method of Volume Averaging, Dordrecht: Kluwer Academic Press

[191] Gradimir Ilić, Nenad Radojković, Ivan Stojanović, 1996, Termodinamika II, osnove prostiranja toplote, Niš, Mašinski fakultet- Univerzitet u Nišu

[192] Cvetko Crnojević, 2014, Mehanika fluida, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

[193] C. T. Hsu and P. Cheng, 1990, Thermal dispersion in porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 33, Issue 8, pp 1587-1597

[194] Nozad I., Carbonell R. G. and Whitaker S., 1985, Heat Conduction in Multi-Phase Systems I: Theory and Experiments for Two-Phase Systems, Chem.Eng.Sci. 40, pp 843-855

[195] A. B. Vataţin, G. A. Ljubimov, S. A. Regirer, 1970, Magnetnohidrodinamičkastrujanja u kanalima, izdanje "Nauka", Moskva

[196] Dr Djuro Kurepa, 1965, Viša Algebra, knjigaprva, izdavačkopreduzećeŠkolskaknjiga, Zagreb

[197] D. S. Mitrović, D. Mihailović, P. M. Vasić, 1968, Linearna algebra, polinomi, analitičkageometrija, IzdavačkopreduzećeGraĐevinskaknjiga, Beograd

[198] ANSYS Fluent Tutorial Guide, (2016), ANSYS, Inc. Release 17.0

[199] ANSYS Modeling and Meshing Guide, (2005), ANSYS, Inc. Release 10.0

Biografija autora

Jelena D. Petrović roĎena je 05. decembra 1985. godine u Nišu. PohaĎala je i završila Osnovnu školu "Filip Filipović" u Nišu. Dobitnica je nagrade "Vuk Karadţić" za osnovno obrazovanje. PohaĎala je i završila Gimnaziju "Svetozar Marković" u Nišu, smer prirodno-matematički (2000-2004).

Upisala je Mašinski fakultet u Nišu 2004. godine. Na trećoj godini fakulteta opredelila se za profil Energetika i procesna tehnika. Diplomirala je na istom fakultetu 2010. godine, sa prosečnom ocenom 9.52 i ocenom 10 na diplomskom radu iz predmeta Teorija turbomašina pod nazivom "Proučavanje dozvučnog strujanja stišljivog fluida kroz radijalno kolo kompresorske rešetke". U toku studiranja dobila je nekoliko nagrada: za najboljeg studenta prve godine, za najboljeg studenta druge godine i za postugnute sportske rezulate u Univerzitetskoj ligi i na Mašinijadi. Bila je stipendista Fondacije za razvoj naučnog i umetničkog podmlatka Republike Srbije.

Studije trećeg stepena-doktorske akademske studije, smer Energetika i procesna tehnika, na Mašinskom fakultetu u Nišu upisala je 2010. godine. U toku doktorskih sudija, pohaĎala je "International Workshop for Laser Flow Measurements" 2011. godine na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Učestvovala je na savetovanju o Malim hidroelektranama "MHE za gravitacione sisteme" takoĎe 2011. godine u Vučju.

Od 2013. godine zaposlena je na Mašinskom fakultetu u Nišu u zvanju asistent. Angaţovana je na na izvoĎenju veţbi iz predmeta: Mehanika fluida, Osnove turbomašina, Elementi uljne hidraulike i pneumatike, Tehnička fizika, Male hidroelektrane i vetrogeneratori, Obnovljivi izvori energije, Projektovanje energetskih elemenata i sistema primenom računara. Učestvuje u realizaciji naučno-istraţivačkih projekata Ministarstva za naučni i tehnološki razvoj: "Istraţivanje magnetno-hidrodinamičkih (MHD) strujanja u okolini tela, procepima i kanalima i primena u razvoju MHD pumpi" (br. projetka 35016, rukovodilac dr Ţivojin Stamenković) i "Revitalizacija postojećih i projektovanje novih mikro i mini hidroelektrana (od 100 do 1000 kW), na teritoriji juţne i jugoistočne Srbije" (br. projekta 33040, rukovodilac dr Dragica Milenković). Ima objavljenih devet radova u časopisu sa SCI liste, kao i više desetina radova na inostranim i domaćim naučnim skupovima.